

# Contribution à l'étude de la convection naturelle au sein d'une conduite torique

Ny Avana Yarivony HERINAVALONA<sup>1</sup>, José Denis RAKOTOVAO<sup>2</sup>,  
Pierre RAKOTOMAMONJY<sup>3</sup>

Laboratoire de recherche – Génie Mécanique et Thermique Industriel (LR-GMTI)  
Ecole Supérieure Polytechnique – Université d'Antananarivo  
BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 - Madagascar

<sup>1</sup>navalhr@gmail.com, <sup>2</sup>josedenirakotovao@gmail.com, <sup>3</sup>kotomamonjypr@yahoo.fr

**Résumé :** Cet article a pour but d'étudier la convection naturelle au sein d'une conduite torique dont la paroi externe est soumise à une densité de flux de chaleur constant.

L'analyse du problème se fait par l'écriture des équations de continuité, de chaleur, de mouvement et de fonction de courant. La vorticité est introduite pour éliminer la pression des équations de la quantité de mouvement.

L'analyse théorique pr sent e dans cet article s'arrête à l'adimensionnalisation des équations.

*Mots clés :* thermique, convection naturelle, tore

**Abstract :** The purpose of this article is to study natural convection within toric pipe of which the external wall is subjected to constant heat flux density.

The analysis of the problem is made by writing continuity equation, heat equation, motion equation and stream function equation. Vorticity is introduced in order to

eliminate the pressure of momentum equations.

Theoretical analysis in this article falls on the adimensionnalisation of equations.

*Keywords :* thermics, natural convection, torus

## Nomenclature

### *Lettres*

a : distance focale

$c_p$  : chaleur massique à pression constante

Gr : nombre de Grashof

$h_\eta$ ,  $h_\theta$ ,  $h_\varphi$  les coefficients métriques

L : longueur de référence

P : pression au sein du fluide

Pe : nombre de Peclet

q : densité de flux de chaleur

R : rayon de référence

( $r, \varphi, z$ ) coordonnées cylindriques

$T_\infty$  : température du fluide à l'infini

t : temps

T: température

(x, y, z) : coordonnées cartésiennes

### **Lettres grecques**

$\beta$  : coefficient volumique d'expansion

thermique du fluide

$\partial$  : dérivée partielle

$\Delta$  : opérateur Laplacien

$(\eta; \theta; \varphi)$  : coordonnées toriques

$\lambda$  : conductivité thermique du fluide

$\nabla$  : opérateur nabla

$\nu$  : viscosité cinématique

$\rho$  : masse volumique du fluide

$\tau$  : coefficient de frottement local

$\psi$  : fonction de courant

### **Exposant**

+: paramètres adimensionnels.

### **Indice**

$\eta$  : suivant la coordonnée  $\eta$

$\theta$  : suivant la coordonnée  $\theta$

$\varphi$  : suivant la coordonnée  $\varphi$

### **Vecteurs**

$\vec{e}$  : vecteur unitaire

$\vec{g}$  : accélération de la pesanteur

$\vec{V}$  : vitesse

$\vec{\omega}$  : vorticité

## **1. Introduction**

L'étude de la convection naturelle a fait l'objet de nombreuses recherches. Ces recherches sont axées sur des configurations géométriques telles que plane [1], [2], cubique, rectangulaire [3], cylindrique [4], [5], [6], elliptique [7]. Cependant, il existe de nombreuses situations en pratique où la

géométrie est quelconque et en particulier torique.

En recherche nucléaire pour la production d'énergie par fusion, dans les réacteurs de type tokamak, le plasma est contenu par de forts champs magnétiques dans une chambre de forme torique. L'un de ces réacteurs porte d'ailleurs le nom de Tore Supra. C'est aussi la forme des chambres à vide des accélérateurs de particules du type synchrotron.

En électricité, la forme idéale du bobinage d'un transformateur est celle du tore.

Notons que les chambres à air, les bouées, certains joints toriques d'étanchéité et les pneus qui sont tous toriques.

Dans la mesure où 20 % de la consommation d'énergie du véhicule est due au pneumatique.

Le transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieure d'une surface torique, est donc un phénomène de grande importance.

Cet intérêt est dû aussi aux différentes applications dans l'ingénierie comme par exemple transfert de chaleur à l'intérieur d'un pneu.

## **2. Description du problème**

L'écoulement de convection naturelle, en régime permanent, est régi par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Pour une configuration géométrique plane, rectangulaire, cylindrique, ou sphérique, ces équations sont résolues en coordonnées cartésiennes, cylindriques et coordonnées

sphériques.

Les opérateurs gradient, rotationnel, divergence et Laplacien sont bien connus dans ces systèmes de coordonnées.

Par contre pour un problème à géométrie quelconque, il faudra trouver un système de coordonnées et écrire les équations de transfert en convection naturelle dans ce nouveau système de coordonnées. Il faudra aussi écrire les opérateurs gradient, rotationnel, divergence et Laplacien dans ce système de coordonnées.

Le calcul vectoriel dans un système de coordonnées orthogonales [8] nous permet d'avoir les vecteurs unitaires et les opérateurs différentiels dans le système de coordonnées torique [9].

Ensuite nous résolvons les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans ce nouveau système de coordonnées.

Dans cet article, nous allons présenter les équations principales régissant le comportement d'un fluide ainsi que les hypothèses simplificatrices qui permettront de caractériser son mouvement au sein d'une conduite torique. Le système de coordonnées utilisée sera le système de coordonnées torique.

Considérons un fluide newtonien, entourant une conduite torique verticale. La figure 1 représente une vue dans l'espace du système étudié et celle de la figure 2 une vue en coupe.

Nous admettons les hypothèses suivantes :

- La paroi intérieure est soumise à une densité de chaleur constante
- Les propriétés du fluide sont constantes sauf sa masse volumique qui varie avec la température.
- La dissipation visqueuse est négligeable
- Le problème est permanent, laminaire et admet une symétrie autour de l'axe de la conduite

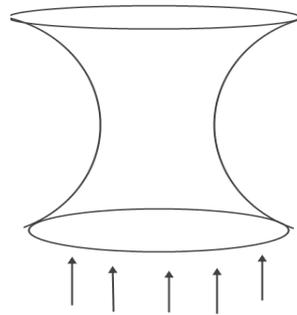


Figure 1 : Vue dans l'espace du système étudié

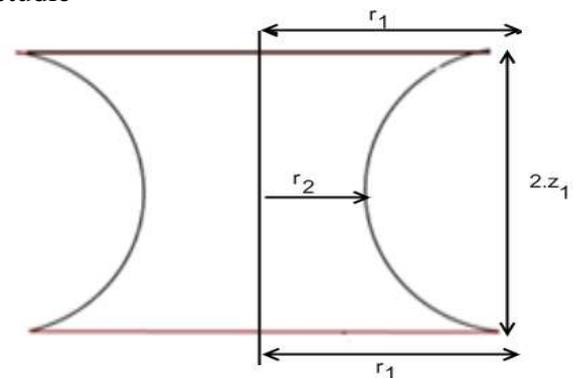


Figure 2 : Vue en coupe du système étudié

### 2.1 Système de coordonnées toriques

Soit  $(x, y, z)$  les coordonnées cartésiennes et  $(r, \varphi, z)$  les coordonnées cylindriques tel que :

$$x = r \cdot \cos \varphi; y = r \cdot \sin \varphi; z = z \quad (1)$$

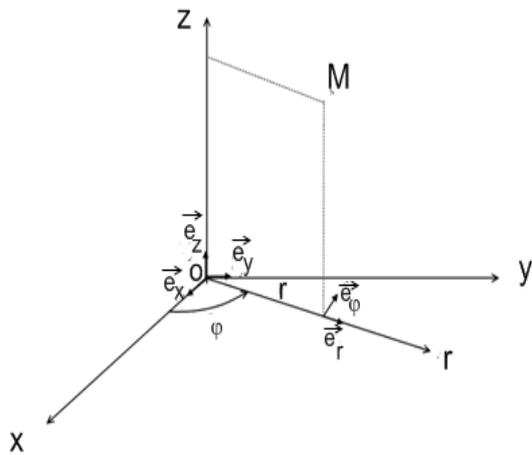


Figure 3 : Coordonnées cylindriques

Dans le plan  $\varphi = c^{te}$ , construisons un système de coordonnées bipolaires tels que :

$$r = a \frac{\text{sh} \eta}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad \text{et} \quad z = a \frac{\sin \theta}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad (2)$$

avec  $\eta \geq 0$

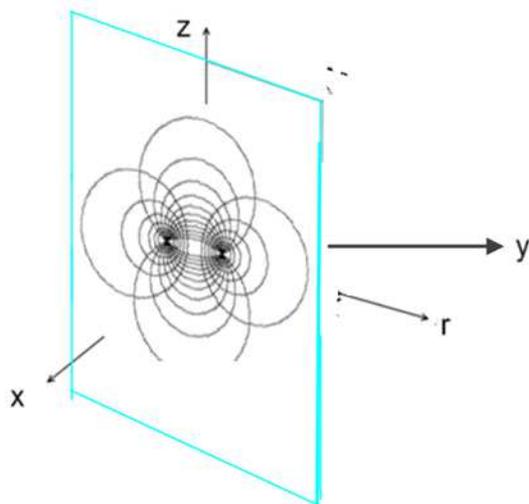


Figure 4 : Coordonnées bipolaires

Si nous faisons varier  $\varphi$  de 0 à  $2\pi$ , nous avons un tore.

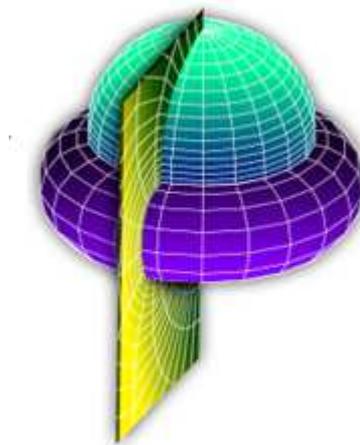


Figure 5 : Tore obtenu à partir des coordonnées bipolaires

Les coordonnées toriques sont donc :

$$x = a \frac{\text{sh} \eta \cos \varphi}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad (3)$$

$$y = a \frac{\text{sh} \eta \sin \varphi}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad (4)$$

$$z = a \frac{\sin \theta}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad (5)$$

avec  $\eta \in [0; +\infty[ ; \theta \in [-\pi; +\pi] ; \varphi \in [0 ; 2\pi]$

Avec « a » : distance focale

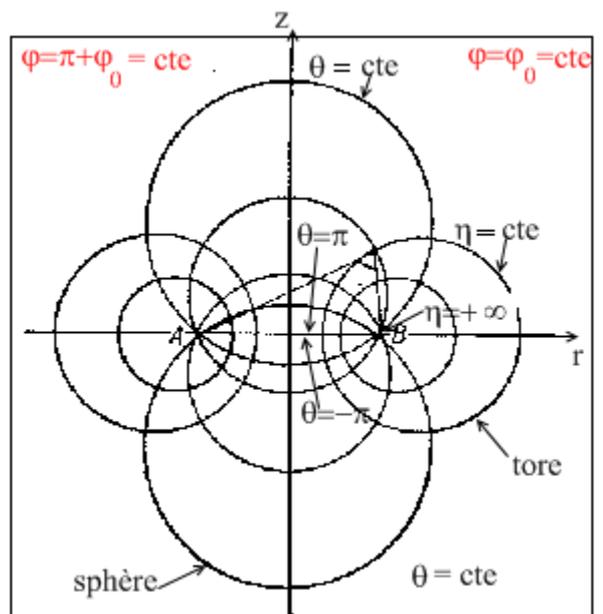


Figure 6 : Système de coordonnées toriques

Pour simplifier, nous posons :

$$r = a \frac{\text{sh} \eta}{\text{ch} \eta - \cos \theta} \quad (6)$$

Les trois vecteurs  $(\vec{e}_\eta; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\varphi)$  sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées toriques, tandis que  $a$  est la distance focale.

Les coefficients métriques sont :

$$h_\eta = h_\theta = h = \frac{a}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (7)$$

$$h_\varphi = r = a \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (8)$$

### 3. Formulation vectorielle du problème

Les équations de transfert s'écrivent sous forme vectorielle, en utilisant l'approximation de Bousinesq.

Les trois vecteurs  $(\vec{e}_\eta; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\varphi)$  sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées toriques.

On a :

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\eta) = \frac{\partial z}{h \partial \eta} = -G \quad (9)$$

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) = \frac{\partial z}{h \partial \theta} = -F \quad (10)$$

Avec

$$G = \frac{\sin \theta \cdot \text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (11)$$

$$F = \frac{1 - \cos \theta \cdot \text{ch } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (12)$$

Soit  $\Phi$  une fonction scalaire, et  $\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$  une fonction vectorielle

de coordonnées curvilignes  $x_1, x_2, x_3$

Les opérateurs gradients, divergence, rotationnel et Laplacien en coordonnées toriques sont :

$$\text{grad } \Phi = \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \vec{e}_\eta + \frac{1}{h} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (13)$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h^2 \cdot V_\varphi)}{\partial \varphi} \right] \quad (14)$$

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{r \cdot h^2} \begin{bmatrix} h \cdot \vec{e}_\eta & h \cdot \vec{e}_\theta & r \cdot \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h \cdot V_\eta & h \cdot V_\theta & r \cdot V_\varphi \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h^2}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (16)$$

#### 3.1 Equation de continuité

La divergence du vecteur  $\vec{V}$  est donnée par :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(h^2 \cdot V_\varphi)}{\partial \varphi} \right] \quad (17)$$

D'autre part  $V_\varphi = 0$ , par la suite, l'équation de

continuité  $\text{div } \vec{V} = 0$  (1.2.1) s'écrit :

$$\frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(r \cdot h \cdot V_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (18)$$

#### 3.2 Equation de mouvement

Posons

$$\omega = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (h \cdot V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h \cdot V_\eta) \right] \quad (19)$$

Pour l'équation de mouvement, nous trouvons :

$$(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \vec{V} - \beta(T - T_\infty) \vec{g} \quad (20)$$

#### 3.3 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur est :

$$\vec{V} \cdot \text{grad } T = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \Delta T = \alpha \Delta T \quad (21)$$

Par raison de symétrie on a  $T = T(\eta; \theta)$

L'équation de la chaleur s'écrit alors :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \quad (22)$$

En résumé : dans le système de coordonnées torique, les équations de transferts sont :

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (r h V_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r h V_\theta) = 0 \quad (23)$$

Equation de mouvement

$$\frac{r V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{r V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\beta g}{h} \left[ G \frac{\partial T}{\partial \theta} - F \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\nu}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( r \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{h^2}{r} \omega \right] \quad (24)$$

Equation de la chaleur

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{r \cdot h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \quad (25)$$

### 3.4 Vorticité

L'équation de continuité est satisfaite en introduisant la fonction de courant  $\Psi$  tel que :

$$V_\eta = \frac{1}{r \cdot h} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (26)$$

$$V_\theta = -\frac{1}{r \cdot h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \quad (27)$$

Par suite, la vorticité peut s'écrire par :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \quad (28)$$

## 4. Adimensionnalisation

### 4.1 Adimensionnalisation des équations

Soit  $L$ ,  $\frac{\nu Gr^{*(2/5)}}{L}$ ,  $\frac{qL}{\lambda Gr^{*(1/5)}}$  respectivement

la longueur, vitesse et température de référence .

On a :

$$R = \frac{r}{L} \quad (29)$$

$$Gr^* = \frac{\beta \cdot g \cdot q \cdot L^4}{\lambda \cdot \nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (30)$$

$$V_\eta^+ = \frac{V_\eta}{\nu Gr^{*(2/5)}} \quad V_\theta^+ = \frac{V_\theta}{\nu Gr^{*(2/5)}} \quad (31)$$

$$T^+ = \frac{\lambda}{qL} (T - T_\infty) \cdot Gr^{*(1/5)} \quad \omega^+ = \frac{L^2 \omega}{\nu \cdot Gr^{*(2/5)}}$$

(32)

$$\Psi^+ = \frac{\Psi}{\nu \cdot L \cdot Gr^{*(2/5)}} \quad (33)$$

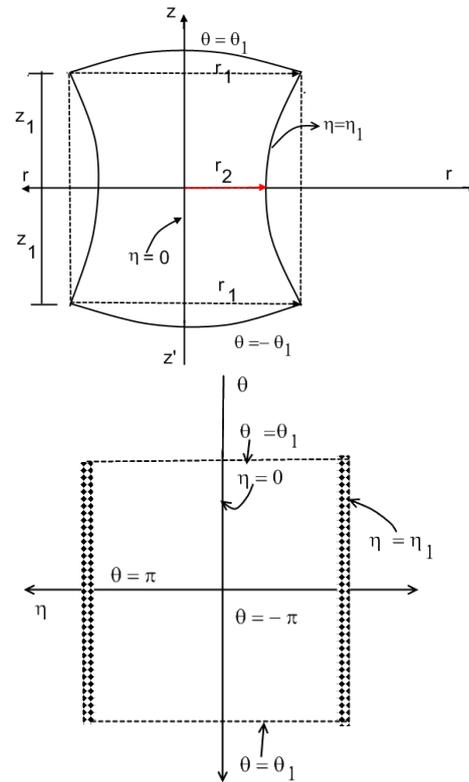


Figure 7 : Représentation du système en

coordonnées cylindriques et toriques

La configuration du système est définie par  $r_1$ ,

$r_2$ ,  $z_1$  et les paramètres  $\eta_1$ ,  $\theta_1$  et  $a$  sont

calculés à partir de  $r_1 = a \frac{sh\eta_1}{chn_1 - \cos\theta_1}$ ,

$$r_2 = a \frac{sh\eta_1}{chn_1 + 1} \quad (34)$$

$$z_1 = a \frac{\sin\theta_1}{chn_1 - \cos\theta_1}$$

L'adimensionnalisation nous donne

$$R_1 = \frac{r_1}{L} \quad R_2 = \frac{r_2}{L}$$

$$Z_1 = \frac{z_1}{L} \quad (35)$$

En portant ces variables dans les équations

(23), (24), (25), nous obtenons :

### Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (RHV_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (RHV_{\theta}^+) = 0 \quad (36)$$

### Equation de la chaleur

$$\frac{V_{\eta}^+}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}^+}{h} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{1}{R.H^2 \zeta} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( R \cdot \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( R \cdot \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$\zeta = Pr \cdot Gr^{*(2/5)} \quad (37)$$

### Equation de mouvement

$$\frac{R}{H} V_{\eta}^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{R}{H} V_{\theta}^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = \frac{1}{R H^2 Gr^{*(2/5)}} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} - \frac{H^2}{R} \omega^+ \right] + \frac{1}{H} \left[ G \frac{\partial T^+}{\partial \theta} - F \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] \quad (38)$$

Pour les composantes de la vitesse ainsi que la vorticité  $\omega^+$  nous avons :

$$V_{\eta}^+ = \frac{1}{RH} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \quad V_{\theta}^+ = \frac{1}{RH} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta}$$

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \right] \quad (39)$$

## 5. Conclusion

Nous avons étudié la convection naturelle au sein d'une conduite torique.

Le système de coordonnées torique a été introduit à partir de coordonnées bipolaires construits dans un système de coordonnées cylindriques.

Les auteurs ont données les équations de transferts adimensionnalis  es.

Les équations de transfert que nous avons trouvé ne font pas encore intervenir ni le

profil de vitesse du fluide à l'entrée ni les conditions des frontières thermiques.

On peut donc utiliser ces équations pour tout type de convection naturelle au sein d'une conduite torique.

Notons que les conditions aux limites sont en générales des températures impos  es ou des flux de chaleur imposés. Les variables adimensionnelles seront choisies selon le type de conditions aux limites.

## REFERENCES

- [1] Hung Y; H, Shiau W.M, "Local steady-state natural convection heat transfert in vertical parallel plates with a two-dimensional rectangular", rib. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, No, 6, pp. 1219-1288, 1988.
- [2] Zimmerman E., Acharya S, "Free convection heat transfert in a particular divided vertical enclosure with conducting end walls", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 2, pp.319-331, 1987.
- [3] G. De Vahl Davis, C. F. Kettleborough, "Natural Convection in an Enclosed Rectangular Cavity", Trans. I. Aust., MC1, 43-49, 1968.
- [4] R. E. Powe, C. T. Carley, E. H. Bishop. "Free convective flow patterns in cylindrical annuli", J. Heat Transfer, vol. 91, pp. 310-314 (1969). [10] R. G. Akins, Y. S. Lin, "Transient behaviour of natural convection inside a vertical cylinder", Chem. Eng. Corn., vol. 43, pp. 69-83, 1986.

- [5] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, “*An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinder*”s, J. Fluid Mech., vol. 74, pp. 695-719, 1976.
- [6] U. Projahn. H. Reiger, H. Beer, “*Numerical analysis of laminar convection between concentric and eccentric cylinders*”, Numer. Heat Transfer, vol. 4. pp. 131- 146, 1981.
- [7] M. Djeddar, A. Chaker, and M. Daguinet, “*Numerical study of bidimensional steady natural convection in a space annulus between two elliptic confocal ducts*”. Influence of internal eccentricity. Revue des Energies Renouvelables, Volume 8, Numéro 1, Juin 2005.
- [8] Robert Jason Parsley, The Biot-Savart “*Operator and Electrodynamics on Bounded Subdomains of the Three-Sphere*”, Thesis Doctor of Philosophy, Faculties of the University of Pennsylvania, pp. 18-24 2004.
- [9] George Arfken, “*Mathematical Methods for Physicists*”, Chapter 2, Academic Press, 2nd ed, 1970,