

## LES SOUS-ENSEMBLES DE GIVENS de $SO(4)$

Princy RANDRIAMBOLOLONDRAntomalala<sup>1</sup>

Département de Mathématiques et Informatique  
B.P. 906, Ankatsu 101  
Université de Tananarive, Madagascar

Didier PINCHON<sup>2</sup>

Institut de Mathématiques  
118, route de Narbonne  
Université Paul Sabatier, Toulouse, France

### Résumé

Dans cet article, nous étudions une famille de sous-ensembles du groupe spécial orthogonal  $SO(N, \mathbb{R})$  d'ordre  $N$ , appelés les ensembles de Givens. Dans le cas particulier  $N = 4$ , une description complète de tous les ensembles de Givens est donnée ainsi que la caractérisation de chacun d'eux comme sous-ensemble algébrique ou sous-ensemble semi-algébrique de  $SO(4, \mathbb{R})$ . Après une exploration numérique du problème présentée dans une première partie de l'article, nous donnons des démonstrations complètes de tous les résultats avec le plus souvent l'aide d'un système de calcul formel.

**Mots-clés.** Ensemble de Givens - Groupe spécial orthogonal - Sous-ensemble algébrique ou semi-algébrique - Calcul formel.

### Abstract

In this paper, we study a family of subsets of the special orthogonal group  $SO(N, \mathbb{R})$  with index  $N$ , the so-called Givens sets. In the particular case  $N = 4$ , a complete description of all Givens sets is given, together with a characterization of each of them as an algebraic subset or a semi-algebraic subset of  $SO(4, \mathbb{R})$ . After a numeric exploration of the problem presented in a first part of the paper, complete proofs of all the results are given, mostly with the help of a computer algebra system.

**Keywords.** Givens set - Special orthogonal group - Algebraic or semi-algebraic subset - Computer algebra.

---

1. princypcpc@yahoo.fr (auteur correspondant)  
2. didier.pinchon@math.univ-toulouse.fr

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Applications de Givens et ensembles de Givens</b>	<b>3</b>
2.1	Les permutations . . . . .	3
2.2	Les ensembles de Givens . . . . .	4
2.3	Les monoïdes de Givens . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Détermination numérique de <math>\mathcal{M}_4</math></b>	<b>7</b>
3.1	Égalité numérique de deux ensembles de Givens . . . . .	7
3.2	L'algorithme principal . . . . .	7
3.3	Inclusions . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Détermination algébrique de <math>\mathcal{M}_4</math></b>	<b>10</b>
4.1	Base standard de $SO(4)$ . . . . .	11
4.2	Ensembles de Givens algébriques réels ou semi-algébriques . . . . .	11
4.3	Calcul de $S_K^{(0)}$ , $1 \leq K \leq 3$ . . . . .	12
4.4	Calcul formel de $S_4^{(0)}$ et $S_5^{(0)}$ . . . . .	15
4.5	Permutation des colonnes dans $S_K^{(0)}$ , $3 \leq K \leq 5$ . . . . .	17
4.6	Transposition dans $S_K^{(0)}$ , $2 \leq K \leq 5$ . . . . .	19
4.7	Calcul formel de $S_6^{(0)}$ . . . . .	19
4.8	Inclusions dans $S_6^{(0)}$ . . . . .	21
4.9	Mesures de $G_{6,4}$ et de $G_{6,8}$ . . . . .	24
4.10	$S_7$ est vide . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>28</b>

## 1 Introduction

Nous présentons dans ce document une étude des sous-ensembles de Givens de  $SO(4)$  dont les éléments sont des produits d'un nombre fini de matrices de rotation dont les indices sont fixés.

Après le rappel de quelques définitions sur les groupes de permutations, un premier paragraphe donne la définition des applications de Givens et des sous-ensembles de Givens du groupe spécial orthogonal  $SO(N)$ .

Nous proposons une étude approfondie du cas  $N = 4$ . La section 3 présente les résultats donnés par un programme où l'égalité de deux ensembles de Givens est obtenue numériquement et détermine un ensemble d'ensembles de Givens, représentant chacun une classe de conjugaison ainsi que son groupe de stabilité.

Dans la section 4, nous démontrons avec toute la rigueur nécessaire les résultats de la section 3 en caractérisant la nature algébrique de chaque ensemble de Givens.

Enfin la conclusion évoque quelques pistes pour la suite de ce travail.

Les programmes écrits avec le système de calcul formel Maple qui permettent d'obtenir la plupart des résultats du paragraphe 4 sont disponibles auprès des auteurs.

## 2 Applications de Givens et ensembles de Givens

Dans toute la suite les indices de lignes et de colonnes d'une matrice commencent à 1. Une matrice sera notée en caractère gras, tandis que la fonte ordinaire sera utilisée pour noter les ensembles de matrices.

On suppose dans toute la suite que  $N$  est un entier avec  $N \geq 2$ .

### 2.1 Les permutations

Quelques définitions, notations et propriétés du groupe de permutation  $\mathcal{S}_N$  sont rappelées ici, et l'on trouvera dans des ouvrages de référence, [2] ou [3] par exemple, bien davantage de résultats.

Une permutation  $\sigma$  de l'ensemble à  $N$  éléments  $\{1, 2, \dots, N\}$  est une bijection  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, N\}$  dans lui-même. Une telle permutation est notée usuellement  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}$  mais nous la noterons ici  $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)]$  ou bien plus brièvement, lorsque  $2 \leq N \leq 9$ , avec le signe  $\sigma$  avec comme indices la suite  $\sigma(1), \dots, \sigma(N)$ .

Par exemple, pour  $N = 4$  la permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  sera notée  $\sigma_{4312}$ .

Un  $k$ -cycle est une permutation telle qu'il existe un sous-ensemble  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  à  $k$  éléments dans  $\{1, 2, \dots, N\}$  avec  $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$  et  $\sigma(i) = i$  sinon. On note  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  une telle permutation. Un 2-cycle s'appelle une transposition : elle échange deux éléments et laisse les autres éléments fixes. Toute permutation peut s'écrire comme composée de cycle associés à des sous-ensembles disjoints de  $\{1, 2, \dots, N\}$ . En ne mentionnant pas les 1-cycles, c'est-à-dire les points fixes, on écrit une permutation en concaténant l'écriture de ses cycles. Par exemple pour  $N = 4$ ,  $\sigma_{3412} = (1, 3)(2, 4)$ .

On note  $\mathcal{S}_N$  le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$  pour la composition et à toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ , on associe la matrice  $\mathbf{\Pi}_\sigma$  de dimensions  $N \times N$  définie par  $\mathbf{\Pi}_{r, \sigma(r)} = 1, 1 \leq r \leq N$  et 0 ailleurs. Enfin une permutation  $\sigma$  est *paire* si elle peut s'écrire comme la composée d'un nombre pair de transpositions ou, ce qui revient au même si le déterminant de  $\mathbf{\Pi}_\sigma$  est égal à 1.

Pour  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_k \in \mathcal{S}_N$ , on note  $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$  le plus petit sous-groupe de  $\mathcal{S}_N$  contenant  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  et l'on dira que ce sous-groupe est engendré par  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  ou encore que  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$  est un sous-ensemble générateur de ce sous-groupe.

Si  $H$  est un sous-groupe de  $\mathcal{S}_N$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ , alors l'ensemble des  $\sigma g \sigma^{-1}$ ,  $g \in H$  est un sous-groupe de  $\mathcal{S}_N$ , qui est appelé *conjugué* de  $H$  par  $\sigma$ . L'ensemble des sous-groupes conjugués de  $H$  est sa *classe de conjugaison* dans  $\mathcal{S}_N$ .

Pour un sous-groupe  $H$  de  $\mathcal{S}_N$ , la classe à gauche d'un élément  $g \in \mathcal{S}_N$  suivant  $H$  est l'ensemble  $gH = \{gH, h \in H\}$ .

On munit  $\mathcal{S}_N$  de la relation d'ordre lexicographique définie pour  $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_N$  par  $\sigma < \tau$  si et seulement s'il existe un indice  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$  tel que  $\sigma(i) = \tau(i)$  pour  $i < i_0$  et  $\sigma(i_0) < \tau(i_0)$ .

On appelle alors orbite de  $H$ , l'ensemble ordonné des éléments minimaux des classes à gauche de  $H$ , et on le note  $\text{Orb}(H)$ .

Dans le cas  $N = 4$ , il existe 30 sous-groupes de  $\mathcal{S}_4$ , répartis en 11 classes de conjugaison [15, Chapter 8. Groups of order 24]. Ils sont décrits dans la table 1 où la première colonne donne l'ordre, c'est-à-dire le nombre d'éléments des sous-groupes de la classe, la deuxième colonne un système de générateurs d'un sous-groupe de la classe de conjugaison, la troisième colonne le nombre de sous-groupes dans la classe de conjugaison, et la quatrième un code désignant les groupes de la classe :  $A_4$  est le groupe alterné à 12 éléments,  $D_8$  le groupe driédral à 8 éléments,  $S_3$  est isomorphe à  $\mathcal{S}_3$ ,  $Z_4$  est le groupe cyclique d'ordre 4,  $V'_4$  et  $V_4$  sont isomorphes à  $\mathbb{Z}_2^2$  ( $V_4$  qui est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{S}_4$  est aussi appelé le groupe de Klein),  $Z_2$  est le groupe cyclique  $\mathbb{Z}_2$  d'ordre 2, et  $\langle e \rangle$  est le sous-groupe trivial dont le seul élément est la permutation identité, élément unité de  $\mathcal{S}_4$ .

Ordre	Générateurs	$N_c$	Nom
24	$\langle (1, 2), (1, 2, 3, 4) \rangle$	1	$\mathcal{S}_4$
12	Les 4 3-cycles	1	$A_4$
8	$\langle (1, 2, 3, 4), (1, 3) \rangle$	3	$D_8$
6	$\langle (1, 2), (1, 2, 3) \rangle$	4	$S_3$
4	$\langle (1, 2, 3, 4) \rangle$	3	$Z_4$
4	$\langle (1, 3), (2, 4) \rangle$	3	$V'_4$
4	$\langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$	1	$V_4$
3	$\langle (1, 2, 3) \rangle$	4	$Z_3$
2	$\langle (1, 3)(2, 4) \rangle$	3	$Z'_2$
2	$\langle (1, 2) \rangle$	6	$Z_2$
1	$\langle e \rangle$	1	$I$

TABLE 1 – Les 30 sous-groupes de  $\mathcal{S}_4$ .

## 2.2 Les ensembles de Givens

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  désigne le tore de dimension 1 et pour  $K \geq 2$ , on note  $\mathbb{T}^K$  le tore de dimension  $K$ .

Pour  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  avec  $i \neq j$  et  $t \in \mathbb{T}$ , on note  $\mathbf{R}_{i,j}(t)$  la matrice, dite *matrice de rotation*

d'indices  $i, j$  et d'angle  $t$  (cf. [8]), définie par

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{i,i} &= [\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{j,j} = \cos t, \\ [\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{j,i} &= -[\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{i,j} = \sin t, \\ [\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{k,k} &= 1, \quad 1 \leq k \leq N \text{ avec } k \neq i, k \neq j, \\ [\mathbf{R}_{i,j}(t)]_{r,c} &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$SO(N, \mathbb{R})$ , noté simplement  $SO(N)$  dans toute la suite, désigne l'ensemble des matrices réelles orthogonales  $N \times N$ , de déterminant 1 (les matrices  $N \times N$  orthogonales directes) et on peut vérifier facilement que  $\mathbf{R}_{i,j}(t) \in SO(N)$ .

Pour  $K \geq 1$  et une suite de  $K$  couples d'indices  $(i_k, j_k)$ ,  $1 \leq k \leq K$  avec  $1 \leq i_k < j_k \leq N$ , l'application  $\phi$  de  $\mathbb{T}^K$  dans  $SO(N)$  définie par

$$\phi(t_1, t_2, \dots, t_K) = \mathbf{R}_{i_1, j_1}(t_1) \mathbf{R}_{i_2, j_2}(t_2) \dots \mathbf{R}_{i_K, j_K}(t_K), \tag{2.2}$$

est appelée l'*application de Givens* associée à la suite  $(i_k, j_k)$ ,  $1 \leq k \leq K$  et  $K$  est appelé sa *longueur*.

Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux applications de Givens de longueurs respectives  $K$  et  $L$ , le produit  $\phi_1 \phi_2$ , défini par  $(\phi_1 \phi_2)(t_1, t_2, \dots, t_{K+L}) = \phi_1(t_1, t_2, \dots, t_K) \phi_2(t_{K+1}, t_{K+2}, \dots, t_{K+L})$ , est une application de Givens de longueur  $K + L$ .

Pour  $0 \leq i, j < N$  avec  $i \neq j$ , l'application  $r_{i,j}$  de  $\mathbb{T}$  dans  $SO(N)$ , définie par  $r_{i,j}(t) = \mathbf{R}_{i,j}(t)$ , est une application de Givens de longueur 1 et l'on note  $R_{i,j}$  le sous-ensemble  $r_{i,j}(\mathbb{T})$  de  $SO(N)$  :

$$R_{i,j} = \{\mathbf{R}_{i,j}(t), t \in \mathbb{T}\}.$$

Une application de Givens  $\phi$  de longueur  $K$ , définie par la suite de couples d'indices  $(i_k, j_k)$ ,  $1 \leq k \leq K$ , peut donc être notée

$$\phi = r_{i_1, j_1} r_{i_2, j_2} \dots r_{i_K, j_K}. \tag{2.3}$$

En notant  $\Sigma_N = \{r_{i,j}, 1 \leq i < j \leq N\}$ , l'ensemble des applications de Givens est donc identique au monoïde libre  $\Sigma_N^*$  engendré par  $\Sigma_N$ , c'est-à-dire à l'ensemble des mots que l'on peut former avec l'alphabet  $\Sigma_N$ . Une application de Givens de longueur  $K$  est un mot de longueur  $K$  et le produit de deux applications de Givens correspond à la concaténation des mots.

Pour deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $SO(N)$ , on note  $AB$  l'ensemble des produits  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  pour  $\mathbf{A} \in A$  et  $\mathbf{B} \in B$ . De la sorte si  $\phi = r_{i_1, j_1} r_{i_2, j_2} \dots r_{i_K, j_K}$ , alors

$$\phi(\mathbb{T}^K) = R_{i_1, j_1} R_{i_2, j_2} \dots R_{i_K, j_K}. \tag{2.4}$$

On appelle *ensemble de Givens*  $G$  un sous-ensemble de  $SO(N)$  qui est égal à un ensemble  $\phi(\mathbb{T}^K)$  pour une application de Givens  $\phi$ , qui donne ainsi une représentation paramétrique de  $G$ . Deux applications de Givens  $\phi_1 : \mathbb{T}^{K_1} \rightarrow SO(N)$  et  $\phi_2 : \mathbb{T}^{K_2} \rightarrow SO(N)$  sont dites *équivalentes* si elles définissent le même ensemble de Givens, c'est-à-dire si  $\phi_1(\mathbb{T}^{K_1}) = \phi_2(\mathbb{T}^{K_2})$ , sans que nécessairement  $K_1 = K_2$ .

On dira qu'un ensemble de la forme  $R_{i,j}$  est un ensemble de Givens *élémentaire*.

Pour une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ , il est facile de vérifier que pour tout couple  $(i, j)$  avec  $1 \leq i, j \leq N$ ,  $i \neq j$ ,  $t \in \mathbb{T}$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ ,  $\mathbf{\Pi}_\sigma \mathbf{R}_{i,j}(t) \mathbf{\Pi}_\sigma^{-1} = \mathbf{R}_{\sigma(i), \sigma(j)}(t)$ .

Par conséquent l'image d'un ensemble de Givens  $G$  défini par (2.4) par l'application, notée aussi  $\sigma$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{\Pi}_\sigma \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_\sigma^{-1}$  est aussi un ensemble de Givens, noté  $\sigma G$ , tel que

$$\sigma G = R_{\sigma(i_1), \sigma(j_1)} R_{\sigma(i_2), \sigma(j_2)} \cdots R_{\sigma(i_K), \sigma(j_K)}. \quad (2.5)$$

L'action d'une permutation correspond ainsi sur les matrices à une permutation simultanée des lignes et des colonnes.

À une permutation paire  $\sigma \in \mathcal{S}_N$ , on peut aussi associer l'action à droite sur  $SO(4)$  :  $\pi_\sigma \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_\sigma^{-1}$ , c'est-à-dire effectuer seulement une permutation paire des colonnes, mais cette application ne conserve pas nécessairement les ensembles de Givens.

Pour une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_4$  par exemple, notée  $\sigma_{4321}$ ,  $\pi_\sigma$  sera notée plus simplement  $\pi_{4321}$ .

Soit  $\phi : \mathbb{T}^K \rightarrow SO(N)$  une application de Givens. Pour  $t = (t_1, t_2, \dots, t_K) \in \mathbb{T}^K$ , les  $N^2$  coefficients de la matrice  $\phi(t)$  sont des polynômes en les  $\cos t_k$ ,  $\sin t_k$ ,  $1 \leq k \leq K$  et il en est de même des coefficients de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_\phi(t)$  de  $\phi$  de dimensions  $N^2 \times K$ . Le théorème suivant est démontré dans [14] (théorème et définition 3.6).

**Théorème 2.1.** (i) *Le rang de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_\phi(t)$  atteint son maximum, noté  $\dim(\phi)$  et appelé la dimension de  $\phi$ , sur un sous-ensemble ouvert dense de  $\mathbb{T}^K$  dont le complémentaire est de mesure nulle pour la mesure uniforme sur  $\mathbb{T}^K$ .*

(ii) *Si  $G$  est un ensemble de Givens, toutes les applications de Givens  $\phi : \mathbb{T}^K \rightarrow SO(N)$  telles que  $G = \phi(\mathbb{T}^K)$  ont même dimension, qui est notée  $\dim(G)$  et est appelée la dimension de  $G$ .*

Si  $\phi : \mathbb{T}^K \rightarrow SO(N)$  est une application de Givens, le rang de  $\mathbf{J}_\phi(t)$  est évidemment inférieur ou égal à  $K$  pour tout  $t \in \mathbb{T}^K$ . S'il existe donc une valeur particulière  $t \in \mathbb{T}^K$  telle que le rang de  $\mathbf{J}_\phi(t)$  est égal à  $K$ , c'est que  $\dim(G) = K$  où  $G = \phi(\mathbb{T}^K)$ .

### 2.3 Les monoïdes de Givens

Le produit de deux ensembles de Givens est encore un ensemble de Givens.

On désigne alors par  $\mathcal{M}_N$  l'ensemble des ensembles de Givens de  $SO(N)$  qui muni du produit est alors un monoïde multiplicatif, l'élément neutre étant  $I_N = \{\mathbf{I}_N\}$ , le sous-ensemble de  $SO(N)$  ayant comme unique élément la matrice identité  $\mathbf{I}_N$  de dimensions  $N \times N$ . On dit que  $\mathcal{M}_N$  est le *monoïde de Givens* d'ordre  $N$ .

Si  $S$  est l'ensemble des ensembles de Givens élémentaires

$$S = \{R_{i,j}, 0 \leq i < j < N\}, \quad (2.6)$$

alors  $S$  est un système de générateurs de  $\mathcal{M}_N$ .

Dans toute la suite, on suppose que l'écriture d'un ensemble  $R_{i,j}$  sous-entend que  $i < j$  puisque d'après la définition  $R_{i,j} = R_{j,i}$ . Un élément de  $\mathcal{M}_N$  est donc un mot sur l'alphabet  $S$ .

Il existe également des relations au sein de  $\mathcal{M}_N$ , au premier rang desquelles  $R_{i,j} R_{i,j} = R_{i,j}$  ou  $R_{i,j}^2 = R_{i,j}$  pour  $i \neq j$  quelconque, et  $R_{i,j} R_{k,l} = R_{k,l} R_{i,j}$  si  $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$ .

Le cas  $N = 3$  est particulièrement simple. Nous énonçons ici sans démonstration que le monoïde  $\mathcal{M}_3$  est composé de 11 éléments répartis en quatre classes d'équivalence pour l'action par conjugaison de  $\mathcal{S}_3$  :

1.  $\{I_3\}$ ,
2.  $R_{1,2}$ ,  $R_{1,3}$ ,  $R_{2,3}$  de dimension 1 avec  $R_{1,3} = \sigma_{132} R_{1,2}$  et  $R_{2,3} = \sigma_{321} R_{1,2}$ ,

3.  $R_{1,2}R_{1,3}$ ,  $R_{1,2}R_{2,3}$ ,  $R_{1,3}R_{1,2}$ ,  $R_{1,3}R_{2,3}$ ,  $R_{2,3}R_{1,2}$ ,  $R_{2,3}R_{1,3}$ , de dimension 2 et qui se correspondent également par conjugaison,
4.  $SO(3)$  qui peut s'écrire comme n'importe quel produit de trois ensembles de rotations élémentaires dont deux consécutifs ne sont pas égaux.

### 3 Détermination numérique de $\mathcal{M}_4$

Dans ce paragraphe nous présentons un algorithme donnant la construction, étape par étape, de l'ensemble des classes d'équivalence des éléments du monoïde  $\mathcal{M}_4$ , chacune étant représentée par son élément minimal. Cet algorithme est mis en oeuvre à l'aide d'une fonction testant l'égalité de deux ensembles de Givens de façon numérique.

#### 3.1 Égalité numérique de deux ensembles de Givens

Plus précisément, considérons deux ensembles de Givens  $\phi_1 : \mathbb{T}^K \rightarrow SO(4)$  et  $\phi_2 : \mathbb{T}^L \rightarrow SO(4)$ . L'inclusion  $\phi_1(\mathbb{T}^K) \subset \phi_2(\mathbb{T}^L)$  est vérifiée si

$$\max_{t_1 \in \mathbb{T}^K} \min_{t_2 \in \mathbb{T}^L} \|\phi_1(t_1), \phi_2(t_2)\|^2 = 0, \quad (3.1)$$

où  $\|\phi_1(t_1), \phi_2(t_2)\|^2$  est le carré de la distance euclidienne de  $\phi_1(t_1)$  et  $\phi_2(t_2)$  dans  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

C'est-à-dire si pour tout  $t_1 \in \mathbb{T}^K$ , il existe  $t_2 \in \mathbb{T}^L$  avec  $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ .

Ce critère (3.1) est réalisé numériquement de la façon suivante :

1.  $N_1$  points sont choisis au hasard dans  $\mathbb{T}^K$  pour la mesure uniforme.
2. Pour chacun de ces  $N_1$  points  $t_1 \in \mathbb{T}^K$ , on cherche le minimum de  $d(\phi_1(t_1), \phi_2(t_2))$  avec un logiciel d'optimisation globale, ici CFSQP (C Code for Feasible Sequential Quadratic Programming) [10], en effectuant  $N_2$  tentatives d'initialisation au hasard dans  $\mathbb{T}^L$  pour la mesure uniforme.
3. Si le minimum obtenu est inférieur à un certain seuil  $\varepsilon > 0$ , on considère que ce minimum est nul.

Le résultat dépend évidemment des paramètres  $N_1, N_2$  et  $\varepsilon$  mais aussi des paramètres propres au programme CFSQP tels qu'ils ont été choisis. On peut alors remarquer qu'une inclusion vraie peut ne pas être validée numériquement si CFSQP ne détecte pas le minimum global parce que le nombre d'essais  $N_2$  est insuffisant ou que  $\varepsilon$  est trop petit, et inversement qu'un résultat faux est validé si  $N_1$  est trop petit ou que  $\varepsilon$  est trop grand.

Cependant, à  $\varepsilon$  fixé, on remarque que les résultats sont stables si  $N_1$  et  $N_2$  sont choisis suffisamment grands.

Enfin l'égalité numérique de  $\phi_1(\mathbb{T}^K)$  et  $\phi_2(\mathbb{T}^L)$  est obtenue en testant les deux inclusions  $\phi_1(\mathbb{T}^K) \subset \phi_2(\mathbb{T}^L)$  et  $\phi_2(\mathbb{T}^L) \subset \phi_1(\mathbb{T}^K)$ .

**Notation 3.1.** *L'égalité numérique de deux ensembles de Givens  $G_1 = \phi_1(\mathbb{T}^K)$  et  $G_2 = \phi_2(\mathbb{T}^L)$  est notée par  $G_1 \stackrel{N}{=} G_2$ . Cette égalité est évidemment acquise si  $K = L$  et  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont égales c'est-à-dire si  $G_1$  et  $G_2$  ont la même écriture.*

#### 3.2 L'algorithme principal

**Notation 3.2.** *On note  $S_K$  l'ensemble des ensembles de Givens produits de  $K$  ensembles de rotations  $R_{i,j}$  et de dimension  $K$ . À chaque élément de  $S_k$  on associe l'élément minimal de son orbite pour l'action par conjugaison du groupe symétrique  $\mathcal{S}_4$  et l'on note  $S_K^{(0)}$  la liste ordonnée de ces éléments minimaux.*

Les ensembles  $S_K^{(0)}$  pour  $1 \leq K \leq 6$  sont alors construits de proche en proche par l'algorithme suivant.

On pose  $S_1^{(0)} = \{R_{1,2}\}$  puis pour  $K$  variant de 2 à 6, on effectue les opérations suivantes :

- (1)  $S_K^{(0)}$  est initialisé comme une liste vide.
- (2) Pour  $G_1$  parcourant  $S_{K-1}^{(0)}$  et  $R_{i,j}$  parcourant la liste ordonnée des ensembles de rotations, on construit l'ensemble de Givens  $G_2 = G_1 R_{i,j}$ . Si  $G_2$  est de dimension  $K$  et si aucun des conjugués de  $G_2$  n'appartient pas déjà à  $S_K^{(0)}$ , alors  $G_2$  est ajouté à la fin de la liste  $S_K^{(0)}$ .

Remarquons que lors de la double boucle (2) les  $G_2$  apparaissent de façon croissante ainsi que les permutations parcourant  $\mathcal{S}_4$ , et donc la liste  $S_K^{(0)}$  ainsi construite est ordonnée. Ensuite, pour chaque élément  $G \in S_K^{(0)}$ , on détermine son groupe de stabilité pour l'action par conjugaison de  $\mathcal{S}_4$ . Les résultats du programme construit selon cet algorithme et appelé avec les paramètres  $N_1 = 40$ ,  $N_2 = 40$  et  $\varepsilon = 10^{-5}$  sont donnés dans les tables 2 à 6 (elles sont engendrées par le programme) où pour chaque élément minimal est indiqué le nom qui lui est attribué, son expression comme ensemble de Givens, le code de la table 1 indiquant quel est son groupe de stabilité et l'entier  $N_o$  qui dénote le nombre d'éléments de l'orbite associée.

Enfin la table 7 établit le bilan des résultats donnés dans les tables 2 à 6 et donne pour chaque  $K$ ,  $0 \leq K \leq 6$  le nombre de classes de conjugaison  $N_c$  dans chaque  $S_K$  et le nombre d'éléments de  $S_K$ . On obtient alors la conjecture suivante.

**Conjecture 3.3.** *Le monoïde  $\mathcal{M}_4$  possède 618 éléments et sa description est donnée par les tables 2 à 7.*

Lors de l'exécution du programme, toutes les réductions de dimension et toutes les égalités numériques  $G_1 \stackrel{N}{=} G_2$  sont enregistrées dans des fichiers. Il suffit alors de démontrer que ces égalités numériques sont exactes et que tous les éléments de  $S_K$ ,  $1 \leq K \leq 6$  sont distincts pour démontrer rigoureusement les résultats du programme. Il est également nécessaire de démontrer que tous les ensembles de Givens à 7 rotations, qui sont nécessairement de dimension inférieure ou égale à 6, sont égaux à des ensembles de Givens à 6 rotations ou moins, ce qui ne semble pas évident a priori.

Name	Givens	Stab.	$N_o$
$G_{2,1}$	$R_{1,2}R_{1,3}$	$I$	24
$G_{2,2}$	$R_{1,2}R_{3,4}$	$D_4$	3
		Total	27

TABLE 2 – Représentants minimaux des classes de conjugaison de  $S_2$ .

Name	Givens	Stab.	$N_o$
$G_{3,1}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,2}$	$\mathcal{S}_3$	4
$G_{3,2}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}$	$I$	24
$G_{3,3}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}$	$Z'_2$	12
$G_{3,4}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}$	$I$	24
$G_{3,5}$	$R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$	$Z'_2$	12
		Total	76

TABLE 3 – Représentants minimaux des classes de conjugaison de  $S_3$ .



Name	Givens	Stab.	$N_o$
$G_{4,1}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,2}R_{1,4}$	$Z'_2$	12
$G_{4,2}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,2}$	$Z_2$	12
$G_{4,3}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,3}$	$Z'_2$	12
$G_{4,4}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}$	$I$	24
$G_{4,5}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,2}$	$V'_4$	6
$G_{4,6}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,4}$	$I$	24
$G_{4,7}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{3,4}$	$Z'_2$	12
$G_{4,8}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,3}$	$I$	24
$G_{4,9}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,4}$	$I$	24
$G_{4,10}$	$R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}R_{2,4}$	$V'_4$	6
Total			156

TABLE 4 – Représentants minimaux des classes de conjugaison de  $S_4$ .

Name	Givens	Stab.	$N_o$
$G_{5,1}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,2}R_{1,4}R_{1,2}$	$Z_2$	12
$G_{5,2}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,2}R_{1,3}$	$I$	24
$G_{5,3}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,2}R_{3,4}$	$D_4$	3
$G_{5,4}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,3}R_{2,3}$	$Z'_2$	12
$G_{5,5}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{2,3}$	$I$	24
$G_{5,6}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{3,4}$	$I$	24
$G_{5,7}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,2}R_{3,4}$	$V'_4$	6
$G_{5,8}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,4}R_{2,3}$	$Z'_2$	12
$G_{5,9}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,3}R_{1,2}$	$Z_2$	12
$G_{5,10}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,4}R_{1,2}$	$Z_2$	12
$G_{5,11}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,4}R_{1,4}$	$I$	24
$G_{5,12}$	$R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,2}$	$V'_4$	6
$G_{5,13}$	$R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,4}$	$Z'_2$	12
Total			183

TABLE 5 – Représentants minimaux des classes de conjugaison de  $S_5$ .

Name	Givens	Stab.	$N_o$
$G_{6,1}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,2}R_{1,4}R_{1,2}R_{1,3}$	$S_4$	1
$G_{6,2}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}$	$I$	24
$G_{6,3}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}$	$I$	24
$G_{6,4}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{2,3}R_{1,2}$	$Z_2$	12
$G_{6,5}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{2,3}R_{1,3}$	$I$	24
$G_{6,6}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{3,4}R_{1,3}$	$I$	24
$G_{6,7}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$	$I$	24
$G_{6,8}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,4}R_{2,3}R_{1,2}$	$V'_4$	6
$G_{6,9}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}R_{1,4}R_{2,3}R_{3,4}$	$V'_4$	6
$G_{6,10}$	$R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}R_{2,3}R_{1,2}R_{1,4}$	$I$	24
Total			169

TABLE 6 – Représentants minimaux des classes de conjugaison de  $S_6$ .

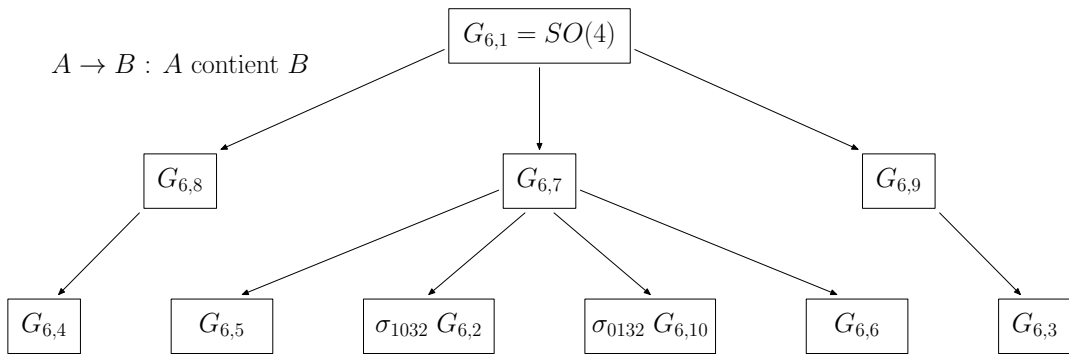
$K$	$N_c$	$\text{Card}(S_K)$
0	1	1
1	1	6
2	2	27
3	5	76
4	10	156
5	13	183
6	10	169
7	0	0
$\text{Card}(\mathcal{M}_4)$		618

TABLE 7 – Structure de  $\mathcal{M}_4$ .

### 3.3 Inclusions

**Conjecture 3.4.** *Pour chaque  $1 \leq K \leq 5$ , il n'y a aucune inclusion entre éléments de  $S_K$ .*

*Les inclusions indiquées dans la figure 1 entre les ensembles de Givens de  $S_6$  sont vérifiées de façon numérique.*

FIGURE 1 – Inclusions des ensembles de  $S_6^{(0)}$ .

## 4 Détermination algébrique de $\mathcal{M}_4$

Les résultats obtenus de façon numérique dans le paragraphe précédent sont maintenant démontrés rigoureusement dans ce paragraphe. La structure de l'algorithme principal est exactement la même mais la fonction d'égalité numérique est remplacée par une fonction utilisant les propriétés algébriques des sous-ensembles  $\phi(\mathbb{T}^K)$  de  $SO(4)$ . Ces propriétés s'expriment avec les coordonnées  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , et non pas à l'aide des paramètres angulaires d'une représentation de Givens  $\phi : \mathbb{T}^K \rightarrow SO(4)$  particulière.

Un outil essentiel dans ce paragraphe est une *base standard* d'un idéal  $I(\mathcal{P})$  de  $\mathbb{R}[a]$  engendré par un sous-ensemble fini  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[a]$ , ici  $a = \{a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 4\}$ , car elle donne une façon de montrer que deux polynômes de  $\mathbb{R}[a]$  sont égaux modulo  $I(\mathcal{P})$ .

Les références bibliographiques sur les bases standards sont multiples, par exemple [4] ou [7]. Une

bonne référence est également la thèse d'habilitation de Jean-Charles Faugère [5] qui a développé les algorithmes *FGLM* (Faugère-Gianni-Lazard-Mora), *F4* et *F5*, réputés les plus rapides pour le calcul des bases standards et qui ont été implémentés dans les systèmes de calcul formel Maple et SAGE, et très probablement dans d'autres.

#### 4.1 Base standard de $SO(4)$

$SO(4)$  est un sous-ensemble algébrique réel de  $\mathbb{R}[a]$  où  $a = \{a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq 4\}$ . En effet  $\mathbf{A}$  est dans  $SO(4)$  si et seulement si les équations polynomiales  $\mathcal{P}_{SO(4)}$  définissant  $SO(4)$  sont vérifiées par les coefficients de  $\mathbf{A}$ . Ces équations résultent de l'égalité  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_4$  où  $\mathbf{I}_4$  est la matrice  $4 \times 4$  identité, et  $\text{Det}(\mathbf{A}) = 1$ .

Les polynômes de  $\mathcal{P}_{SO(4)}$  sont les polynômes générateurs d'un idéal, noté  $I_{SO(4)}$ , dans  $\mathbb{R}[a]$ , mais ce système de générateurs ne permet pas de façon simple de vérifier qu'un polynôme  $p$  de  $\mathbb{R}[a]$  appartient à  $I_{SO(4)}$ , c'est-à-dire s'annule sur  $SO(4)$ .

Étant donné un ordre sur les monômes de  $\mathbb{R}[a]$ , compatible avec le produit des monômes (ordre admissible), il est alors possible de construire un autre système fini de générateurs  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)})$  de  $I(\mathcal{P}_{SO(4)})$ , appelé *base standard* de  $I(\mathcal{P}_{SO(4)})$ , qui a les propriétés suivantes :

- $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)})$  est déterminée de façon unique,
- Tout polynôme  $p \in \mathbb{R}[a]$  admet une *forme normale réduite* par  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)})$ , unique, notée  $N(p)$ , qui est la même pour tous les éléments égaux à  $p$  modulo  $I(\mathcal{P}_{SO(4)})$ ,
- Un polynôme  $p \in \mathbb{R}[a]$  est dans  $I(\mathcal{P}_{SO(4)})$  si et seulement si sa forme normale réduite  $N(p)$  est nulle.

Il y a autant de façon de construire une base standard pour tout autre idéal  $I$  de  $\mathbb{R}[a]$  que de choix possibles d'un ordre admissible sur les monômes de  $\mathbb{R}[a]$ , mais l'ordre qui correspond en général à la complexité minimale du calcul de la base standard associée est l'ordre *degré total + lexicographique inverse* pour le choix d'un ordre total sur les variables ([7, page 432]).

Le choix de l'ordre sur les variables est ici le suivant

$$a_{i,j} < a_{k,l} \text{ si } \begin{cases} j < l \\ j = l \text{ et } i < k, \end{cases} \quad (4.1)$$

et la base standard  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)})$ , notée plus simplement  $\mathcal{B}$  dans la suite, possède alors 55 éléments.

#### 4.2 Ensembles de Givens algébriques réels ou semi-algébriques

Si un ensemble de Givens  $G$  dans  $SO(4)$  est réel algébrique, il est l'ensemble des matrices  $\mathbf{A}$  dont les coordonnées  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$  vérifient les équations algébriques  $\mathcal{P}_{SO(4)}$  caractérisant  $SO(4)$  auxquelles on doit ajouter des équations de la forme  $p(a) = 0$ ,  $p \in \mathcal{P}_G$  où  $\mathcal{P}_G$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}[a]$ . Ces polynômes supplémentaires sont appelés dans la suite des *polynômes annulateurs* de  $G$ .

L'idéal caractérisant  $G$  comme sous-ensemble algébrique  $G$  de  $SO(4)$  est alors  $I(\mathcal{P}_{SO(4)} \cup \mathcal{P}_G)$  pour lequel on peut calculer la base standard  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)} \cup \mathcal{P}_G)$  pour l'ordre degré total + lexicographique inverse associé à l'ordre (4.1) sur les variables  $a_{i,j}$ .

Deux sous-ensembles algébriques  $G$  et  $G'$  de  $SO(4)$ , définis par des ensembles de polynômes annulateurs  $\mathcal{P}_G$  et  $\mathcal{P}_{G'}$ , sont égaux si et seulement si

$$\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)} \cup \mathcal{P}_G) = \mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)} \cup \mathcal{P}_{G'}). \quad (4.2)$$

### 4.3 Calcul de $S_K^{(0)}$ , $1 \leq K \leq 3$

Pour  $K = 1$ , les ensembles de Givens de  $S_1$  sont les ensembles  $R_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$  obtenus par permutation simultanée des indices de lignes et de colonnes à partir du seul élément  $R_{1,2}$  de  $S_1^{(0)}$ . Comme

$$\mathbf{R}_{1,2}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

et un ensemble de polynômes annulateurs de  $R_{1,2}$  est donc

$$\{a_{1,1} - a_{2,2}, a_{1,2} + a_{2,1}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{3,3} - 1, a_{4,4} - 1, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}\}.$$

Cependant les polynômes  $a_{3,1}, a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}$  peuvent être retirés de l'ensemble. En effet la nullité de  $a_{4,3}$  résulte de l'orthogonalité des vecteurs colonnes d'indices 3 et 4 de la matrice  $\mathbf{R}_{1,2}(t)$ , celles de  $a_{3,1}$  et  $a_{4,1}$  (resp.  $a_{3,2}$  et  $a_{4,2}$ ) de l'orthogonalité du vecteur colonne d'indice 1 (resp. 2) avec les vecteurs colonnes d'indices 3 et 4.

Pour  $K = 2$ , l'ensemble  $S_2$  est constitué des ensembles de Givens  $R_{i,j}R_{k,l}$  avec  $\{i,j\} \neq \{k,l\}$ . Lorsque  $\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset$ ,  $R_{i,j}R_{k,l}$  est obtenu par permutation simultanée des indices de lignes et de colonnes à partir de  $R_{1,2}R_{1,3}$  et sinon à partir de  $R_{1,2}R_{3,4}$ . On a donc  $S_2^{(0)} = \{R_{1,2}R_{1,3}, R_{1,2}R_{3,4}\}$ .

Un ensemble de polynômes annulateurs de  $G_{2,1} = R_{1,2}R_{1,3}$  est

$$\mathcal{P}_{G_{2,1}} = \{a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}, a_{4,4} - 1, a_{3,2}\}.$$

Une matrice de la forme  $\mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_2)$  annule bien ces polynômes. Réciproquement considérons une matrice  $\mathbf{A} \in SO(4)$  de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Comme le vecteur ligne d'indice 3 de  $\mathbf{A}$  est unitaire, on a  $a_{3,1}^2 + a_{3,3}^2 = 1$  et donc il existe  $t_2 \in \mathbb{T}$  tel que  $a_{3,1} = \sin t_2$  et  $\cos t_2 = a_{3,3}$ . Le calcul donne alors

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{1,3}(-t_2) = \begin{bmatrix} a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1} & a_{1,2} & a_{1,1}a_{3,1} + a_{1,3}a_{3,3} & 0 \\ a_{2,1}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,1} & a_{2,2} & a_{2,1}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

matrice qui est dans  $SO(4)$ . Comme la ligne d'indice 1 (resp. d'indice 2) de  $\mathbf{B}$  est orthogonale à la ligne d'indice 3, on a nécessairement  $a_{1,1}a_{3,1} + a_{1,3}a_{3,3} = 0$  (resp.  $a_{2,1}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,3} = 0$ ) et la matrice  $\mathbf{B}$  annule les polynômes annulateurs de  $R_{1,2}$ . Il existe donc  $t_1 \in \mathbb{T}$  tel que  $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)$  et  $\mathbf{A} = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_2)$ .

Puisque

$$\mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{3,4}(t_2) = \begin{bmatrix} \cos t_1 & -\sin t_1 & 0 & 0 \\ \sin t_1 & \cos t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t_2 & -\sin t_2 \\ 0 & 0 & \sin t_2 & \cos t_2 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

il est évident qu'un ensemble de polynômes annulateurs pour  $G_{2,2} = R_{1,2}R_{3,4}$  est

$$\mathcal{P}_{G_{2,2}} = \{a_{1,1} - a_{2,2}, a_{2,1} + a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{3,3} - a_{4,4}, a_{3,4} + a_{4,3}\}. \quad (4.7)$$

Pour  $K = 3$ , deux ensembles de cas sont à considérer :  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{i,j}$  et  $G = R_{1,2}R_{2,4}R_{i,j}$  avec  $1 \leq i < j \leq 4$ .

**Premier cas :**  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{i,j}$ .

1.1.  $i = 1, j = 2$ .

$G = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,3}$  est le produit de trois ensembles de rotations non commutants de rotations portant sur les indices  $\{1, 2, 3\}$ . Les matrices de  $G$  sont donc les matrices  $\mathbf{A}$  telles que la sous-matrice  $3 \times 3$  dont les éléments sont les  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$  est une matrice de  $SO(3)$  quelconque. On note donc  $G = G_{3,1}$  qui admet comme ensemble de polynômes annulateurs

$$\mathcal{P}_{G_{3,1}} = \{a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{4,4} - 1\}.$$

1.2.  $i = 1, j = 3$ .

Comme  $R_{1,3}R_{1,3} = R_{1,3}$ , on a  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,3} = R_{1,2}R_{1,3} = G_{2,1}$ .

1.3.  $i = 1, j = 4$ .

Toutes les matrices  $\mathbf{A}$  de  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}$  sont dans  $SO(4)$  et sont de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Réciproquement si une matrice  $\mathbf{A}$  est de la forme (4.8), puisque  $a_{4,1}^2 + a_{4,4}^2 = 1$ , il existe  $t_3$  avec  $a_{4,1} = -\sin t_3$  et  $a_{4,4} = \cos t_3$ . La matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{1,4}(-t_3)$  vérifie  $b_{1,4} = 0$  et  $b_{4,4} = 1$ . Puisque  $\mathbf{B} \in SO(4)$ , l'orthogonalité des lignes d'indices 4 et 1 (resp. 2) implique que  $b_{2,4} = 0$  (resp.  $b_{3,4} = 0$ ). Les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}$  annulent alors les polynômes de  $\mathcal{P}_{G_{2,1}}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $t_1 \in \mathbb{T}$  et  $t_2 \in \mathbb{T}$  tels que  $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_2)$ . Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_2)\mathbf{R}_{1,4}(t_3),$$

ce qui prouve que  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}$ , noté  $G_{3,2}$ , est un sous-ensemble algébrique de  $SO(4)$  avec comme ensemble de polynômes annulateurs

$$\mathcal{P}_{G_{3,2}} = \{a_{3,2}, a_{4,2}, a_{4,3}\}.$$

1.4.  $i = 2, j = 3$ . Comme dans le cas 1,1,  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{2,3}$  est le produit de trois ensembles non commutants de rotations portant sur les indices  $\{1, 2, 3\}$ , et donc  $G = G_{3,1}$ .

1.5.  $i = 2, j = 4$ .

Toutes les matrices  $\mathbf{A}$  de  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}$  sont dans  $SO(4)$  et sont de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & a_{4,2} & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Réciproquement, en procédant comme dans le cas 1.3, si une matrice  $\mathbf{A} \in SO(4)$  est de cette forme, il existe  $t_3 \in \mathbb{T}$  tel que  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{2,4}(-t_3) \in G_{2,1}$ , ce qui démontre que  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{2,4}$ , noté  $G_{3,3}$ , appartient à  $S_3^{(0)}$ , avec comme polynômes annulateurs

$$\mathcal{P}_{G_{3,3}} = \{a_{3,2}, a_{3,4}, a_{4,1}, a_{4,3}\}.$$

1.6.  $i = 3, j = 4$ .

La démonstration est identique à celle du cas 1.3 pour montrer que  $G = R_{1,2}R_{1,3}R_{3,4}$  est l'ensemble, noté  $G_{3,4}$ , des matrices  $\mathbf{A}$  de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

avec

$$\mathcal{P}_{G_{3,4}} = \{a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}\}.$$

**Deuxième cas :**  $G = R_{1,2}R_{3,4}R_{i,j}$ .

2.1.  $i = 1, j = 2$ .

Puisque  $R_{3,4}R_{1,2} = R_{1,2}R_{3,4}$  et  $R_{1,2}R_{1,2} = R_{1,2}$ , on a

$$G = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,2} = R_{1,2}R_{1,2}R_{3,4} = R_{1,2}R_{3,4} = G_{2,2}.$$

2.2.  $i = 1, j = 3$ .

Toutes les matrices  $\mathbf{A}$  de  $G = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$  sont dans  $SO(4)$  et sont de la forme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Inversement si une matrice  $\mathbf{A}$  est de la forme (4.11), puisque  $a_{3,4}^2 + a_{4,4}^2 = 1$ , il existe  $t_2$  avec  $a_{3,4} = -\sin t_2$  et  $a_{4,4} = \cos t_2$ . La matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{3,4}(-t_2)\mathbf{A}$  vérifie  $b_{3,4} = 0$  et  $b_{4,4} = 1$ . Puisque  $\mathbf{B} \in SO(4)$ , l'orthogonalité des colonnes d'indices 4 et 1 (resp. 2) implique que  $b_{4,1} = 0$  (resp.  $b_{4,2} = 0$ ). Les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}$  annulent donc les polynômes de  $\mathcal{P}_{G_{2,1}}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $t_1 \in \mathbb{T}$  et  $t_3 \in \mathbb{T}$  tels que  $\mathbf{B} = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_3)$ . Donc

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{3,4}(t_2)\mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{1,3}(t_3) = \mathbf{R}_{1,2}(t_1)\mathbf{R}_{3,4}(t_2)\mathbf{R}_{1,3}(t_3),$$

ce qui prouve que  $G = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$  est un sous-ensemble algébrique de  $SO(4)$  avec comme ensemble de polynômes annulateurs  $\{a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,2}, a_{4,2}\}$ .

2.3.  $i = 1, j = 4$ .

On remarque que

$$\sigma_{1243}(R_{1,2}R_{3,4}R_{1,4}) = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3},$$

ce qui prouve que  $R_{1,2}R_{3,4}R_{1,4}$  est conjugué de  $R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$

2.4.  $i = 2, j = 3$ .

De même

$$\sigma_{2134}(R_{1,2}R_{3,4}R_{2,3}) = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3},$$

2.5.  $i = 2, j = 4$ .

De même

$$\sigma_{4321}(R_{1,2}R_{3,4}R_{2,4}) = R_{3,4}R_{1,2}R_{1,3} = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3},$$

2.6.  $i = 3, j = 4$ .

Puisque  $R_{3,4}R_{3,4} = R_{3,4}$ , on obtient  $G = R_{1,2}R_{3,4}R_{3,4} = R_{1,2}R_{3,4} = G_{2,2}$ .

On obtient donc un cinquième élément dans  $S_3^{(0)}$ ,  $G_{3,5} = R_{1,2}R_{3,4}R_{1,3}$  avec comme ensemble de polynômes annulateurs

$$\mathcal{P}_{G_{3,5}} = \{a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,2}, a_{4,2}\}. \quad (4.12)$$

La table 8 résume quels sont des polynômes annulateurs pour les éléments de  $S_K^{(0)}$ ,  $1 \leq K \leq 3$ .

$G_{1,1}$	$a_{1,1} - a_{2,2}, a_{1,2} + a_{2,1}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{3,3} - 1, a_{4,4} - 1$
$G_{2,1}$	$a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,2}, a_{3,4}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}, a_{4,4} - 1$
$G_{2,2}$	$a_{1,1} - a_{2,2}, a_{2,1} + a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}, a_{3,3} - a_{4,4}, a_{3,4} + a_{4,3}$
$G_{3,1}$	$a_{4,1}, a_{4,2}, a_{4,3}, a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4}, a_{4,4} - 1$
$G_{3,2}$	$a_{3,2}, a_{4,2}, a_{4,3}$
$G_{3,3}$	$a_{3,2}, a_{3,4}, a_{4,1}, a_{4,3}$
$G_{3,4}$	$a_{3,2}, a_{4,1}, a_{4,2}$
$G_{3,5}$	$a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,2}, a_{4,2}$

TABLE 8 – Polynômes annulateurs pour les éléments de  $S_K^{(0)}$ ,  $1 \leq K \leq 3$ .

#### 4.4 Calcul formel de $S_4^{(0)}$ et $S_5^{(0)}$

Au delà de  $K = 3$ , il devient quasiment impossible de mener les calculs à la main, aussi convient-il de mettre au point un programme de calcul formel pour les effectuer, pour lequel un algorithme est maintenant présenté.

Un ensemble de Givens  $G$  de  $S_K^{(0)}$  s'écrit sous la forme  $G = BR_{k,l}$ , avec  $1 \leq k < l \leq 4$  et où  $B \in S_{K-1}^{(0)}$ . Une matrice  $\mathbf{A}$  est alors dans  $G$  si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{B}R_{k,l}(t)$  avec  $\mathbf{B} \in S_{K-1}^{(0)}$  et  $t \in \mathbb{T}$ .

Ceci est équivalent à l'existence d'un angle  $t \in \mathbb{T}$  tel que  $\mathbf{B} = \mathbf{A}R_{k,l}(-t) \in S_{K-1}^{(0)}$ . En notant  $c = \cos t$  et  $s = \sin t$ , les éléments de  $\mathbf{B}$  sont alors donnés par

$$\mathbf{B}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \neq k, j \neq l, \\ a_{i,k}c + a_{i,l}s & \text{si } j = k, \\ -a_{i,k}s + a_{i,l}c & \text{si } j = l. \end{cases} \quad (4.13)$$

Si  $\mathbf{B}$  est dans un sous-ensemble algébrique  $G'$  de  $SO(4)$ , alors soit  $\mathcal{P}_{G'}$  un ensemble de polynômes annulateurs de  $G'$ . Il en résulte que  $\mathbf{B} \in G'$  si et seulement si les équations  $p(b) = 0, p \in \mathcal{P}_{G'}$ , où  $b = (b_{i,j})$  et où les  $b_{i,j} = \mathbf{B}_{i,j}$  sont donnés par (4.13), admettent une solution en  $c$  et  $s$  avec  $c^2 + s^2 = 1$ .

Si les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution en  $c$  et  $s$  s'expriment toutes sous la forme  $q(a) = 0, a = (a_{i,j})$  avec  $q \in \mathbb{R}[a]$  alors on obtient un système de polynômes annulateurs de  $G$ , qui est donc algébrique.

Si certaines conditions sont de la forme  $q(a_{i,j}) \geq 0, q \in \mathbb{R}[a]$ , alors  $G$  n'est pas un ensemble algébrique mais un ensemble semi-algébrique caractérisé par un ensemble d'équations et d'inéquations polynomiales sur les coordonnées  $a_{i,j}$ .

Les équations  $\mathcal{P}$  caractérisant le fait que  $\mathbf{A} \in SO(4)$  sont automatiquement vérifiées puisque si  $\mathbf{B} \in SO(4)$  alors  $\mathbf{A} = \mathbf{B}R_{k,l}(t) \in SO(4)$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

Dans le cas  $K = 4$  et  $K = 5$ , les équations en  $c$  et  $s$  de la forme  $q(a)(c^2 + s^2) = 0$  avec  $q \in \mathbb{R}[a]$  sont transformées en les équations équivalentes  $q(a) = 0$ .

On constate alors, pour  $K = 4$  et  $K = 5$ , que les équations sont de deux types : une équation de la forme  $q(a) = 0$  est directement intégrée dans l'ensemble des polynômes annulateurs de  $G$ , et sinon elle est linéaire en  $c$  et  $s$  de la forme  $p(a, c, s) = q_1(a)c + q_2(a)s = q_3(a)$  avec  $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}[a]$ ,  $q_1, q_2$  non tous deux nuls.

On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble de ces équations linéaires en  $c$  et  $s$ .

Deux cas se présentent alors

- soit il existe une équation dans  $\mathcal{L}$  avec  $q_3 \neq 0$ ,
- soit  $q_3 = 0$  pour toutes les équations de  $\mathcal{L}$ .

Le premier cas se présente uniquement pour les ensembles de Givens de la forme  $G_{3,1}R_{k,4}$  avec  $k = 1, 2, 3$ .

Pour  $k = 1$ , l'ensemble des équations obtenues pour  $G = G_{3,1}R_{1,4}$  est

$$(E_1) = \left\{ \begin{array}{l} a_{4,2} = 0, a_{4,3} = 0, \\ a_{1,4}c - a_{1,1}s = 0, \\ a_{2,4}c - a_{2,1}s = 0, \\ a_{3,4}c - a_{3,1}s = 0, \\ a_{4,1}c + a_{4,4}s = 0, \\ a_{4,4}c - a_{4,1}s = 1. \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

Si  $a_{4,2} = a_{4,3} = 0$ , alors  $a_{4,1}^2 + a_{4,4}^2 = 1$  et  $a_{4,1}, a_{4,4}$  ne sont pas tous les deux nuls. Si de plus les équations

$$(E_2) = \left\{ \begin{array}{l} a_{1,4}c - a_{1,1}s = 0, \\ a_{2,4}c - a_{2,1}s = 0, \\ a_{3,4}c - a_{3,1}s = 0, \\ a_{4,1}c + a_{4,4}s = 0, \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

admettent une solution en  $c$  et  $s$ , c'est-à-dire si  $(E_2)$  est de rang 1, alors le système  $(E_1)$  est équivalent au système

$$(E_3) = \left\{ \begin{array}{l} a_{4,2} = 0, a_{4,3} = 0, \\ a_{4,1}c + a_{4,4}s = 0, \\ a_{4,4}c - a_{4,1}s = 1. \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

qui admet une solution unique en  $c$  et  $s$  vérifiant  $c^2 + s^2 = 1$ .

Il en résulte que l'équation  $a_{4,4}c - a_{4,1}s = 1$  peut être retirée du système  $(E_1)$  des équations en  $c$  et  $s$  obtenues pour  $G = G_{3,1}R_{1,4}$ .

Il en est de même pour  $G_{3,1}R_{2,4}$  et  $G_{3,1}R_{3,4}$  dont il est facile de s'apercevoir par ailleurs qu'ils sont conjugués de  $G_{3,1}R_{1,4}$  avec

$$\sigma_{2134}(G_{3,1}R_{2,4}) = G_{3,1}R_{1,4}, \quad \sigma_{3214}(G_{3,1}R_{3,4}) = G_{3,1}R_{1,4}.$$

Pour  $K = 3$  et  $K = 4$ , on obtient donc toujours un système  $\mathcal{L}$  d'équations homogènes de degré 1 en  $c$  et  $s$ .

Si le nombre d'éléments de  $\mathcal{L}$  est inférieur ou égal à 1, alors aucun autre polynôme annulateur en  $a$  n'est ajouté car le système  $q_1(a)c + q_2(a)s = 0$ ,  $c^2 + s^2 = 1$  admet toujours au moins une solution en  $c$  et  $s$ .

Si le nombre des éléments de  $\mathcal{L}$  est supérieur ou égal à deux alors de chaque paire  $p_1(a, c, s) = q_{1,1}(a)c + q_{1,2}(a)s = 0$ ,  $p_2(a, c, s) = q_{2,1}(a)c + q_{2,2}(a)s = 0$ , on déduit les polynômes annulateurs



- Si  $q_{1,1}(a) = q_{2,2}(a)$  et  $q_{1,2}(a) = -q_{2,1}(a)$  ou si  $q_{1,1}(a) = -q_{2,2}(a)$  et  $q_{1,2}(a) = q_{2,1}(a)$ , alors  $q_{1,1}(a) = 0$  et  $q_{1,2}(a) = 0$ ,
- Sinon  $q_{1,1}(a)q_{2,2}(a) - q_{1,2}(a)q_{2,1}(a) = 0$ .

Lors du calcul progressif de  $S_K^{(0)}$  selon l'algorithme décrit dans le paragraphe 3, on peut alors tester l'égalité d'un ensemble de Givens de la forme  $\sigma(GR_{k,l})$  avec un ensemble de Givens  $G'$  déjà présent dans  $S_K^{(0)}$ . En effet si  $\mathcal{P}$  est un ensemble de polynômes annulateurs associé à  $GR_{k,l}$ , alors un ensemble de polynômes annulateurs de  $\sigma(GR_{k,l})$  est l'ensemble des polynômes  $\sigma\mathcal{P} = \{\sigma p, p \in \mathcal{P}\}$ , où  $\sigma p$  est le polynôme défini par  $(\sigma p)(a) = p(\sigma a)$ ,  $a = (a_{i,j})$ ,  $\sigma a = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})$ , et il suffit de tester l'égalité des bases standards associées à  $\sigma(GR_{k,l})$  et à  $G'$ .

Pour un élément  $G \in S_K^{(0)}$  d'ensemble de polynômes annulateurs  $\mathcal{P}_G$ , on peut de la même manière déterminer le sous-groupe stabilisateur  $\text{St}(G)$  de  $\mathcal{S}_4$  laissant invariant  $G$ .

On obtient ainsi le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** *Les éléments des  $S_K^{(0)}$  pour  $1 \leq K \leq 5$  et leur sous-groupes stabilisateurs sont tels que décrits dans les tables 2 à 5. Ce sont des sous-ensembles algébriques de  $SO(4)$  dont des ensembles de polynômes annulateurs sont donnés dans les tables 8, 9 et 10.*

Pour  $1 \leq K \leq 5$ , on a

$$S_K = \{\sigma G, G \in S_K^{(0)}, \sigma \in \text{Orb}(\text{St}(G))\}. \quad (4.17)$$

**Corollaire 4.2.** *Pour  $1 \leq K \leq 5$ , la première partie de la conjecture 3.4 est vérifiée : il n'existe aucune inclusion entre éléments de  $S_K$ .*

*Démonstration.*— En effet tout élément  $G$  de  $S_K$  est caractérisé par un ensemble de polynômes annulateurs  $\mathcal{P}_G$ . Pour deux éléments  $G_1$  et  $G_2$  distincts de  $S_K$ , il suffit de vérifier que l'un des polynômes annulateurs de  $G_1$  n'appartient pas à la base standard  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{SO(4)} \cup \mathcal{P}_{G_2})$ , c'est-à-dire n'est pas réduit à 0 selon cette base.  $\square$

$G_{4,1}$	$a_{4,2}, a_{4,3}$
$G_{4,2}$	$a_{4,3}, a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}$
$G_{4,3}$	$a_{3,2}, a_{4,2}$
$G_{4,4}$	$a_{4,3}, -a_{2,1}a_{1,3} + a_{1,1}a_{2,3}$
$G_{4,5}$	$a_{3,4}, a_{4,3}$
$G_{4,6}$	$a_{3,2}, a_{4,3}$
$G_{4,7}$	$a_{3,2}, a_{4,1}$
$G_{4,8}$	$a_{4,1}, a_{2,1}a_{1,4} - a_{1,1}a_{2,4}$
$G_{4,9}$	$a_{4,1}, -a_{1,1}a_{2,3} + a_{2,1}a_{1,3}$
$G_{4,10}$	$a_{2,2}a_{1,4} - a_{1,2}a_{2,4}, a_{4,2}a_{3,4} - a_{3,2}a_{4,4}$

TABLE 9 – Polynômes annulateurs pour les éléments de  $S_4^{(0)}$ .

#### 4.5 Permutation des colonnes dans $S_K^{(0)}$ , $3 \leq K \leq 5$

En remarquant que si  $G$  est un ensemble de Givens algébrique avec un ensemble de polynômes annulateurs  $\mathcal{P}_G$ , et si  $\sigma \in \mathcal{S}_4$  est une permutation paire, alors l'ensemble  $\pi_\sigma G$  obtenu par permutation

$G_{5,1}$	$a_{4,3}$
$G_{5,2}$	$-a_{4,1}a_{1,3}a_{2,4} + a_{4,1}a_{1,4}a_{2,3} - a_{4,3}a_{2,1}a_{1,4} + a_{4,3}a_{1,1}a_{2,4}$
$G_{5,3}$	$a_{1,3}a_{2,4} - a_{1,4}a_{2,3}$
$G_{5,4}$	$a_{4,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{4,3}$
$G_{5,5}$	$a_{1,3}a_{4,2}a_{2,1} - a_{2,3}a_{1,1}a_{4,2} - a_{4,3}a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,2}a_{4,3}$
$G_{5,6}$	$-a_{2,1}a_{4,4}a_{1,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{4,4} - a_{4,3}a_{1,1}a_{2,4} + a_{4,3}a_{2,1}a_{1,4}$
$G_{5,7}$	$-a_{3,3}a_{4,3} - a_{3,4}a_{4,4}$
$G_{5,8}$	$a_{3,3}a_{4,3} + a_{3,2}a_{4,2}$
$G_{5,9}$	$a_{2,1}a_{4,2}a_{1,4} - a_{1,1}a_{4,2}a_{2,4} - a_{2,2}a_{1,4}a_{4,1} + a_{4,1}a_{2,4}a_{1,2}$
$G_{5,10}$	$-a_{2,3}a_{1,1}a_{4,2} + a_{1,3}a_{4,2}a_{2,1} - a_{4,1}a_{2,2}a_{1,3} + a_{4,1}a_{2,3}a_{1,2}$
$G_{5,11}$	$-a_{1,1}a_{2,3}a_{4,4} + a_{2,1}a_{4,4}a_{1,3} - a_{4,1}a_{1,3}a_{2,4} + a_{4,1}a_{1,4}a_{2,3}$
$G_{5,12}$	$a_{3,3}a_{3,4} + a_{4,3}a_{4,4}$
$G_{5,13}$	$a_{3,2}a_{3,3} + a_{4,2}a_{4,3}$

TABLE 10 – Polynômes annulateurs pour les éléments de  $S_5^{(0)}$ .

des colonnes selon la permutation  $\sigma$ , est un ensemble algébrique de polynômes annulateurs

$$\pi_\sigma = \{\pi_\sigma p, p \in \mathcal{P}_G\}, \quad (4.18)$$

où  $\pi_\sigma p$  désigne le polynôme défini par  $(\pi_\sigma p)(a_{i,j}) = p(a_{i,\sigma(j)})$ .

On peut alors démontrer une égalité de la forme  $\pi_\sigma G = G'$  où  $G'$  est un autre ensemble de Givens algébrique en vérifiant l'identité de leurs bases standards associées.

On démontre ainsi le théorème suivant, mettant en relation des éléments différents des  $S_K^{(0)}$  pour chaque  $K$ ,  $3 \leq K \leq 5$ .

**Théorème 4.3.** *Les égalités suivantes sont vérifiées.*

— Pour  $K = 3$ ,

$$G_{3,2} = \pi_{3241}G_{3,4} \quad (4.19)$$

— Pour  $K = 4$ ,

$$G_{4,2} = \pi_{4321}G_{4,4} = \pi_{3124}G_{4,8} = \pi_{3241}G_{4,9} \quad (4.20)$$

$$G_{4,5} = \pi_{2431}G_{4,6} = \pi_{3412}G_{4,7} \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

— Pour  $K = 5$ ,

$$G_{5,2} = \pi_{4132}G_{5,5} = \pi_{4213}G_{5,6} = \pi_{3124}G_{5,9} = \pi_{1342}G_{5,10} = \pi_{3241}G_{5,11} \quad (4.23)$$

$$G_{5,3} = \pi_{3124}G_{5,4} \quad (4.24)$$

$$G_{5,7} = \pi_{1342}G_{5,8} \quad (4.25)$$

$$G_{5,12} = \pi_{1342}G_{5,13} \quad (4.26)$$

#### 4.6 Transposition dans $S_K^{(0)}$ , $2 \leq K \leq 5$

La transposition des matrices est une transformation de  $SO(4)$  dans  $SO(4)$  et la transposition d'un ensemble de Givens  $G = R_{i_1, j_1} R_{i_2, j_2} \dots R_{i_l, j_l}$  est l'ensemble de Givens  $G^T$  obtenu avec la liste retournée des ensembles de rotations, i.e.  $G^T = R_{i_l, j_l} \dots R_{i_2, j_2} R_{i_1, j_1}$ . Si  $G$  est algébrique avec  $\mathcal{P}_G$  comme ensemble de polynômes annulateurs, alors  $G^T$  est également algébrique avec comme ensemble de polynômes annulateurs  $\mathcal{P}_G^T$  où  $\mathcal{P}_G^T$  est défini par

$$\mathcal{P}_G^T = \{p^T(a), p \in \mathcal{P}_G\}, \quad (4.27)$$

où  $p^T$  désigne le polynôme défini par  $p^T(a_{i,j}) = p(a_{j,i})$ .

Pour  $G_{K,n} \in S_K^{(0)}$  avec  $1 \leq K \leq 5$ , on obtient alors en testant l'égalité de base de deux bases standards une identité de la forme  $G_{K,n}^T = \sigma G_{K,n'}$  où  $G_{K,n'} \in S_K^{(0)}$  et où  $\sigma \in \mathcal{S}_4$  est le minimum possible.

Cette remarque permet de démontrer le théorème suivant qui montre la correspondance entre deux éléments différents dans chaque  $S_K^{(0)}$  par permutation des coordonnées  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ .

**Théorème 4.4.** *Les identités suivantes sont vérifiées.*

$$G_{3,3}^T = \sigma_{1324} G_{3,5}, \quad G_{4,1}^T = \sigma_{1423} G_{4,3}, \quad G_{4,4}^T = \sigma_{4313} G_{4,8}, \quad (4.28)$$

$$G_{5,5}^T = \sigma_{1324} G_{5,11}, \quad G_{5,7}^T = \sigma_{1324} G_{5,12}, \quad G_{5,8}^T = \sigma_{1324} G_{5,13}. \quad (4.29)$$

En considérant l'équivalence de deux ensembles de Givens de  $S_K$  par *permutation des coordonnées*  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , on obtient donc avec les résultats de ce théorème et les équations (4.19) à (4.23) les classes suivantes indiquées par les ensembles d'indices  $n$  des  $G_{K,n}$

- Pour  $K = 3$ , il y a 3 classes d'équivalence :  $\{1\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,
- Pour  $K = 4$ , il y a 4 classes d'équivalence :  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 4, 8, 9\}$ ,  $\{5, 6, 7\}$ ,  $\{10\}$ ,
- Pour  $K = 5$ , il y a 4 classes d'équivalence :  $\{1\}$ ,  $\{2, 5, 6, 9, 10, 11\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{7, 8, 12, 13\}$ .

#### 4.7 Calcul formel de $S_6^{(0)}$

La méthode utilisée dans le paragraphe précédent est reprise pour la détermination algébrique de  $S_6^{(0)}$  : on exprime qu'une matrice  $\mathbf{A}$  est dans  $G = G_{5,n} R_{k,l}$  si et seulement si il existe  $t \in \mathbb{T}$ , c'est-à-dire  $c = \cos t$ ,  $s = \sin t$  avec  $c^2 + s^2 = 1$ , tel que  $\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{k,l}(-t)$  est dans  $G_{5,n}$ . Comme chaque  $G_{5,n}$  possède un seul polynôme annulateur, on obtient une unique équation en  $c$  et  $s$ , notée  $p(a, c, s) = 0$ .

Le calcul met en évidence alors plusieurs cas.

1.  $p(a, c, s)$  ne dépend pas de  $c$  et de  $s$ , et  $p(a)$  est un polynôme annulateur de  $G$ , équivalent au polynôme annulateur de  $G_{5,n}$ , auquel cas  $G = G_{5,n}$ .
2.  $p(a, c, s)$  est linéaire en  $c$  et  $s$ , c'est-à-dire de la forme  $q(a, c, s) = p_1(a)c + p_2(a)s + p_3(a) = 0$  et dans ce cas cette équation avec l'équation  $c^2 + s^2 = 1$  admet toujours au moins une solution en  $c$  et  $s$  pour toute valeur de  $a = (a_{i,j})$ . Dans ce cas  $G = SO(4)$ .
3.  $p(a, c, s) = q(a)(c^2 + s^2)$ , équivalent à  $q(a)$  et on est ramené au premier cas.
4.  $p(a, c, s) = q_1(a)c^2 + q_2(a)cs + q_3(a)s^2 + q_4(a)$ , équivalent à  $[q_1(a) + q_4(a)]c^2 + q_2(a)cs + [q_3(a) + q_4(a)]s^2$ .

Le système à résoudre en  $c$  et  $s$  est donc de la forme

$$(E) \begin{cases} r_1(a)c^2 + r_2(a)cs + r_3(a)s^2 = 0, \\ c^2 + s^2 = 1. \end{cases} \quad (4.30)$$

(E) admet une solution en  $c$  et  $s$  si et seulement si

$$\Delta_{n,k,l}(a) = r_2^2(a) - 4r_1(a)r_3(a) \geq 0. \quad (4.31)$$

Dans le cas particulier où  $r_1(a) + r_3(a) = 0$ , on a  $\Delta_{n,k,l}(a) \geq 0$  pour toute valeur de  $a$  et on peut remplacer  $\Delta_{n,k,l}(a)$  par la fonction nulle, et dans ce cas  $G = G_{5,n}R_{k,l} = SO(4)$ .

Dans les autres cas, la condition  $\Delta_{n,k,l}(a) \geq 0$  définit  $G_{5,n}R_{k,l}$  comme sous-ensemble semi-algébrique, non algébrique, de  $SO(4)$  et  $\Delta_{n,k,l}(a)$  est appelé un *polynôme de positivité* de  $G_{5,n}R_{k,l}$ .

Deux sous-ensembles semi-algébriques  $G_1$  et  $G_2$  de  $SO(4)$  ayant respectivement les polynômes de positivité  $p_1(a)$  et  $p_2(a)$  sont égaux si les polynômes  $p_1(a)$  et  $p_2(a)$  ont la même forme normale réduite suivant la base standard  $\mathcal{B}$  :  $N(p_1) = N(p_2)$ .

Enfin si  $G$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $SO(4)$  de polynôme de positivité  $p(a)$ , alors, pour toute permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_4$ ,  $\sigma G$  est semi-algébrique avec  $\sigma p$  comme polynôme de positivité, et si  $\sigma$  est paire,  $\pi_\sigma G$  est semi-algébrique avec  $\pi_\sigma p$  comme polynôme de positivité.

Ces propriétés permettent d'utiliser l'algorithme déterminant l'ensemble  $S_6^{(0)}$  et pour chacun de ses éléments son groupe de stabilité pour l'action par conjugaison de  $\mathcal{S}_4$ . Le théorème suivant est ainsi démontré.

**Théorème 4.5.** *Les éléments de  $S_6^{(0)}$  et leurs sous-groupes stabilisateurs sont tels que décrits dans la table 6.  $G_{6,1} = SO(4)$  et  $G_{6,n}$ ,  $2 \leq n \leq 10$  sont des sous-ensembles semi-algébriques non algébriques de  $SO(4)$ .*

Les correspondances entre éléments de  $S_6^{(0)}$  par permutation des colonnes sont données par le théorème suivant.

**Théorème 4.6.**

$$G_{6,2} = \pi_{3241}G_{6,3} = \pi_{4132}G_{6,4} = \pi_{4312}G_{6,5} = \pi_{4213}G_{6,6} = \pi_{4321}G_{6,10} \quad (4.32)$$

$$G_{6,7} = \pi_{1342}G_{6,8} = \pi_{2431}G_{6,9} \quad (4.33)$$

Voici deux exemples de polynômes de positivité.

**Exemple 4.7.** *Pour  $G_{6,8}$ , le calcul donne le polynôme de positivité*

$$\begin{aligned} \Delta'_8 &= (-a_{1,4}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,4})^2 - (4(a_{2,3}a_{2,4} + a_{4,3}a_{4,4}))(a_{1,3}a_{1,4} + a_{4,3}a_{4,4}) \\ &= a_{1,4}^2a_{2,3}^2 - 4a_{2,3}a_{4,3}a_{2,4}a_{4,4} - 2a_{1,3}a_{1,4}a_{2,3}a_{2,4} + a_{1,3}^2a_{2,4}^2 - 4a_{1,3}a_{1,4}a_{4,3}a_{4,4} - 4a_{4,3}^2a_{4,4}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La forme normale réduite de  $\Delta'_8$  selon la base standard  $\mathcal{B}$  est

$$\Delta_8 = 1 - a_{4,4}^2 - a_{3,4}^2 - a_{4,3}^2 - a_{3,3}^2 + a_{3,3}^2a_{4,4}^2 + 2a_{3,3}a_{4,3}a_{3,4}a_{4,4} + a_{4,3}^2a_{3,4}^2. \quad (4.35)$$

L'ensemble de Givens  $G_{6,8}$  est donc l'ensemble semi-algébrique dans  $SO(4)$  défini par l'inégalité polynomiale  $\Delta_8 \geq 0$ .

**Exemple 4.8.** Pour  $G_{6,8}$ , le calcul donne le polynôme de positivité

$$\begin{aligned} \Delta'_4 = & a_{2,4}^2 a_{4,4}^2 a_{1,3}^2 - 2a_{2,4} a_{4,4}^2 a_{2,3} a_{1,4} a_{1,3} - 4a_{3,4} a_{3,3} a_{4,4}^2 a_{1,4} a_{1,3} + 4a_{3,4}^2 a_{4,3} a_{1,4} a_{4,4} a_{1,3} + a_{1,4}^2 a_{2,3}^2 a_{4,4}^2 \\ & + 4a_{3,4} a_{3,3} a_{4,4} a_{1,4}^2 a_{4,3} - 4a_{3,4}^2 a_{4,3}^2 a_{1,4}^2 - 4a_{3,4} a_{3,3} a_{4,4}^2 a_{2,4} a_{2,3} - 4a_{3,4}^2 a_{3,3}^2 a_{4,4}^2 \\ & + 4a_{3,4} a_{3,3} a_{4,4} a_{2,4}^2 a_{4,3} + 4a_{3,4}^2 a_{4,3} a_{2,4} a_{4,4} a_{2,3} + 8a_{3,4}^3 a_{3,3} a_{4,4} a_{4,3} - 4a_{3,4}^4 a_{4,3}^2 \\ & - 4a_{3,4}^2 a_{4,3}^2 a_{2,4}^2, \end{aligned} \quad (4.36)$$

dont la forme normale réduite selon la base standard  $\mathcal{B}$ , d'expression plus simple, est

$$\begin{aligned} \Delta_4 = & -2a_{3,3} a_{4,3} a_{3,4} a_{4,4}^3 + a_{4,4}^2 - 4a_{4,3}^2 a_{3,4}^2 + 4a_{3,3} a_{4,3} a_{3,4} a_{4,4} - a_{3,3}^2 a_{4,4}^2 - a_{4,4}^4 + a_{4,4}^4 a_{3,3}^2 \\ & - a_{4,4}^2 a_{3,4}^2 - a_{4,3}^2 a_{4,4}^2 + a_{4,3}^2 a_{3,4}^2 a_{4,4}^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

L'ensemble de Givens  $G_{6,4}$  est donc l'ensemble semi-algébrique dans  $SO(4)$  défini par l'inégalité polynomiale  $\Delta_4 \geq 0$ .

#### 4.8 Inclusions dans $S_6^{(0)}$

Le lemme suivant sera utilisé dans la suite. Il donne la caractérisation comme ensemble semi-algébrique de la projection de  $SO(4)$  sur une sous-matrice  $2 \times 2$ .

**Lemme 4.9.** (i) Soit  $a, b, c, d$  quatre nombres réels. Un ensemble nécessaire et suffisant de conditions pour qu'il existe deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  de  $\mathbb{R}^4$  unitaires et orthogonaux avec

$$V_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ e \\ g \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \\ h \end{bmatrix}, \quad e, f, g, h \in \mathbb{R},$$

est

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 1, \\ c^2 + d^2 \leq 1, \\ C(a, b, c, d) \geq 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

où  $C(a, b, c, d)$  est la fonction définie par

$$C(a, b, c, d) = (1 - a^2 - b^2)(1 - c^2 - d^2) - (ac + bd)^2. \quad (4.39)$$

(ii) La projection de  $SO(4)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  des coordonnées  $a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}$  est l'ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^4$  défini par

$$\begin{cases} a_{3,3}^2 + a_{3,4}^2 \leq 1, \\ a_{4,3}^2 + a_{4,4}^2 \leq 1, \\ C(a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}) \geq 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

*Démonstration.*– (i) Pour que  $V_1$  soit unitaire, il faut que  $e^2 + g^2 = 1 - a^2 - b^2$ , et donc qu'il existe  $\theta$  avec  $e = (1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$ ,  $g = (1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta$ .

De même, un angle  $\phi$  doit exister tel que  $f = (1 - c^2 - d^2)^{\frac{1}{2}} \cos \phi$ ,  $h = (1 - c^2 - d^2)^{\frac{1}{2}} \sin \phi$ .

L'orthogonalité de  $V_1$  et  $V_2$  se traduit alors par

$$ef + gh = -ac - bd,$$

soit

$$(1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(1 - c^2 - d^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - \phi) = -ac - bd.$$

On peut alors déterminer  $\theta - \phi$ , puis  $\theta$  et  $\phi$ , si et seulement si la condition

$$(1 - a^2 - b^2)(1 - c^2 - d^2) \geq (ac + bd)^2,$$

est vérifiée.

Deux vecteurs unitaires orthogonaux  $V_3$  et  $V_4$  dans le sous-espace orthogonal dans  $\mathbb{R}^4$  au sous-espace engendré par  $V_1$  et  $V_2$  sont alors choisis tels que  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  soit une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^4$ , c'est-à-dire que la matrice  $4 \times 4$  dont les vecteurs colonnes sont les  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  soit dans  $SO(4)$ .

La partie (ii) du lemme s'en déduit immédiatement par un simple changement d'indices pour les lignes et les colonnes d'une matrice  $\mathbf{A} \in SO(4)$ . □

*Remarque.*— La fonction  $C(a, b, c, d)$  est invariante par permutation de  $a$  et  $d$  d'une part, et par permutation de  $b$  et  $c$  d'autre part, puisque l'on a

$$C(a, b, c, d) = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + (ad - bc)^2. \quad (4.41)$$

La figure 2 montre, dans le plan  $a_{3,3}, a_{3,4}$ , les intersections de la projection des ensembles  $C \geq 0$ ,  $\Delta_8 \geq 0$  et  $\Delta_4 \geq 0$  sur l'espace des coordonnées  $a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}$  avec l'hyperplan  $a_{4,3} = 3/5$ ,  $a_{4,4} = 9/20$ .

Le théorème suivant est alors vérifié.

**Théorème 4.10.** *Les inclusions indiquées dans la figure 1 sont vérifiées et*

- (i)  $G_{6,4}$  est strictement inclus dans  $G_{6,8}$ .
- (ii) Toutes les autres inclusions de la figure 1 sont strictes, ce qui démontre en particulier la seconde partie de la conjecture 3.4.

*Démonstration.*— (i) Dans le plan  $a_{3,3}, a_{3,4}$ , les variables  $a_{4,3}, a_{4,4}$  étant fixées avec  $a_{4,3}^2 + a_{4,4}^2 < 1$ , les courbes d'équations  $C(a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}) = 0$ ,  $\Delta_8 = 0$  et  $\Delta_4 = 0$  coupent l'axe  $a_{3,4} = 0$  en les points  $K$  et  $L$  d'abscisses  $\pm \sqrt{1 - a_{4,3}^2 - a_{4,4}^2} / \sqrt{1 - a_{4,4}^2}$  (voir la figure 2). Ces courbes sont des coniques de centre 0 passant par le point  $K$ , et donc  $L$ , et l'ensemble de telles coniques forment un espace vectoriel de dimension trois, dont fait partie également la conique dégénérée  $a_{3,4}^2 = 0$ . Il existe donc des constantes  $\alpha, \beta, \gamma$ , dépendant de  $a_{4,3}$  et  $a_{4,4}$ , telles que

$$\Delta_8 = \alpha \Delta_4 + \beta C(a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}) + \gamma a_{3,4}^2, \quad (4.42)$$

et le calcul donne

$$\Delta_8 = \Delta_4 + (1 - a_{4,4}^2)C(a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}) + 4a_{3,4}^2 a_{4,3}^2. \quad (4.43)$$

Si une matrice  $\mathbf{A} \in SO(4)$  est dans  $G_{6,4}$ , ses coordonnées vérifient  $\Delta_4 \geq 0$  et donc d'après (4.43) et  $C(a_{3,3}, a_{3,4}, a_{4,3}, a_{4,4}) \geq 0$  d'après le lemme 4.9 (ii), on a  $\Delta_8 \geq 0$ , et donc  $\mathbf{A} \in G_{6,8}$ .

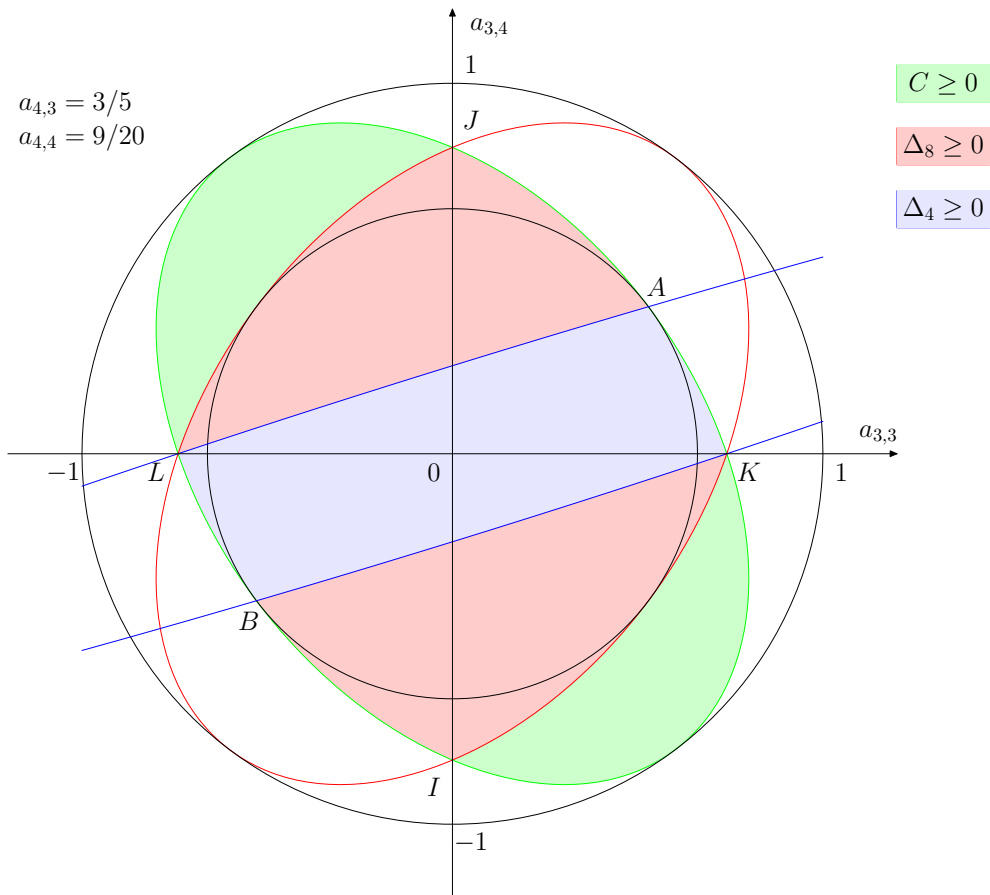


FIGURE 2 – Projection de  $SO(4)(C \geq 0)$ ,  $G_{6,8}(\Delta_8 \geq 0)$  et  $G_{6,4}(\Delta_4 \geq 0)$  dans le plan  $a_{3,3}, a_{4,3}$  pour  $a_{4,3} = 3/5$  et  $a_{4,4} = 9/20$ .

Enfin pour montrer l'inclusion stricte, il suffit d'exhiber une matrice de  $G_{6,8}$  qui n'appartient pas à  $G_{6,4}$ . C'est le cas de la matrice  $\mathbf{A} = \mathbf{G}_{6,8}(t)$  avec  $t_i = \frac{\pi}{2}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

pour laquelle  $\Delta_4 = -4$  et donc  $\mathbf{A} \notin G_{6,4}$ .

(ii) Les théorèmes 4.5, et les relations (4.32) et (4.32), permettent alors de démontrer le caractère strict de toutes les autres inclusions de la figure 1. Par exemple, de  $\pi_{4132}G_{6,4} = \pi_{4312}G_{6,5}$  et  $G_{6,7} = \pi_{1342}G_{6,8}$ , on déduit  $G_{6,4} = \pi_{1324}G_{6,5}$  et  $G_{6,8} = \pi_{1423}G_{6,7}$  et donc  $\pi_{1324}G_{6,5} \subset \pi_{1423}G_{6,7}$ , l'inclusion étant stricte d'après (i). D'où  $G_{6,5} \subset \pi_{1324}^{-1}\pi_{1423}G_{6,7} = \pi_{1432}G_{6,7}$ . Mais comme  $\pi_{1432}\Delta_7 = \Delta_7$  où  $\Delta_7$  est le polynôme de positivité de  $G_{6,7}$ , on a  $\pi_{1432}G_{6,7} = G_{6,7}$  et donc  $G_{6,5} \subset G_{6,7}$ , l'inclusion étant stricte.  $\square$

Les relations (4.32) et (4.32) montrent que pour l'équivalence des éléments de  $S_6$  par permutation des coordonnées  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 4$ , il n'existe que trois classes d'équivalence dont des représentants sont  $SO(4)$ ,  $G_{6,8}$  et  $G_{6,4}$ .

Les calculs du paragraphe suivant donnent une évidence supplémentaire du fait que  $G_{6,4}$  est strictement inclus dans  $G_{6,8}$ .

#### 4.9 Mesures de $G_{6,4}$ et de $G_{6,8}$

Une façon simple de décrire la mesure de Haar normalisée sur  $SO(4)$  ([9], [12]) est de la présenter comme mesure image de la mesure de Haar sur  $S^3 \times S^3$  par l'homomorphisme de groupes de Lie de  $S^3 \times S^3$  sur  $SO(4)$ , de noyau  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ .

La mesure de Haar sur  $S^3 \times S^3$  est  $\mu \otimes \mu$  où  $\mu$  est la mesure de Haar sur  $S^3$ .

L'expression explicite de  $\mu$  dépend du paramétrage choisi pour  $S^3$ .

Il y a le paramétrage par les angles d'Euler : un élément  $(a, b, c, d) \in S^3$ ,  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$  est paramétré par

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta \\ b &= \sin \theta \cos \psi \\ c &= \sin \theta \sin \psi \cos \phi \\ d &= \sin \theta \sin \psi \sin \phi \end{aligned}$$

avec  $0 \leq \theta, \psi < \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , et dans ce cas, on a

$$\int_{S^3} f d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int f(\theta, \psi, \phi) \sin^2 \theta \sin \psi d\theta d\psi d\phi.$$

En identifiant  $S^3$  au groupe  $SU(2, \mathbb{C})$ , c'est-à-dire aux matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{bmatrix},$$



avec  $x, y \in \mathbb{C}$ ,  $|x|^2 + |y|^2 = 1$ , on peut choisir le paramétrage  $x = \cos \theta e^{i\phi}$ ,  $y = \sin \theta e^{i\psi}$ , avec  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$ , et l'on a alors

$$\int_{S^3} f d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int f(\theta, \psi, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\psi d\phi.$$

Dans [12], Maria Ozols indique que la mesure  $\mu$  est obtenue, pour le second paramétrage, en prenant trois lois uniformes indépendantes  $(u, v, w)$  sur  $[0, 1]$  et en prenant  $\theta = \text{Arcsin}(\sqrt{u})$ ,  $\phi = 2\pi v$ ,  $\psi = 2\pi w$ .

Puis avec l'expression d'un élément de  $SO(4)$  comme image d'un couple d'élément de  $S^3$ , on obtient la mesure de Haar sur  $SO(4)$ . Cette construction est décrite dans [11].

Avec ces éléments, un programme en C++ a été rédigé (**haar3**, fichier source **haar3.cpp**) qui, pour un élément de  $SO(4)$  tiré au hasard selon la mesure de Haar, teste s'il appartient à  $G_{6,8}$  et s'il appartient à  $G_{6,4}$ . Le programme est appelé avec deux paramètres entiers

```
> ./haar3 NB IT
```

où **NB** est le nombre de tirs au hasard dans  $SO(4)$  et **IT** est le nombre de fois que l'opération est renouvelée. Les résultats, à savoir les proportions de fois où le point se trouve dans  $G_{6,8}$  et dans  $G_{6,4}$ , sont conservés dans un fichier pour analyse statistique.

Le programme en profite pour vérifier que si un point se trouve dans  $G_{6,4}$ , alors il est aussi dans  $G_{6,8}$ .

Dans un premier temps, le générateur de loi uniforme standard du langage C est utilisé avec  $NB = 10^6$  et  $IT = 1000$ , on obtient les moyennes  $m$  et écart-types  $\sigma$  suivants :

- Pour  $G_{6,8}$  :  $m = 0.7064756$ ,  $\sigma = 4.50 \cdot 10^{-4}$ ,
- Pour  $G_{6,4}$  :  $m = 0.3333203$ ,  $\sigma = 4.79 \cdot 10^{-4}$ .

La même expérience est renouvelée avec un générateur de nombres quasi-aléatoires, dit aussi à faible discrédance, selon la méthode de Niederreiter [1]. Ces nombres *remplissent* mieux les ensembles  $[0, 1]^N$  pour la loi uniforme, ici avec  $N = 6$ . L'algorithme de Niederreiter est implémenté dans le logiciel GSL (GNU Scientific Library) [6].

Les résultats sont alors les suivants.

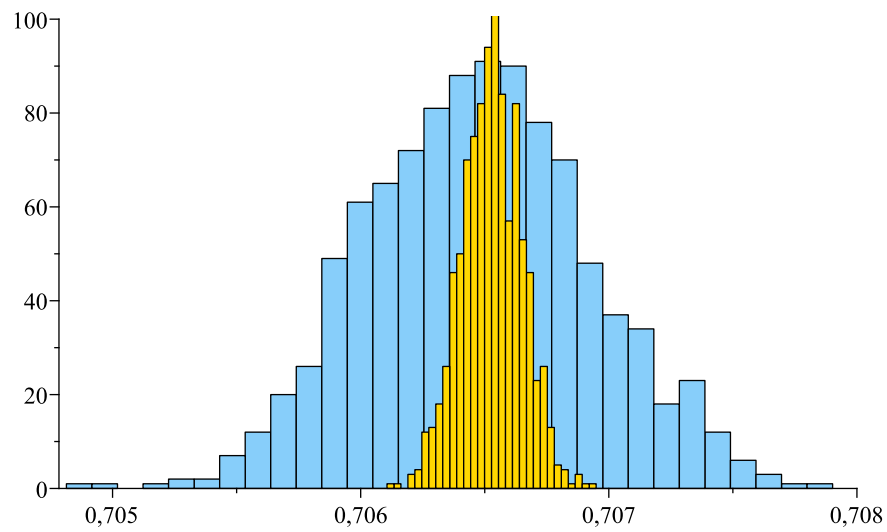
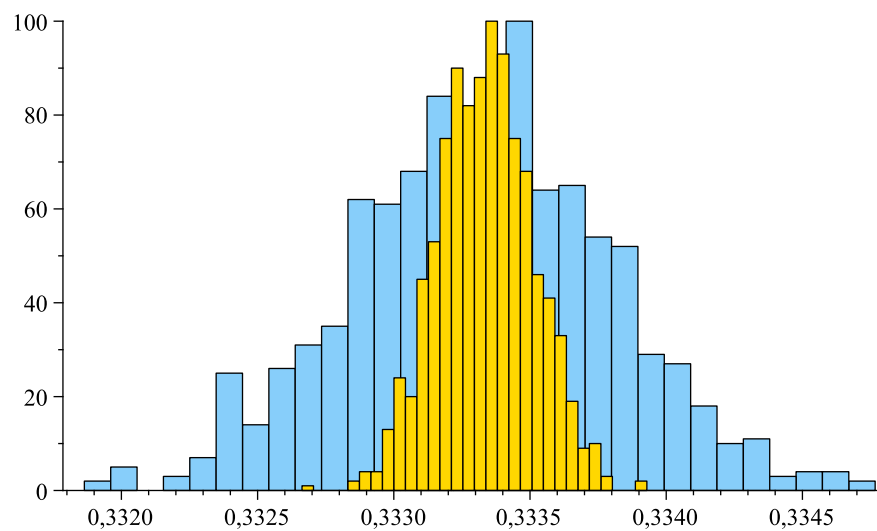
- Pour  $G_{6,8}$  :  $m = 0.7065280$ ,  $\sigma = 1.21 \cdot 10^{-4}$ ,
- Pour  $G_{6,4}$  :  $m = 0.3333326$ ,  $\sigma = 1.73 \cdot 10^{-4}$ .

Les histogrammes des figures 3 et 4 montrent que les résultats sont plus précis avec les nombres quasi-aléatoires (en jaune), comme prévu, qu'avec les nombres aléatoires ordinaires (en bleu clair), et il est raisonnable de conjecturer que  $\mu(G_{6,4}) = \frac{1}{3}$  pour la mesure de Haar normalisée sur  $SO(4)$ , tandis qu'aucune valeur simple ne se laisse deviner pour  $\mu(G_{6,8})$ .

#### 4.10 $S_7$ est vide

Pour un ensemble de Givens  $G = R_{i_1, j_1} R_{i_2, j_2} \dots R_{i_l, j_l}$  produit de  $l$  ensembles de rotations et  $1 \leq m \leq l$ , on note  $G(t_m = 0)$  l'ensemble de Givens obtenu en supprimant le  $m$ -ième ensemble de rotation. Cela correspond en effet dans l'application de Givens correspondante

$$(t_1, t_2, \dots, t_l) \rightarrow \mathbf{R}(t_1)\mathbf{R}(t_2) \dots \mathbf{R}(t_l),$$

FIGURE 3 – Mesure de  $G_{6,8}$  : répartition statistique.FIGURE 4 – Mesure de  $G_{6,4}$  : répartition statistique.

à fixer à 0 la variable  $t_m$  puisque  $\mathbf{R}_{i_m, j_m}(0) = \mathbf{I}_4$ .

**Théorème 4.11.** *L'ensemble  $S_7$  est vide. En effet les égalités suivantes sont vérifiées.*

(i) Pour  $G_{6,4}$ ,

$$G_{6,4}R_{1,2} = G_{6,2} \text{ et } G_{6,4}R_{k,l} = SO(4), \{k, l\} \neq \{1, 2\}. \quad (4.44)$$

(ii) Pour tout  $G = R_{i_1, j_1} R_{i_2, j_2} \dots R_{i_6, j_6} \in S_6 \setminus \{G_{6,1}\}$ ,

$$GR_{i_6, j_6} = G \text{ et } GR_{k,l} = SO(4), \{k, l\} \neq \{i_6, j_6\}. \quad (4.45)$$

*Démonstration.*—

(i) La première égalité est évidente puisque  $G_{6,4} = R_{1,2}R_{1,3}R_{1,4}R_{2,4}R_{2,3}R_{1,2}$ .

Pour chaque  $\{k, l\} \neq \{1, 2\}$  et chaque  $m$ ,  $1 \leq m \leq 6$ , l'ensemble  $(G_{6,4}R_{k,l})(t_m = 0)$  admet un polynôme, de positivité si sa dimension est égale à 6 ou bien un ensemble de polynômes annulateurs si sa dimension est inférieure ou égale à 5. Ceci permet d'identifier  $(G_{6,4}R_{k,l})(t_m = 0)$  à un ensemble de Givens de la forme  $\sigma G_{K', n'}$  avec  $K' = 6$  ou  $K' = 5$ . Pour  $k, l$  fixé, s'il existe  $m$  tel que  $(G_{6,4}R_{k,l})(t_m = 0) = G_{6,1} = SO(4)$ , alors  $G_{6,4}R_{k,l} \supset (G_{6,4}R_{k,l})(t_m = 0) = SO(4)$  et donc  $G_{6,4}R_{k,l} = SO(4)$ .

Les égalités suivantes montrent que c'est bien le cas pour tous les  $\{k, l\} \neq \{1, 2\}$  :

$$\begin{aligned} (G_{6,4}R_{1,3})(t_m = 0) &= SO(4), \quad m = 1, 4, 5, \\ (G_{6,4}R_{1,4})(t_m = 0) &= SO(4), \quad m = 2, 3, 6, \\ (G_{6,4}R_{2,3})(t_m = 0) &= SO(4), \quad m = 1, 4, 5, \\ (G_{6,4}R_{2,4})(t_m = 0) &= SO(4), \quad m = 2, 3, 6, \\ (G_{6,4}R_{3,4})(t_m = 0) &= SO(4), \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de (i).

(ii) Une démonstration identique par énumération peut être menée pour les autres éléments  $G_{6,n} \in S_6^{(0)}$ ,  $n \neq 1, n \neq 4$ , mais il en existe une plus directe.

En effet puisque  $G_{6,4} \subset G_{6,8}$ , une inclusion de la forme  $G_{6,4}R_{k,l} \supset SO(4)$  entraîne l'inclusion  $G_{6,8}R_{k,l} \supset SO(4)$  et donc  $G_{6,8}R_{k,l} = SO(4)$ , ce qui démontre (ii) pour  $G_{6,8}$ .

D'autre part, l'égalité  $G_{6,2} = \pi_{4132}G_{5,4}$  de (4.32) donne, pour  $\{k, l\} \neq \{1, 4\}$ ,  $R_{1,4}$  étant l'ensemble de rotations le plus à droite dans  $G_{6,2}$ ,

$$\begin{aligned} G_{6,2}R_{k,l} &= \pi_{4132}G_{5,4}R_{k,l} \\ &= G_{5,4} \left( \Pi_{4132}^{-1} R_{k,l} \Pi_{4132} \right) \Pi_{4132}^{-1} \\ &= G_{5,4} \left( \sigma_{4132}^{-1} R_{k,l} \right) \Pi_{4132}^{-1} \\ &= G_{5,4} R_{k', l'} \Pi_{4132}^{-1}, \end{aligned}$$

avec  $\{k', l'\} = \{\sigma_{4132}^{-1}(k), \sigma_{4132}^{-1}(l)\} \neq \{1, 2\}$ .

Comme  $G_{5,4}R_{k', l'} = SO(4)$ , on a  $G_{6,2}R_{k,l} = SO(4)\Pi_{4132}^{-1} = SO(4)$ .

On procède de même avec les autres éléments  $G_{6,n}$ ,  $n = 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  à l'aide des équations du théorème 4.6, puis avec les éléments de  $S_6$ , obtenu par conjugaison des éléments de  $S_6^{(0)}$  par une permutation de  $S_4$ .  $\square$

## 5 Conclusion

Nous avons démontré dans ce papier qu'il existe 618 ensembles de Givens dans  $SO(4)$ . Pour chacun d'entre eux, nous donnons une caractérisation algébrique : 449 sont des sous-ensembles algébriques de  $SO(4)$  de dimension inférieure ou égale à 5, et parmi les 169 de dimension 6, seul  $SO(4)$  est algébrique, les 168 autres étant semi-algébriques.

Compte-tenu de la complexité des calculs dans  $SO(5)$ , il semble peu probable que les méthodes ici utilisées puissent être étendues pour étudier les sous-ensembles de Givens de  $SO(N)$ ,  $N \geq 5$ .

Dans notre étude, nous avons en premier lieu exploré le problème avec une méthode numérique, et les résultats obtenus ont pu être rigoureusement démontrés par le calcul algébrique formel. Nous pouvons donc envisager d'étendre les méthodes numériques pour l'étude de sous-ensembles particuliers de matrices orthogonales de dimension supérieure ou égale à 5, et plus généralement de sous-ensembles de matrices para-orthogonales, c'est-à-dire de matrices  $\mathbf{A}(X)$  dont les coefficients sont des polynômes réels en une variable  $X$  et vérifiant une identité de la forme

$$\mathbf{A}(1/X)^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_N,$$

comme cela a déjà été le cas pour la résolution de problèmes de traitement du signal [13].

L'ensemble des sous-ensembles de Givens de  $SO(4)$  forment un monoïde pour le produit avec comme système de générateurs les  $R_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ . Il serait donc intéressant d'en donner une présentation en déterminant un ensemble minimal de relations.

Enfin nous avons montré qu'il n'existe qu'un nombre très limité de classes d'équivalence d'ensembles de Givens de  $SO(4)$  par permutation des coordonnées. Chaque classe possède des caractéristiques topologiques et différentielles qu'il convient d'identifier.

Ces questions feront l'objet d'études ultérieures.

## Bibliographie

- [1] P. Bratley, B.L. Fox, and H. Neiderreiter. Programs to generate Neiderreiter's low-discrepancy sequences. *ACM Trans. Math. Software (TOMS)*, 20(4) :484–495, Dec 1994.
- [2] G. Butler. *Fundamental algorithms for permutation groups*. Springer-Verlag, 1991.
- [3] P.J. Cameron. *Permutation groups*, volume 45 of *Student Texts*. London Mathematical Society, 1999.
- [4] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1995.
- [5] J.-Ch. Faugère. *Calcul efficace des bases de Groebner et applications*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, 2007.
- [6] M. Galassi and J. Davies *et al.* GNU Scientific Library. GSL Version 1.15. Technical report, GSL Team, 2011.
- [7] K. Geddes, S. Czapora, and G. Labahn. Gröbner bases for polynomial ideals. In *Algorithms for Computer Algebra*, chapter 10, pages 429–472. Kluwer, 1992.
- [8] W. Givens. Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form. *SIAM*, 6(1) :26–50, 1958.
- [9] H. P. Jakobsen. The Haar integral (and measure) on locally compact groups, 2009. Notes for the Course on Representations of Lie Groups.  
<http://www.math.ku.dk/~jakobsen/replie/compact-work.pdf>.

- 
- [10] C. Lawrence, J.L. Zhou, and A.L. Tits. User's guide for CFSQP version 2.5 : A C code for solving (large scale) constrained nonlinear (minimax) optimization problems, generating iterates satisfying all inequality constraints. Technical Report TR-94-16r1, University of Maryland, 1998.
- [11] J.E Mebius. The four-dimensional rotation group  $SO(4)$ , 2008.  
<https://jemebius.home.xs4all.nl/so4-wiki.pdf>.
- [12] M. Ozols. How to generate a random unitary matrix, 2009.  
[http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Random%20unitary%20\[paper\].pdf](http://home.lu.lv/~sd20008/papers/essays/Random%20unitary%20[paper].pdf).
- [13] D. Pinchon and P. Siohan. Oversampled paraunitary DFT filter banks : A general construction algorithm and some specific solutions. *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 59(7) :3058–3070, 2011.
- [14] D. Pinchon and P. Siohan. Angular parametrization of rectangular paraunitary matrices. HAL 01289570, 2016.
- [15] H.E. Rose. *A course on finite groups*. Springer-Verlag, 2009.