Journal de Mathématiques,
Mathématiques et Applications
Fondamentales & Informatique
JMMAFI, ISSN 2411-7188, **vol.5**,
2018, pp. 24-38

PRINCIPE DE DEVIATIONS MODEREES POUR LES PROCESSUS DES DIFFUSIONS DANS LES ESPACES DE BESOV-ORLICZ

J.H. ANDRIATAHINA [1] et T.J. RABEHERIMANANA [2]

Mention Mathématiques et Informatiques,
Domaine des Sciences & Technologie
Université d'Antananarivo B.P. 906, Ankatso
101 Antananarivo, Madagascar

Résumé :

Dans cet article, on se propose de démontrer un théorème de la limite centrale et un principe de déviations modérées pour les diffusions $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ de $\mathbb{R}^d$ à coefficients lipschitziens suivant la topologie des espaces de Besov-Orlicz défini par la fonction de Young $M_2(t) = e^{t^2} - 1$ et par le module de continuité $\omega(t) = \left[t(1 + \log(\frac{1}{t}))\right]^{\frac{1}{2}}$.

Mots Clés : Théorème de la limite centrale, Principe de déviations modérées, Principe de grandes déviations, Espaces de Besov-Orlicz.

Abstract :

In this paper, we purpose to prove a central limit theorem and a moderate deviations principle for diffusion processes $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ following topological Besov-Orlicz spaces defined by Young fonction $M_2(t) = e^{t^2} - 1$ and the modulus of continuity $\omega(t) = \left[t(1 + \log(\frac{1}{t}))\right]^{\frac{1}{2}}$.

Keys words : Central limit theorem, Moderate deviations principle, Large deviations principle, Besov-Orlicz Spaces.

Introduction

On considère la diffusion définie par la solution de l'équation différentielle d'Itô

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)dW_t + b(X_t^\varepsilon)dt, \quad t \in]0,1] \\ \\ X_0^\varepsilon = x_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

1. joceandhaj@gmail.com
2. rabeherimenana.toussaint@yahoo.fr

où $x_0 \in R^d$, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteur, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d\times k}(\mathbb{R})$ et W est un mouvement brownien standard sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. De plus, σ et b sont lipschitziens et σ vérifie la condition de croissance linéaire. Plus précisément,
$(\mathbf{H_1})$: la fonction b est mesurable en x et il existe une constante $C_b > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |b(x)| &\leq C_b \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d \\ |b(x) - b(y)| &\leq C_b(|x-y|) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d; \end{aligned}$$

$(\mathbf{H_2})$: la fonction σ est mesurable en x et il existe une constante $C_\sigma > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\sigma(x)| &\leq C_\sigma(1+|x|) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^d \\ |\sigma(x) - \sigma(y)| &\leq C_\sigma(|x-y|) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

$(\mathbf{H_3})$: b est de classe C^1 et il existe une constante positive K telle que

$$\max\Big\{tr(\sigma\sigma^*(x)), < x, b(x) > \Big\} \leq K(1+|x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

où $< x, y >$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$

$$Y_t^\varepsilon = \frac{Z_t^\varepsilon}{h(\varepsilon)}, \;\; avec\ Z_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(X_t^\varepsilon - X_t^o), \qquad t \in [0,1] \tag{0.2}$$

où $h(\varepsilon)$ est une échelle de déviation et X_t^0 est la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$\begin{cases} dX_t^0 = b(X_t^0)dt \\ \\ X_0^0 = x_0 \end{cases} . \tag{0.3}$$

Le but de cet article est donc d'étudier le comportement asymptotique de Y_t^ε dans la topologie de Besov-Orlicz défini, par la fonction de Young

$$M_\beta(x) = \begin{cases} \exp(|x|^\beta) - 1 & si\ 1 \leq \beta \leq 2 \\ \\ E_\beta(x) - E_\beta(0) & si\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

où $E_\beta(-x) = E_\beta(x)$ est le prolongement de la partie convexe de $\exp(x^\beta)$ sur $]x_\beta, +\infty[$ par sa tangente, en $x_\beta > 0$ et le module de continuité $w_{\alpha,\lambda}(t) = t^\alpha(1 + \log\dfrac{1}{t})^\lambda$.

Pour le cas $h(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, les estimations de grandes déviations ont été déjà étudiées dans ces dernières années par plusieurs auteurs voir Freidlin [8], Sowers [19], Chenal et Millet [4] pour les équations de réaction-diffusion, voir Cardon-Weber [2], Cerrai et Röckner [3] et Xu et Zhang [22] pour les autres équations de type EDPS. Pour le cas $h(\varepsilon) \equiv 1$, nous sommes dans le domaine du théorème de la limite centrale (TCL), ainsi nous montrerons que Z_t^ε converge vers la solution de l'équation différentielle stochastique quand ε tend vers 0. Pour combler l'écart entre ces deux cas d'échelle des grandes déviations, nous étudierons le Principe de Déviations Modérées (PDM) de Y_t^ε avec

$$h(\varepsilon) \longrightarrow \infty\ et\ \sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon) \longrightarrow 0,\ quand\ \varepsilon \longrightarrow 0 \quad . \tag{0.4}$$

Néanmoins, le principe de déviations modérées(PDM) pour des diffusions en norme uniforme a été déjà étudié par Ma et al. [12]. Ils ont fait des extensions sur le résultat de grandes déviations de Freidlin et Wentzell [9] et utilisé l'inégalité de transport de Talagrand pour les estimations. Plus tard, en utilisant l'inégalité exponentielle et l'inégalité de

Burkholder-Davis-Gundis, la grande déviation de Freidlin-Wentzell en norme hölderienne étudiée dans Ben Arous et Ledoux [1] et celle dans Chenal et Millet [4] ont permis à Wang et Zhang [15] de prouver le PDM des Equations Différentielles Partielles Stochastiques et Paraboliques (EDPSs). Plus récemment encore, dans Li et Zhang [11], le PDM pour les diffusions positives en norme uniforme et dans Rakotoarisoa et al.[18] pour les équations d'évolution aléatoire en norme hölderienne a été établi.

Dans ce travail, pour montrer le théorème de la limite centrale et le principe de déviations modérées de l'équation (0.1), nous étendons les résultats trouvés dans [15] et utilisons un résultat de grandes déviations dans [7] et établirons une estimation cruciale voir (1.3).

Dans la suite, nous supposons que $h(\varepsilon)$ satisfait (0.4). Signalons le fait que Mellouk a montré que les trajectoires de X appartiennent p.s à un sous-espace séparable de l'espace de Besov-Orlicz. Le reste de l'article se présente comme suit. Dans la section 1, nous introduisons quelques notions et rappelons quelques résultats concernant l'espace de Besov-Orlicz avant d' énoncer le résultat principal. La preuve du théorème principal est présentée dans la section 2 pour le TLC et la section 3 est consacrée au PDM. Nous montrons dans la dernière section que sous les hypothèses énoncées précédemment, l'équation des diffusions peut être bornée au sens du PGD de Freidlin-Wentzell.

Tout au long de cet article, C est une constante qui ne dépend pas d'aucun paramètre spécifique (sauf K et les constantes de Lipschitz), dont la valeur peut être différente d'une ligne à l'autre.

1 Préliminaires et résultats principaux

1.1 Espace de Besov-Orlicz

Dans cette section, nous donnons quelques notions sur l'espace de Besov-Orlicz considéré dans cet article. Mais pour avoir plus de détail concernant cet espace, nous renvoyons le lecteur à Ciesielski et al. [5] et Ropela [16]. Soit $M(x) = e^{x^2} - 1$, pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, la norme d'Orlicz est définie par

$$\| f \|_M = \inf \Big\{ \tau > 0, \frac{1}{\tau}\Big[1 + \int_0^1 M(\tau|f(t)|)dt\Big]\Big\}.$$

Le module de continuité de f en norme d'Orlicz est

$$\omega_M(f,\delta) = \sup_{0\le h\le\delta} \| \Delta_h f \|_M$$

où

$$\Delta_h f(x) = 1_{[0,1-\delta]}(x)[f(x+h) - f(x)], \forall h \in [0,1].$$

Soit $\alpha > 0$, et $\omega_\alpha(t) = t^\alpha(1+\log(1/t))^\alpha, \forall t \in [0,1]$. Notons par B^α_M l'espace des fonctions continues telles que $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$,

$$\| f \|_{\omega_\alpha,M,\infty} = \| f \|_M + \sup_{0\le t\le 1} \frac{w_M(f,t)}{\omega_\alpha(t)} < \infty.$$

Nous allons rappeler l'isomorphisme entre B_M^α et certains espaces de suites (cf. [5]). Soient $f_0, f_1 = f(1) - f(0)$, et pour tout $j \geq 0, 1 \leq k \leq 2^j$, notons

$$f_{j,k} = 2^{j/2}\Big[\Big(f\big(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\big) - f\big(\frac{k-1}{2^j}\big)\Big) - \Big(f\big(\frac{k}{2^j}\big) - f\big(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\big)\Big)\Big] \tag{1.1}$$

et $\Delta_{j,k} = \displaystyle\int_0^1 \chi_{j,k}(s)ds$ la fonction de base de Haar dont le support est $[(k-1)2^{-j}, k2^{-j}[$. Alors $f(t) = f_0 + f_1 t + \displaystyle\sum_{j,k} f_{j,k}\Delta_{j,k}(t)$. Nous avons alors (cf théorème III.8 et la remarque F.4 de [5]).

***Théorème* 1.1.** *Pour tout $p_o \geq 1$, la norme de $\| f \|_{\omega_\alpha, M, \infty}$ sur B_M^α est équivalente à la norme*

$$\| f \|^* = \max\Big(|f_0|, |f_1|, \sup_{p \geq p_0} \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{j}{p}} p^{-\frac{1}{2}} (j \vee 1)^{-\alpha} \| f_{j,\cdot} \|_p\Big)$$

où $\| f_{j,\cdot} \|_p = \Big(\displaystyle\sum_1^{2^j} |f_{j,k}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$.
De plus le sous-espace $B_M^{\alpha,0}$ de B_M^α correspondant aux suites $f_{j,k}$ telles que $\displaystyle\lim_{p \vee j \to \infty} 2^{-\frac{j}{p}} p^{-\frac{1}{2}} j^{-\alpha} \| f_{j,\cdot} \|_p \Big) = 0$ *est séparable.*

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, nous travaillions dans toute la suite dans $B_M^{\alpha,0}$ qui est un espace auquel appartiennent les trajectoires des diffusions (voir [14]). Nous introduisons les deux normes suivantes qui sont équivalentes à la norme de Besov-Orlicz :

$$\| f \|_{**} = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{w(t-s)}$$

celle-ci est dominée par la norme

$$\| f \|_* = \max\Big(|f(1)|, \sup_{j \geq 0} \sup_{0 \leq k \ \leq 2^j} \frac{|f_{j,k}|}{\sqrt{1+j}}\Big).$$

Pour tout $T \in [0,1]$ et pour tout $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, notons

$$\| f \|_{**,T} = \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|f(t) - f(s)|}{w(t-s)}. \tag{1.2}$$

Il est facile de voir qu'il existe $D_1 > 0$ et $D_2 > 0$ tels que $\| f \|_{M_2,w} \leq D_1 \| f \|_{**} \leq D_2 ||f||_*$.
Nous avons besoin du résultat suivant :
Pour tout $T \in [0,1]$, on a :

$$\sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{t-s}{\omega(t-s)} \leq 1 \tag{1.3}$$

où $\omega(t) = \sqrt{t}\sqrt{1 + log(\frac{1}{t})}$.
En effet, soit $f(t,s) = \dfrac{t-s}{\sqrt{1 - \log(t-s)}}$ une fonction définie sur $[0,1]$ pour tout $t, s \in [0,1]$.
Soit $0 < t - s < 1$, $\log(t-s) < 0$ car la fonction logarithme est croissante sur $]0, \infty[$. Par conséquent,$f(t,s)\sqrt{t-s} \leq (t-s)^{\frac{3}{2}}$. En posant $g(t,s) = \dfrac{t-s}{\omega(t-s)}$ pour tout $s, t \in [0,1]$. $g(t,s) \leq 1$. D'où le résultat.

1.2 Résultats principaux

Notons $\mathcal{H}$ l'espace de Cameron- Martin associé au mouvement brownien W.

$$\mathcal{H} = \left\{ h(t) = \int_0^t \dot{h}(s)ds : \dot{h} \in L^2([0,T]) \right\}$$

Rappelons le théorème de Schilder suivant qui est dans M. Mellouk et A. Millet. [14].

***Théorème* 1.2.** *Soit P^ε la loi de $\sqrt{\epsilon}W$ sur $B_M^{\alpha,0}$ muni de la norme $\|\|_{w_\alpha,M,\infty}$, alors P^ε satisfait le PGD avec la bonne fonctionnelle d'action :*

$$I(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{h}(s)|^2 ds & si\ h \in \mathcal{H} \\ \\ +\infty & sinon \end{cases}.$$

Pour tout $h \in \mathcal{H}$, $X_\cdot^h(x)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$X_t^h(x) = x + \int_0^t \sigma(X_s^h(x))\dot{h}_s ds + \int_0^t b(X_s^h(x))ds \tag{1.4}$$

Le théorème suivant montre le PGD de diffusion $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ dans $B_M^{\alpha,0}$ (voir [7]).

***Théorème* 1.3.** *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout borélien A de $B_M^{\alpha,0}$,*

$$-I(\mathring{A}) \leq \liminf_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}[\mathbb{X}_\cdot^\varepsilon \in \mathbb{A}] \leq \limsup_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}[\mathbb{X}_\cdot^\varepsilon \in \mathbb{A}] \leq -I(\bar{A})$$

$\mathring{A}$ et $\bar{A}$ désignent respectivement, l'intérieur et la fermeture de A pour la topologie de $B_M^{\alpha,0}$ et

$$I(A) = \inf\left\{\frac{1}{2} \parallel h \parallel_{\mathcal{H}}^2, X_\cdot^h(x) \in A\right\} \tag{1.5}$$

où $\parallel h \parallel_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^1 |\dot{h}_s|^2 ds$ et A un borélien de $C_x([0,1], \mathbb{R}^d)$.
Nous avons besoin du résultat suivant pour la preuve du théorème principal. La preuve est omise et similaire à celle dans [11].

***Théorème* 1.4.** *Supposons que les conditions $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_3})$ sont vérifiées. Alors, quand $\varepsilon \to 0$:*
(i)(TLC) $Z^\varepsilon = (Z_t^\varepsilon)$ converge en probabilité dans $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ vers un processus gaussien Z^0 définie par

$$\begin{cases} dZ^0(t) = Db(X_t^0)Z_t^0 dt + \sigma(X_t^0)dW_t \\ \\ Z^0(0) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

où $Db = (\frac{\partial}{\partial x_j} b^i)_{1\leq i,j\leq d}$ est la matrice jacobienne de b par rapport à x.
(ii)(PDM) $Y_t^\varepsilon = \left(\frac{X_t^\varepsilon - X_t^0}{h(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}\right)_{t\in[0;T]}$ satisfait le PGD sur l'espace $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ avec la vitesse $h^2(\varepsilon)$ et la fonctionnelle d'action

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T < \sigma\sigma^*(X_t^0)^{-1}(\dot{\varphi}_t - D_b(X_t^0)\varphi_t), \dot{\varphi}_t - D_b(X_t^0)\varphi_t > dt \tag{1.7}$$

si φ est absolument continue avec $\varphi_0 = 0$ et $I(\varphi) = +\infty$ ailleurs.

Plus précisément, pour tout sous-ensemble borélien U de $C([0,T],\mathbb{R}^d)$,

$$-\inf_{\varphi\in\mathring{U}} I(\varphi) \leq \liminf_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}[X^\varepsilon_\cdot \in U] \leq \limsup_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}[X^\varepsilon_\cdot \in U] \leq -\inf_{\varphi\in\bar{U}} I(\varphi)$$

$\mathring{U}$ et $\bar{U}$ désignent respectivement, l'intérieur et la fermeture de U pour la topologie de $C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Le théorème suivant énonce le résultat principal de ce travail.

***Théorème* 1.5.** *Supposons que les conditions* $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_3})$ *sont vérifiées. Alors, quand* $\varepsilon \to 0$:
(i)(TLC) $Z^\varepsilon = (Z^\varepsilon_t)$ *converge en probabilité dans* $B^{\alpha,0}_M$ *vers un processus gaussien* Z^0 *défini par*

$$\begin{cases} dZ^0(t) = Db(X^0_t)Z^0_t dt + \sigma(X^0_t)dW_t \\ \\ Z^0(0) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où $Db = (\dfrac{\partial}{\partial x_j} b^i)_{1\leq i,j\leq d}$ *est la matrice jacobienne de* b *par rapport à* x.
(ii)(PDM) $Y^\varepsilon_t = \left(\dfrac{X^\varepsilon_t - X^0_t}{h(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}\right)_{t\in[0;1]}$ *satisfait le PGD sur l'espace* $B^{\alpha,0}_M$ *avec la vitesse* $h^2(\varepsilon)$ *et la fonctionnelle d'action*

$$\bar{I}(A) = \inf\left\{\frac{1}{2} \parallel h \parallel^2_{\mathcal{H}}, Y^h_\cdot(x) \in A\right\} \tag{1.9}$$

où $Y^h_\cdot(x)$ *est la solution de l'équation différentielle déterministe suivante*

$$\begin{cases} dY^h_t(x) = Db(X^0_t)Y^h_t(x)dt + \sigma(X^0_t)\dot{h}_t dt \\ \\ Y^h_0(0) = 0 \end{cases}$$

pour tout $t \in [0,1]$, *avec la même condition de bornitude que celle de* $X^\varepsilon_\cdot$.

Dans toute la suite, nous supposerons que Db est aussi Lipschitzien et uniformément continu sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $(\mathbf{L})$ il existe une constante C_{Db} telle que

$$\begin{array}{rl} |Db(x)| & \leq C_{Db} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \\ |Db(x) - Db(y)| & \leq C_{Db}|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d \end{array}.$$

2 Théorème de la limite centrale

Dans cette section, nous établirons le théorème de la limite centrale.

***Lemme* 2.1.** *Sous l' hypothèse* $(\mathbf{H_3})$, *il existe une constante* $C(x_0,K) > 0$ *dépendant de* x_0 *et* K *telle que, pour tout* $t \in [0,1]$ *pour tout* $\varepsilon \in (0,1]$

$$\mathbb{E}[|X^\varepsilon_t|^2] \leq C(x_0,K).$$

Démonstration. Soit la fonction $f(x) = |x|^2$,
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 2x_i$, $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ . \\ . \\ 2x_d \end{pmatrix}$$

Par la formule d'Ito,

$$\begin{aligned} df(X_t^\varepsilon) &=< \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon), \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t > + < b(X_t^\varepsilon), \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon) > dt \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^*)_{ij}(X_t^\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_t^\varepsilon) dt \\ &=< \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon), \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t > + \mathcal{L}^\varepsilon f(X_t^\varepsilon) dt, \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^\varepsilon$ est le générateur de X_t^ε.
Considérons la martingale locale

$$M_t^\varepsilon := \sqrt{\varepsilon} \int_0^t < \bigtriangledown f(X_u^\varepsilon), \sigma(X_u^\varepsilon) dW_u > .$$

Notons que, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x) = \varepsilon tr(\sigma\sigma^*(x)) + 2 < x, b(x) >$$

Par la condition $\mathbf{H_3}$,

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x) \leq 3K(1 + |x|^2).$$

Par conséquent,

$$f(X_t^\varepsilon) \leq f(x_0) + M_t^\varepsilon + 3K \int_0^t (1 + |X_u^\varepsilon|^2) du$$

Comme l'espérance d'une intégrale stochastique est nulle, par le lemme de Gronwall, nous avons

$$\mathbb{E}|X_t^\varepsilon|^2 \leq (|x_0|^2 + 3K) \exp(3K)$$

La preuve est complète. □

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_3})$*, il existe une constante* $C(x_0, C_b, C_\sigma, K) > 0$ *dépendant de* x_0, C_b, C_σ *et* K *telle que, pour tout* $t \in [0,1]$ *et pour tout* $\varepsilon \in (0,1]$*,*

$$\mathbb{E}[|X_t^\varepsilon - X_t^0|^2] \leq \varepsilon C(x_0, C_b, C_\sigma, K)$$

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$,

$$X_t^\varepsilon - X_t^0 = \int_0^t [b(X_s^\varepsilon)) - b(X_s^0)] ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon) dW_s \tag{2.1}$$

Posons $U_t^\varepsilon = X_t^\varepsilon - X_t^0$, on a,

$$|U_t^\varepsilon|^2 \leq 2 \Big| \int_0^t [b(X_s^\varepsilon) - b(X_s^0)] ds \Big|^2 + 2\varepsilon \Big| \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon) dW_s \Big|^2$$

La condition sur b et σ, l'inégalité de Shwartz, l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy impliquent

$$\mathbb{E}|U_t^\varepsilon|^2 \leq 2C_b^2\mathbb{E}\Big(\int_0^t |X_s^\varepsilon) - X_s^0|^2 ds\Big) + 8\varepsilon C_\sigma^2\mathbb{E}\Big(\int_0^t 1 + |X_s^\varepsilon|^2 d_s\Big)$$

Par le théorème de Fubini, le lemme 2.1 et l'inégalité de Gronwall, nous avons

$$\mathbb{E}(|U_s^\varepsilon|^2) \leq 8\varepsilon C_\sigma^2\Big(1 + C(x_0, K\Big)\exp(2C_b^2).$$

Ce qui termine la preuve. □

Soit $Z_t^\varepsilon = \dfrac{X_t^\varepsilon - X_t^0}{\sqrt{\varepsilon}}$. Nous allons vérifier (i) dans le théorème 1.4. A cet effet, il suffit de prouver la proposition suivante.

***Proposition* 2.3.** *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H_1}) - (\mathbf{H_3})$ *et* $(\mathbf{L})$, *il existe une constante* $C(x_0, C_{Db}, C_b, C_\sigma, K)$ *dépendant de* $x_0, C_{Db}, C_b, C_\sigma$ *et* K *telle que*

$$\mathbb{E}[\| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{**}^2] \leq \sqrt{\varepsilon}C(x_0, C_{Db}, C_b, C_\sigma, K) \to 0 \quad quand \quad \varepsilon \to 0.$$

Démonstration. Notons que pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} Z_t^\varepsilon - Z_t^0 &= \int_0^t \Big(\frac{b(X_s^\varepsilon) - b(X_s^0)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db(X_s^0)Z_s^0\Big)ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(X_s^0))dW_s \\ &= I_1^\varepsilon(t) + I_2^\varepsilon(t) + I_3^\varepsilon(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$I_1^\varepsilon(t) = \int_0^t \Big(\frac{(b(X_s^\varepsilon)) - b(X_s^0)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db(X_s^0)Z_s^\varepsilon\Big)ds,$$

$$I_2^\varepsilon(t) = \int_0^t Db(X_s^0)(Z_s^\varepsilon - Z_s^0)ds,$$

$$I_3^\varepsilon(t) = \int_0^t (\sigma(X_s^\varepsilon) - \sigma(X_s^0))dW_s.$$

Par la formule de Taylor, il existe une variable aléatoire $\theta^\varepsilon(t)$ à valeur dans $(0,1)$ telle que

$$b(X_t^\varepsilon) - b(X_t^0) = Db(X_t^0 + \theta^\varepsilon(t)(X_t^\varepsilon - X_t^o)) \times (X_t^\varepsilon - X_t^o).$$

Comme Db est Lipschitzienne, nous avons

$$|Db(X_t^0 + \theta^\varepsilon(t)(X_t^\varepsilon - X_t^o)) - Db(X_t^0)| \leq C_{Db}\theta^\varepsilon(t)|X_t^\varepsilon - X_t^o| \leq C_{Db}|X_t^\varepsilon - X_t^o|. \tag{2.3}$$

Par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[\| I_1^\varepsilon \|_{**,T}] \leq \frac{C_{Db}}{\sqrt{\varepsilon}} \sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{1}{\omega(t-s)}\int_s^t \mathbb{E}|X_u^\varepsilon - X_u^o|^2 du.$$

Par le lemme 2.2, pour tout $t, s \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}(\| I_1^\varepsilon \|_{**,T}) \leq \sqrt{\varepsilon}C_{Db}C(x_0, C_b, C_\sigma, K). \tag{2.4}$$

Posons $V^\varepsilon = Z^\varepsilon - Z^0$.

$$|V^\varepsilon_u| \leq |V^\varepsilon_s| + |V^\varepsilon_u - V^\varepsilon_s| \tag{2.5}$$

Comme $|Db| \leq C_{Db}$, par le théorème de Fubini et (2.5), nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\| I^\varepsilon_2 \|_{**,T}) &\leq C_{Db}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{1}{\omega(t-s)}\int_s^t |V^\varepsilon_u|du\Big)\\ &\leq C_{Db}\Big(\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{(t-s)\mathbb{E}(|V^\varepsilon_s|)}{\omega(t-s)}) + \int_0^T \mathbb{E}(\| V^\varepsilon \|_{**,u})du\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

En outre,

$$\mathbb{E}(|V^\varepsilon_s|) \leq \mathbb{E}(|I^\varepsilon_1(s)| + |I^\varepsilon_2(s)| + |I^\varepsilon_3(s)|)$$

(2.3), le théorème de Fubini et le lemme 2.2 nous donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|I^\varepsilon_1(s)| + |I^\varepsilon_2(s)|) &\leq \frac{C_{Db}}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^s \mathbb{E}|X^\varepsilon_u - X^0_u|^2du + C_{Db}\int_0^s \mathbb{E}|V^\varepsilon_u|du\\ &\leq \sqrt{\varepsilon}C_{Db}C(x_0,C_b,C_\sigma,K) + C_{Db}\int_0^s \mathbb{E}|V^\varepsilon_u|du.\end{aligned}.$$

Ensuite, l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et le théorème de Fibuni et le lemme 2.2 impliquent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|I^\varepsilon_3(s)|) &\leq c_1C_\sigma\Big(\int_0^s \mathbb{E}|X^\varepsilon_u - X^\varepsilon_0|^2du\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \sqrt{\varepsilon}C(x_0,C_b,C_\sigma,K).\end{aligned}.$$

Enfin, par l'inégalité de Gronwall et les deux dernières inégalités

$$\mathbb{E}(|V^\varepsilon_s|) \leq \sqrt{\varepsilon}C(x_0,C_b,C_\sigma,K)(1+C_{Db})\exp(C_{Db})$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(\| I^\varepsilon_2 \|_{**,T}) \leq \sqrt{\varepsilon}C(x_0,C_b,C_\sigma,K)(1+C_{Db})\exp(C_{Db}) + C_{Db}\int_0^T \mathbb{E}(\| V^\varepsilon \|_{**,u})du \tag{2.7}$$

Grâce à l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, le théorème de Fubini et lemme 2.2 encore, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\| I^\varepsilon_3 \|_{**,T} &\leq c_2C_\sigma\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{1}{\omega(t-s)}\int_s^t |X^\varepsilon_u - X^0_u|^2du\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\ &\leq c_2C_\sigma\sup_{0\leq s<t\leq T}\Big(\frac{1}{\omega(t-s)}\int_s^t \mathbb{E}|X^\varepsilon_u - X^0_u|^2du\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}C(x_0,C_b,C_\sigma,K).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Enfin (2.4), (2.7), (2.8) et l'inégalité de Gronwall terminent la preuve. □

3 Principe de déviation modérée

Dans cette section, nous prouvons (ii) le PDM dans le théorème 1.5. Nous savons que

$$Z_t^\varepsilon = \frac{X_t^\varepsilon - X_t^0}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad t \geq 0,$$

$$dZ_t^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(b(X_t^\varepsilon) - b(X_t^0)dt + \sigma(X_t^\varepsilon)dW_t.$$

Comme

$$d\Big(\frac{Z_t^0}{h(\varepsilon)}\Big) = Db(X_t^0)\Big(\frac{Z_t^0}{h(\varepsilon)}\Big)dt + \frac{1}{h(\varepsilon)}\sigma(X_t^0)dW_t,$$

$\dfrac{Z_t^0}{h(\varepsilon)}$ satisfait un PGD dans $B^0_{\omega_\alpha}$, avec la vitesse de convergence $h^2(\varepsilon)$ et la fonction de taux $\bar{I}$ donnée par l'équation(1.9). D'après [6] , théorème 2.4.13, pour prouver le PGD de $\dfrac{Z_t^0}{h(\varepsilon)}$, il suffit de montrer que $\dfrac{Z_t^\varepsilon}{h(\varepsilon)}$ est $h^2(\varepsilon)-$équivalente à $\dfrac{Z_t^0}{h(\varepsilon)}$, i.e, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}\Big(\frac{\| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{M_2,\omega}}{h(\varepsilon)} > \delta\Big) = -\infty. \tag{3.1}$$

Comme

$$\| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{M_2,w} \leq D_1 \| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{**},$$

(3.1) se réduit à montrer

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}\Big(\frac{\| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{**}}{h(\varepsilon)} > \delta\Big) = -\infty. \tag{3.2}$$

Par la décomposition (2.2) et (2.5) nous avons

$$\begin{aligned}
\| Z^\varepsilon - Z^0 \|_{**,T} \quad &\leq \| I_1^\varepsilon \|_{**,T} + C_{Db}\Big(\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{1}{\omega(t-s)}\int_s^t |Z_u^\varepsilon - Z_u^0|du\Big) + \| I_3^\varepsilon \|_{**,T} \\
&\leq \| I_1^\varepsilon \|_{**,T} + C_{Db}\Big(\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{(t-s)|Z_s^\varepsilon - Z_s^0|}{\omega(t-s)} + \int_0^T \| Z_u^\varepsilon - Z_u^0 \|_{**,u}\, du\Big) \\
&+ \| I_3^\varepsilon \|_{**,T}
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall implique

$$\| Z_t^\varepsilon - Z_0^\varepsilon \|_{**,T} \leq \Big(C_{Db}\sup_{0\leq s<t\leq T}\frac{(t-s)|Z_s^\varepsilon - Z_s^0|}{\omega(t-s)} + \| I_1^\varepsilon \|_{**,T} + \| I_3^\varepsilon \|_{**,T}\Big)e^{DbT} \tag{3.3}$$

Par (3.2), (3.3) se réduit à montrer, pour chaque $\delta > 0$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}\Big(\frac{\| I_i \|_{**}}{h(\varepsilon)} \geq \delta\Big) = -\infty \quad i = 1,3 \tag{3.4}$$

et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}\Big(\frac{1}{h(\varepsilon)}\sup_{0\leq s<t\leq 1}\frac{(t-s)|Z_s^\varepsilon - Z_s^0|}{\omega(t-s)} \geq \delta\Big) = -\infty \tag{3.5}$$

Nous procédons en deux étapes pour la preuve de (3.4) et le lemme(cf. [7]) suivant nous est utile.

Lemme 3.1. *Il existe une constante $\tilde{K}$ telle que pour tout $u > 2\sqrt{\ln 2}$ et tout processus V sur $[0,1]$,*

$$\mathbb{P}\Big[\parallel \int_0^{\cdot} V_s.dW_s \parallel_{**} \geq u, ||V|| \leq 1 \Big] \leq \tilde{K} \exp\Big(\frac{-u^2}{\tilde{K}}\Big)$$

Etape 1. Pour tout $\varepsilon > 0, \eta > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\parallel I_3^{\varepsilon} \parallel_{**} \geq h(\varepsilon)\delta\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\parallel I_3^{\varepsilon} \parallel_{**} \geq h(\varepsilon)\delta, |X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} < \eta\Big) + \mathbb{P}\Big(|X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} \geq \eta\Big). \quad (3.6)$$

En vertu de la propriété de Lipschitz de σ et du lemme 3.1 précédent,

$$\mathbb{P}\Big(\parallel I_3 \parallel_{**} \geq h(\varepsilon)\delta, |X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} < \eta\Big) \leq \tilde{K} \exp\Big(- \frac{h^2(\varepsilon)\delta^2}{\tilde{K} C_{\sigma}^2 \eta^2}\Big). \quad (3.7)$$

Par le théorème 2.2, X^{ε} satisfait le PGD dans $B_M^{\alpha,0}$ avec la bonne fonction de taux I. Par conséquent, pour tout $\eta > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\Big(|X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} \geq \eta\Big) &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\Big(\parallel X^{\varepsilon} - X^0 \parallel_{**} \geq \eta\Big) \\ &\leq - \inf\{I(f) : \parallel f - X^0 \parallel_{**} \geq \eta\}.\end{aligned}$$

La bonne fonction de taux I a un ensemble de niveau compact, $\inf\{I(f) : \parallel f - X^0 \parallel_{**} \geq \eta\}$ est obtenu en une certaine fonction f_0 car $I(f) = 0$ si et seulement si $f = X^0$. Ainsi,

$$- \inf\{I(f) : \parallel f - X^0 \parallel_{**} \geq \eta\} < 0.$$

Par (0.4), nous avons

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\Big(|X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} \geq \eta\Big) = -\infty. \quad (3.8)$$

Comme $\eta > 0$ est arbitraire, par (3.6)-(3.8), nous avons

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\Big(\frac{\parallel I_3 \parallel_{**}}{h(\varepsilon)} \geq \delta\Big) = -\infty. \quad (3.9)$$

Etape 2. Pour le premier terme I_1^{ε}, nous avons

$$\parallel I_1^{\varepsilon} \parallel_{**} \leq \frac{C_{Db}}{\sqrt{\varepsilon}} \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{1}{\omega(t-s)} \int_0^t |X_u^{\varepsilon} - X_u^{o}|^2 du.$$

Par (2.1) et l'inégalité de Gronwall nous avons,

$$\parallel X^{\varepsilon} - X^0 \parallel_{**} \leq \sqrt{\varepsilon} C(C_b) \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{1}{\omega(t-s)} \int_0^t \sigma(X_u^{\varepsilon}) dW_u$$

où $C(C_b)$ est une constante positive qui dépend de C_b.

Pour $\eta > 0$, l'inégalité de Bernstein, nous donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\parallel I_1^{\varepsilon} \parallel_{**} \geq h(\varepsilon)\delta\Big) &\leq \mathbb{P}\Big(\parallel I_1^{\varepsilon} \parallel_{**} \geq h(\varepsilon)\delta, |X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} < \eta\Big) + \mathbb{P}\Big(|X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} \geq \eta\Big) \\ &\leq \mathbb{P}\Big(\parallel \int_0^t \sigma(X_s^{\varepsilon}) dW_s \parallel_{**}^2 \geq \frac{h(\varepsilon)\delta}{C(C_b, C_{Db})}, |X^{\varepsilon}|_{\infty} < |X^0|_{\infty} + \eta\Big) \\ &+ \mathbb{P}\Big(|X^{\varepsilon} - X^0|_{\infty} \geq \eta\Big).\end{aligned} \quad (3.10)$$

où $C(C_b, C_{Db})$ est une constante positive qui dépend de C_b et de C_{Db}.
La condition de Lipschitz de σ, et le lemme 3.1 impliquent que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\parallel \int_0^{\cdot} \sigma(X_s^\varepsilon)dW_s \parallel_{**}^2 \ & \geq \frac{h(\varepsilon)\delta}{C(C_b, C_{Db})}, |X^\varepsilon|_\infty < |X^0|_\infty + \eta\Big) \\ & \leq \tilde{K} \exp\Big(- \frac{h(\varepsilon)\delta}{\tilde{K}C(C_b, C_\sigma, C_{Db})(|X^0|_\infty + \eta)^2}\Big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

où $C(C_b, C_\sigma, C_{Db})$ est une constante positive qui dépend de C_b, C_σ et de C_{Db}.
(0.4), (3.8) (3.10) et (3.11) , nous donnent

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\Big(\frac{\parallel I_1 \parallel_{**}}{h(\varepsilon)} \geq \delta \Big) = -\infty. \tag{3.12}$$

Enfin (3.9) et (3.12) terminent la preuve.
Il nous reste alors à montrer (3.5). Notons par

$$||Z^\varepsilon - Z^0||_{w,T} = \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{(t-s)|Z_s^\varepsilon - Z_s^0|}{\omega(t-s)}$$

Il est facile de voir que pour $t \in [0,1]$,

$$||Z^\varepsilon - Z^0||_{w,T} \leq ||Z_t^\varepsilon - Z_t^0||_T$$

où $||Z^\varepsilon - Z^0||_T = \sup_{0 \leq t \leq T} |Z_t^\varepsilon - Z_t^0|$.

Par la décomposition (2.3) et l'inégalité de Gronwall, nous avons

$$||Z^\varepsilon - Z^0||_T \leq (||I_1^\varepsilon||_T) + ||I_3^\varepsilon||_T)e^{C_{Db}}. \tag{3.13}$$

Par (3.13), la preuve de (3.5) se réduite à montrer que pour chaque $\delta > 0$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\Big(\frac{1}{h(\varepsilon)} ||I_i||_T > \delta \Big) = -\infty, \quad i = 1, 3 \tag{3.14}$$

La preuve de (3.14) revient à montrer (ii) du théorème 1.4 (voir [11]). Finalement, (3.13) et (3.14) terminent la démonstration du résultat.

4 Réduction au cas borné

Dans cette section, nous prouvons que X^ε est borné au sens du PGD de Freidlin-Wentzell sous les hypothèses $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ et $\mathbf{H_3}$.
Supposons d'abord que pour tout $R \geq 0$,

$$\tau_R^\varepsilon := \inf\{t; |X_t^\varepsilon| \geq R\}.$$

Le lemme suivant a la même idée de preuve que celle dans [lemme 5.6.18 ,[6]] et dans [11]. Nous allons donner une esquisse de la preuve.

***Lemme* 4.1.** *Sous les hypothèses* $\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}$ *et* $\mathbf{H_3}$*,*

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\tau_R^\varepsilon \leq T) = -\infty.$$

Démonstration. Soit $f(x) := log(1+|x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{1+x_1^2+.....+x_d^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-4x_i x_j}{(1+x_1^2+.....+x_d^2)^2},$$

$$\bigtriangledown f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_d} et \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{1+x_1^2+.....+x_d^2} \\ \dfrac{2x_2}{1+x_1^2+.....+x_d^2} \\ . \\ . \\ \dfrac{2x_d}{1+x_1^2+.....+x_d^2} \end{pmatrix}$$

Par la formule d'Ito,

$$\begin{aligned} df(X_t^\varepsilon) &=< \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon), \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t > + < b(X_t^\varepsilon), \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon) > dt \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^*)_{ij}(X_t^\varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_t^\varepsilon) dt \\ &=< \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown f(X_t^\varepsilon), \sigma(X_t^\varepsilon) dW_t > + \mathcal{L}^\varepsilon f(X_t^\varepsilon) dt, \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^\varepsilon$ est le générateur de X_t^ε.
Considérons la martingale locale

$$M_t^\varepsilon := \sqrt{\varepsilon} \int_0^t < \bigtriangledown f(X_s^\varepsilon), \sigma(X_s^\varepsilon) dW_s > .$$

Par la condition de croissance linéaire de σ dans $\mathbf{H_2}$, la variation quadratique du processus (M_t^ε) satisfait

$$< M^\varepsilon >_t = \varepsilon \int_0^t |\sigma(X_s^\varepsilon)^* \bigtriangledown f(X_s^\varepsilon)|^2 ds \leq 4\varepsilon C_\sigma^2 t.$$

Notons que, pour tout $\varepsilon \in (0,1]$,

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x) = \frac{\varepsilon tr(\sigma\sigma^*(x)) + 2 < x, b(x) >}{1+|x|^2} - \frac{2|x|^2}{(1+|x|^2)^2}$$

Par la condition $\mathbf{H_3}$,

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x) \leq \frac{3\varepsilon C(1+|x|^2)}{1+|x|^2} \leq 3C.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$ et $\varepsilon \in (0,1]$,

$$f(X_t^\varepsilon) \leq f(x_0) + M_t^\varepsilon + 3Ct$$

Pour chaque $R > 0$ assez grand, $C(R,T) := \log(1+R^2) - [\log(1+|x_0|^2) + 3CT] > 0$, nous avons par l'inégalité de Bernstein pour la martingale locale continue,

$$\mathbb{P}(\tau_R^\varepsilon \leq T) = \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon| \geq R \Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} f(|X_t^\varepsilon|) \geq \log(1+R^2) \Big)$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} |M_t^\varepsilon| \geq C(R,T) \Big) \leq 2\exp\Big\{ -\frac{C(R,T)^2}{8\varepsilon CT} \Big\}$$

D'où le résultat voulu. $\square$

Maintenant, pour tout $R > 0$ assez grand $C(R,T) > 0$, soit $\sigma^{(R)}(x) = \sigma(x)$ et $b^{(R)}(x) = b(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec $|x| \leq R$ tel que $\sigma^{(R)}$ et $b^{(R)}$ sont globalement Lipschitziens et $b^{(R)}$ est C^1 avec $Db^{(R)}$ uniformément continu et borné. Considérons $X^{\varepsilon,R}$ la solution correspondante de l'équation différentielle stochastique (0.1) avec (σ, b) remplacé par $(\sigma^{(R)}, b^{(R)})$. Nous avons par le lemme 4.1 et la preuve ci-dessus que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\Big(X_t^\varepsilon \neq X^{\varepsilon,R} \; pour\ certains\ t \in (0,T]\Big)$$

$$\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}(\tau_R^\varepsilon \leq T) \leq \frac{C(R,T)^2}{8CT}.$$

D'après le lemme d'approximation dans ([6], Théorème 4.2.13), $\dfrac{X^\varepsilon - X^0}{h(\varepsilon)}$ et $\dfrac{X_t^{\varepsilon,R} - X^{0,R}}{h(\varepsilon)}$ obéissent au même PDM. Ainsi, nous considérons $(\sigma^{(R)}, b^{(R)})$, si nécessaire nous pouvons supposer (**M**) *b est* C^1 *avec Db uniformément continu et borné sur* $\mathbb{R}^d$, *et*

$$\frac{1}{2} tr[(\sigma(x) - \sigma(y))(\sigma(x) - \sigma(y))^*] + < x - y, b(x) - b(y) > \leq K|x - y|^2$$

pour une certaine constante $K \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, et $tr(\sigma\sigma^*) \leq L$ pour une certaine constante positive L.
Finalement, en suivant le même argument que celui où $\mathbf{H_1} - \mathbf{H_3}$ et $\mathbf{L}$ est vérifié, nous revenons à prouver le théorème 1.5 en remarquant que cette constante $K = C_b = C_{D_b}$.

Références

[1] Ben Arous, G. et Ledoux, M. Grandes déviations de Freidlin-Wentzell en norme hölderienne ,*Lecture Notes Math.,* **1583,** 293-299, 1994.

[2] Cardon-Weber, C. Large deviations for a Burger's-type SPDE, Stochastic Process. Appl.,**84** : 53-70, 1999.

[3] Cerrai, S. and Röckner, M., Large deviations for stochastic reaction-diffusion systems with multiplicative noise and non-Lipschitz reaction term, Ann. Probab. **32**, 1100–1139 (2004).

[4] Chenal, F., Millet, A., Uniform large deviations for parabolic SPDEs and applications. Stochast. Process. Appl.**72**, 161–186 (1997).

[5] Ciesieleski, Z., Kerkyacharian, G. et Roynette, B. Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. Studia Matematica. 107, 171-204, 1993.

[6] Dembo, A. and Zeitouni, O., Large deviations technique and applications. Second Edition. Applications of Mathematics **38**. Springer-Verlag, 1998.

[7] Eddahbi, M., N'zi, M. and Ouknine, Y., Grandes déviations des diffusions sur les espaces de Besov-Orlicz et application. Sochastics and Sochastic Reports, 37-41, 2012.

[8] Freidlin, M.I., Random perturbations of reaction-diffusion equations. The quasideterministic approach. Trans. Amer. Math. Soc.,**305**, 665–697, 1988.

[9] Freidlin, M. and Wentzell, D., Random perturbation of dynamical systems Springer, Berlin 1984.

[10] Lakhel, E.H. Large deviation for stochastics Volterra equation in the Besov-Orlicz space and application. Random Oper. and Stoch. Equ., Vol.**11**, pp. 333-350 (2003).

[11] Li, Y. and Zhang, S., Moderate deviations and central limit theorem for positive diffusions, *Journal of Inequalities and Applications,* Springer, **87,** 1-10, (2016).

[12] Ma, Y., Wang, R. and Wu, L., Moderate deviation principle for dynamical systems with small random perturbation,. arXiv :1107.3432.(2011)

[13] Mellouk, M., *Support des diffusions dans les espaces de Besov-Orlicz.* C. R Acad. Sci., Paris, série I, 319, 261-266 (1994).

[14] Mellouk, M. and Millet, A., *Large Deviation for Stochastic Flows and anticipating SDEs in Besov-Orlicz spaces,* Stochastics and Stochastics Reports, **63** pp.267-302, 1998.

[15] Wang, R. and Zhang, T., Moderate deviation for stochastic reaction-diffusion equations with multiplicative noise, Potential Anal.**42,** Springer Science+Business Media Dordrecht, 99–113, 2015.

[16] Ropela, S.,C., Spline Basis in Besov spaces.[Bul Acad. Polon. Scio. Sér. Sci. Math., Astronom. Phys.] **24**. 319-325, 1976.

[17] Roynette, B., *Approximation en norme Besov de la solution d'une EDS*, Sochastics and Sochastic Reports, 191-209, 2007.

[18] Rakotoarisoa, R.N.B., Andriatahina, H.J. et Rabeherimanana, T.J., *Principe de déviations modérées et Théorème de la limite centrale pour les équations d'évolutions aléatoires*, JMMAFI. Mada Revues, **3,** 1-25 (2016).

[19] Sowers, R., *Large deviations for a reaction-diffusion equation with non-Gaussian perturbation.* Ann. Probab.**20,** 504–537 (1992).

[20] Stroock, D. W. *An introduction to the theory of Large Deviations* Springer, Berlin, 1984.

[21] Varadhan, S.R.S., *Large Deviations and Applications* Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia,1984.

[22] Xu, T., Zhang, T., Large deviation principles for 2-D stochastic Navier-Stokes equations driven by Lévy processes. J. Funct. Anal. **257**, 1519–1545 (2009).