Journal de Mathématiques,
Mathématiques et Applications
Fondamentales & Informatique
JMMAFI, ISSN 2411-7188,**vol.5**,
2018, pp. 5-23

Grandes Déviations pour l'équation différentielle stochastique avec retard sur l'espace de Besov-Orlicz

D.M RAKOTONIRINA [1] ,A.R RANDRIANOMENJANAHARY [2] et T.J. RABEHERIMANANA [3]

Domaine des Sciences & Technologie
Mention Mathématiques et Informatique, B.P. 906, Ankatso 101,
Antananarivo, Madagascar

Abstract : In this paper, we develop a large deviations principle for stochastic system with memory equations driven by small multiplicative white noise in Besov-Orlicz space.

Keys Words : large deviations principle, stochastic system with delay, Besov-Orlicz space.

Résumé : Dans cet article, nous étudions un principe de grandes déviations concernant les équations différentielles stochastiques avec retard dans l'espace de Besov-Orlicz.

Mots Clés : principe de grandes déviations, équation différentielle stochastique avec retard, espace de Besov-Orlicz .

Introduction

Au cours des dernières années, de nombreux résultats ont été obtenus sur le mouvement brownien et le processus de diffusion dans les espaces de trajectoire avec des topologies plus fortes que celles de l'uniforme habituelle. Le principe des grandes déviations de Freidlin-Wentzel [8] a été développé dans les espaces de Hölder pour le mouvement brownien dans Baldi, P., Ben Arous, G. & Kerkyacharian, G. [1] et pour les processus de diffusion dans Ben Arous, G. & Ledoux, M. [3]. Plus tard, une extension dans les espaces de Besov a été envisagée dans Eddahbi, M., Nzi, M. & Oukinine, Y. [7], Lakhel, E. H. [9] et Roynette [13]. Dans cet article, nous démontrons qu'on peut étendre les résultats de Mellouk, M.[10],

1. hdrakotonirina@gmail.com
2. abakeely@gmail.com
3. rabeherimanana.toussaint@yahoo.fr

Sallah-Edlin, A., Mohammed & Tusheng, Z. [14] et Randriamanirisoa S.H.& Rabeherimanana T.J.(pour le cas Y=Z=0) [12] à la topologie de l'espace de Besov-Orlicz.

Soit $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ où $\Omega = \mathcal{C}([0,m], \mathbb{R}^k)$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^k$ muni de la topologie de la convergence uniforme définie par la norme uniforme $\| f \|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,m]} |f(t)|$ et posons $\mathcal{H}([0,1], \mathbb{R}^k)$ son sous-espace de Cameron-Martin constitué des fonctions h absolument continues satisfaisant $h(0) = 0$ et $\int_0^m |\dot{h}(s)|^2 ds < \infty$ $\Big(\dot{h}(t) = \dfrac{dh}{dt}\Big)$. Pour $h \in \mathcal{H}([0,m], \mathbb{R}^k)$, nous posons $\| h \|_{\mathcal{H}} = (\int_0^m |\dot{h}(s)|^2 ds)^{1/2}$.

Soient, $b = (b_1, ..., b_d) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et
$\sigma = (\sigma_{ij})_{i=1,...,d, j=1,...,l} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^l$ des fonctions Boréliennes mesurables.

Soit $\tau > 0$ fixé un délai et φ une fonction continue sur $[-\tau, 0]$.

Considérons l'équation différentielle avec retard définie par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, X_{t-\tau})dt & si\ t \in (0, \infty) \\ \\ X_t = \varphi(t) & si\ t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{0.1}$$

et l'équation différentielle stochastique perturbée avec délai associée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, X_{t-\tau})dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(t, X_t, X_{t-\tau})dW_t & si\ t \in (0, \infty) \\ X_t = \varphi(t) & si\ t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{0.2}$$

Le reste de l'article se présente comme suit. Dans la section 1, nous introduisons quelques notions et rappelons quelques résultats sur les espaces de Besov-Orlicz. Dans la section 2, nous donnons quelques définitions et des résultats généraux. La section 3 contient le principal résultat de ce travail. La section 4 et 5 seront consacrées à la preuve du résultat principal.
Dans toute la suite, nous supposerons que le retard $\tau = 1$ et que les constantes peuvent varier d'une ligne à une autre.

1-Préliminaire et Notations

Nous rappelons en premier lieu des notions de base pour les espaces de Besov-Orlicz.
Soit $B^0_{M_2,w_\alpha}$ l'espace de Besov-Orlicz séparable des fonctions continues $g : [0,m] \to \mathbb{R}^l$ avec $g(0) = 0$.
Soit $B^\varphi_{M_2,w_\alpha}$ l'ensemble de l'espace de Besov-Orlicz de toutes les fonctions continues $f : [-1,m] \to \mathbb{R}^d$ telle que $f(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in [-1,0]$.
Soit $I = [0,m]$ et notons $L^p(I)$ l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$, $(1 \leq p < \infty)$.
Soit A_{M_2} l'espace d'Orlicz sur I correspondant à la fonction de Young $M_2(x) = \exp(x^2) - 1$ muni de la norme

$$\| f \|_* = \inf\{\tau > 0, \frac{1}{\tau}[1 + \int_0^m M_2(\tau|f(t)|)dt]\}.$$

Pour quelques détails sur l'espace d'Orlicz, voir Cieleski, Z., Kerkyacharian, G. & Roynette, B. [4]. Dans cet article, nous utilisons la norme équivalente dans A_{M_2} suivante

$$\parallel f \parallel_{M_2} = \sup_{p \geq m} \frac{\parallel f \parallel_p}{\sqrt{p}}.$$

Pour la preuve de l'équivalence entre $\parallel f \parallel_{M_2}$ et $\parallel f \parallel_*$, on peut consulter Cieleski, Z., Kerkyacharian, G. & Roynette, B. [4].
Notons que pour $p_0 \geq m$

$$\parallel f \parallel_{M_2} = \sup_{p \geq p_0} \frac{\parallel f \parallel_p}{\sqrt{p}}.$$

Pour $f \in L^p(I)$, $m \leq p < \infty$, considérons le module de continuité pour la norme dans $L^p(I)$

$$w_p(f,t) := \sup_{0 \leq h \leq t \leq m} \parallel \Delta_h f \parallel_p,$$

avec

$$\Delta_h f(x) = 1_{[0,1-h]}(x)(f(x+h) - f(x)), \forall h \in [0,1].$$

Le module de continuité pour la norme d'Orlicz est défini par

$$w_{M_2}(f,t) = \sup_{0 \leq h \leq t \leq m} \parallel \Delta_h f \parallel_{M_2}.$$

Soit $B^{\varphi}_{M_2,w_\alpha}$ l'espace de Besov-Orlicz des fonctions continues $f : [-1,m] \to \mathbb{R}^d$ telles que $\parallel f \parallel_{M_2,w_\alpha} < \infty$. Pour tout $\alpha > 0$, on pose

$$\parallel f \parallel_{M_2,w_\alpha,} = \parallel f \parallel_{M_2} + \sup_{0 \leq t \leq m} \frac{w_{M_2}(f,t)}{w_{\alpha,\lambda}(t)}$$

où $w_{\alpha,\lambda}(t) = t^\alpha (1 + \log \frac{1}{t})^\lambda, \forall \alpha > 0$.

Nous ferons usage de l'équivalent de Cieleski, Z., Kerkyacharian, G. & Roynette, B. [4]. Soit $\chi_1, \chi_{j,k}, j = 0,1...,k = 1...2^j, supp\chi_{j,k} = [(k-1)/2^j, k/2^j]$, l'ensemble des fonctions de Haar sur l'intervalle $[0,1]$, et soit $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_{j,k}(t) = \int_0^t \chi_{j,k}(s)ds$ l'ensemble des fonctions de Schauder. Pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$, soit $\{A_n(f), n \geq 0\}$ son développement en série de Schauder donné par

$$f(t) = A_0(f)\varphi_0(t) + A_1(f)\varphi_1(t) + \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \sum_{j,k} A_n(f)\varphi_{j,k}(t)$$

où $A_0(f) = f(0), A_1(f) = f(1) - f(0)$ et

$$A_n(f) \quad = \quad 22^{\frac{j}{2}} \Big[\Big(f(\frac{2k-1}{2^{j+1}} \Big) - \frac{1}{2} \Big(f\Big(\frac{2k}{2^{j+1}}\Big) + f\Big(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\Big)\Big)\Big].$$

Soit $B^{\varphi,0}_{M_2,w_\alpha}$ le sous-espace de $B^{\varphi}_{M_2,w_\alpha}$, qui est un espace de Banach séparable correspondant à la fonction $f \in B^{\varphi}_{M_2,w_\alpha}$ telle que $\parallel f \parallel_p = o(\sqrt{p})$ quand $p \to \infty$, $w_p(f,t) = o(\sqrt{p}w(t))$ quand $\frac{1}{p} \wedge t \to 0$.

***Théorème* 1.1.** *1) Soit $p_0 \geq 0$, $f \in B^{\varphi,0}_{M_2,w_\alpha}$ ssi*

$$\max\Big\{|A_0(f)|, |A_1(f)|, \sup_{j\geq 0}\sup_{p\geq p_0} \frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\frac{1}{2}}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |A_n(f)|^p\Big]^{1/p}\Big\} < \infty. \tag{1.1}$$

2) $f \in B^{\varphi,0}_{M_2,w_\alpha}$ ssi

$$\lim_{j\vee p\to\infty} \frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\frac{1}{2}}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |A_n(f)|^p\Big]^{1/p}\Big\} = 0. \tag{1.2}$$

Considérons les normes suivantes qui sont cruciales dans la preuve de nos résultats :

$$\| f \|^{**} = \sup_{0\leq s<t\leq 1} \frac{|f(t)-f(s)|}{w(t-s)}$$

celle-ci est dominée par la norme

$$\| f \|^{*} = \max\Big(|f(1)|, \sup_{j\geq 0}\sup_{2^j+1\leq n\ \leq 2^{j+1}} \frac{|A_n(f)|}{\sqrt{1+j}}\Big).$$

Il est facile de voir qu'il existe $D_1 > 0$ et $D_2 > 0$ tels que $\| f \|_{M_2,w} \leq D_1 \| f \|^{**} \leq D_2 \| f \|^{*}$.

2-Définitions et Résultats généraux

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et résultats.

Définition 2.1. *Une fonction $I : E \longrightarrow [0;+\infty]$ est dite une fonctionnelle d'action si elle est semi-continue inférieurement (s.c.i) i.e. $\forall f_n \to f$, alors $I(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(f_n)$. De plus, si pour chaque $a < \infty$, $\Gamma_a = \{x \in E, I(x) \leq a\}$ est compact, alors I est une bonne fonctionnelle d'action.*

Définition 2.2. *Pour une fonction I, la famille de probabilité $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait le PGD avec la bonne fonctionnelle d'action I si on a :*

i) Pour tout ouvert O de E

$$\liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(O) \geq -I(O)$$

ii) Pour tout fermé F de E

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(F) \leq -I(F).$$

Notons par $\mathcal{H}$ l'espace de Cameron-Martin, c'est-à-dire

$$\mathcal{H} = \{h(t) = \int_0^t \dot{h}(s)ds : [0,m] \to \mathbb{R}^l : \int_0^m |\dot{h}(s)|^2 ds < \infty\}$$

Soit $g \in B^{\varphi,0}_{M_2,w}$ est absolument continue, $g : [0,m] \to \mathbb{R}^l$ avec

$$e(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^m |\dot{g}(s)|^2 ds & si\ g \in \mathcal{H} \\ \\ +\infty & sinon \end{cases}.$$

Mellouk, M. & Millet, A. [11] ont prouvé le théorème de Schilder suivant

Théorème 2.3. *Soit P^ε la loi de ϵW sur $B^{\varphi,0}_{M_2,w_\alpha}$ muni de la norme $\|\|_{M_2,w_\alpha}$, alors P^ε satisfait le PGD avec la bonne fonctionnelle d'action $I(.)$ définie par $I(g) = \dfrac{1}{2} \| g \|^2_{\mathcal{H}}$.*

Théorème 2.4. *[7] Il existe une constante $K = K_l$ telle que pour tout $\lambda > 0$ et tout $\mu > 0$ avec $\lambda > 4l\mu$ et $\lambda > 2\sqrt{\ln 2}$, on a*

$$P[\| W \|^{**} \geq \lambda, \| W \| \leq \mu] \leq K \max(1, l(\frac{\lambda}{4l\mu})^2) \exp(-\frac{\lambda^2}{K} \ln(\frac{\lambda}{4l\mu})).$$

Théorème 2.5. *Soit Q^ε la famille de mesure de probabilités sur un espace Polonais E satisfaisant le PGD avec comme bonne fonctionnelle d'action λ et soit $F : E \to E'$ une fonction continue. Notons par $Q^\varepsilon = P^\varepsilon \circ F^{-1}$ la famille de mesure image de P^ε, alors $\{Q^\varepsilon\}$ satisfait le PGD avec la bonne fonctionnelle d'action $\tilde{\lambda}$ définie par*

$$\tilde{\lambda}(y) = \inf_{x : f(x) = y} \lambda(x).$$

3-Résultats principaux

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et considérons l'équation différentielle stochastique perturbée avec délai définie par

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s, X_{s-1})ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(s, X_s, X_{s-1})dW_s \tag{3.1}$$

où B est un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Nous supposons aussi que les coefficients σ, b satisfont les conditions suivantes :

(H_0) Soient, $b = (b_1, ..., b_d) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma = (\sigma_{ij})_{i=1,...,d, j=1,...,l} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^l$ des fonctions Boréliennes mesurables

(H_1) La fonction $b(., x, \tilde{x})$ est conjointement mesurable en $(x, \tilde{x})$ et il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\| b(., x, \tilde{x}) \| \leq C(1 + |x|) \ pour\ tous\ (x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

(H_2) La fonction $\sigma(., x, \tilde{x})$ est conjointement mesurable en $(x, \tilde{x})$ et il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\| \sigma(., x, \tilde{x}) \| \leq C(1 + |x|) \ pour\ tous\ (x, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

(H_3) Les fonctions b, σ sont Lipschitziennes i.e. il existe des constantes C_1, C_2 telles que pour tous $x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^d$, et $t \in [0, \infty)$

$$\| b(t, x_1, \tilde{x}_1) - b(t, x_2, \tilde{x}_2) \|_{\mathbb{R}^d} \leq C_1(|x_1 - x_2| + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|)$$

$$\| \sigma(t, x_1, \tilde{x}_1) - \sigma(t, x_2, \tilde{x}_2) \|_{\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^l} \leq C_1(|x_1 - x_2| + |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|)$$

(H_4)

$$\lim_{s \to t} \sup_{x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d} |b(s, x, \tilde{x}) - b(t, x, \tilde{x})| = 0$$

$$\lim_{s \to t} \sup_{x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d} |\sigma(s, x, \tilde{x}) - \sigma(t, x, \tilde{x})| = 0$$

Sous ces hypothèses, l'équation (3.1) admet une solution unique $X = (X_t, t \in I)$ qui est $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,m]}$-mesurable.
Pour $h \in \mathcal{H}$, définissons le squelette

$$G_t(h) = G_0(h) + \int_0^t b(s, G_s(h), G_{s-1}(h))ds + \int_0^t \sigma(s, G_s(h), G_{s-1}(h))\dot{h}_s ds,$$

$t \in [0, \infty)$.
Définissons $\tilde{I} : B^{\varphi,0}_{M_2,w} \to [0, \infty]$ par

$$\tilde{I}(\tilde{h}) = \inf\{\frac{1}{2} \int_0^m |\dot{h}_s|^2 ds; h \in \mathcal{H} \ tel\ que\ G(h) = \tilde{h}\}. \tag{3.2}$$

***Théorème* 3.1.** *Supposons que l'ensemble des conditions* $(H_0) - (H_1) - (H_2) - (H_3)$ *soit vérifié. Soit* μ_ε *la loi de* X^ε *solution de* (0.2) *sur* $B^{\varphi,0}_{M_2,w}$ *avec la norme* $\| . \|_{M_2,w}$. *Alors, la famille* μ_ε *satisfait le principe de Grandes Déviations avec la bonne fonctionnelle d'action* $\tilde{I}(\tilde{h})$ *définie dans* (3.2).

4-Régularité de la solution dans l'espace de Besov-Orlicz

Il est clair que le processus $\{\int_0^t b(s, X_s, X_{s-1})ds, t \in I\}$ appartient presque sûrement à $B^{\varphi,0}_{M_2,w}$. Alors, il reste à montrer que le processus $\{\int_0^t \sigma(s, X_s, X_{s-1})dW_s, t \in I\}$ satisfait (1.1) et (1.2). Nous allons prouver le résultat dans le cas $k = d = 1$.
Posons

$$Y_t = \int_0^t \sigma(s, X_s, X_{s-1})dW_s.$$

Montrons que pour certains p_0, nous avons pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\sup_{j \geq 0} \sup_{p \geq p_0} \frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^\alpha} \Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |A_n(Y_.)|^p \Big]^{1/p} < \infty \ p.s. \tag{4.1}$$

$$\lim_{j \vee p \to \infty} \frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\frac{1}{2}}} \Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |A_n(f)|^p \Big]^{1/p} \Big\} = 0. \tag{4.2}$$

Pour montrer la relation (4.1), soit $\lambda > 0$, en utilisant l'inégalité de Chebychev, nous avons

$$P\Big(\frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\alpha}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}|A_n(Y_.)|^p\Big]^{1/p} > \lambda\Big) \leq \frac{\lambda^{-p}2^{-j}}{\sqrt{\frac{p}{2}}(1+j)^{\alpha p}}\Big(\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}|A_n(Y_.)|^p\Big)$$

$|A_n(Y_.)|$ est dominé par les termes de la forme

$$A := |\int_0^1 f_{\frac{2k-1}{2^{j+1}},\frac{2k}{2^{j+1}}(s)}dW_s|,\ et\ B := |\int_0^1 f_{\frac{2k-2}{2^{j+1}},\frac{2k-1}{2^{j+1}}(s)}dW_s|,$$

où

$$f_{r,t}(s) = 1_{r<s\leq t}\sigma(t, X_s, X_{s-1}) + 1_{s\leq r\leq t}[\sigma(t, X_s, X_{s-1}) - \sigma(r, X_s, X_{s-1})].$$

Pour $p \geq 2$, en appliquant l'inégalité de Barlow-Yor [2], pour A et B, alors il existe une constante C_p telle que

$$E|A_n(Y_.)|^p \leq CM^p p^{\frac{p}{2}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\alpha}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}|A_n(Y_.)|^p\Big]^{1/p} > \lambda\Big) &\leq \frac{\lambda^{-p}2^{-j}}{\sqrt{\frac{p}{2}}(1+j)^{\alpha p}}\Big(\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}E|A_n(Y_.)|^p\Big) \\ &\leq \Big(\frac{C}{\lambda}\Big)^p\frac{1}{(1+j)^{p\alpha}}. \end{aligned}$$

Choisissons $p_0 \geq \dfrac{1}{\alpha}$ et λ assez-grand, la série

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{p\geq p_0}\Big(\frac{C}{\lambda}\Big)^p\frac{1}{(1+j)^{p\alpha}}$$

converge.
Pour prouver (4.2), remarquons que comme ci-dessus, $|A_n(Y_.)|$ est dominé par les termes de la forme A et B, alors les inégalités exponentielles donnent l'existence de constantes positives K_1 et K_2 telles que pour tout $\lambda > 0$ assez-grand,

$$P\Big(\frac{1}{\sqrt{1+j}}\sup_n|A_n(Y_.)| > \lambda\Big) \leq K_1\exp\frac{-\lambda^2(1+j)}{K_2M^2}.$$

Donc, par le lemme de Borel-Cantelli

$$\sup_{j\geq 1}\frac{1}{\sqrt{1+j}}\sup_n|A_n(Y_.)| < \infty\quad p.s.$$

Or

$$2^{-\frac{j}{p}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}|A_n(Y_.)|^p\Big]^{1/p} \leq \sup_n|A_n(Y_.)|.$$

Ainsi

$$\sup_{j\geq 1}\frac{2^{-\frac{j}{p}}}{p^{\frac{1}{2}}(1+j)^{\frac{1}{2}}}\Big[\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}}|A_n(Y_.)|^p\Big]^{1/p} \leq \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\sup_{j\geq 1}\sup_n|A_n(Y_.)|.$$

D'où le résultat.

5-Preuve du Théorème 3.1

Pour $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$, l'ensemble $\underline{t}_N = [Nt]/N$ ($[y]$ est la partie entière de y). Soit $X^\varepsilon = \{X^\varepsilon(t), 0 \leq t \leq 1\}$ la solution de (0.2) et $X_N^\varepsilon = \{X_N^\varepsilon(t), 0 \leq t \leq 1\}$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_N^\varepsilon(t) = b(t, X_N^\varepsilon(t), X_N^\varepsilon(t-1))dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma(\underline{t}_N, X_N^\varepsilon(\underline{t}_N), X_N^\varepsilon(\underline{t}_N - 1)))dW_t \quad (5.1)$$

Cas où b et σ sont bornés

Définissons la fonction
$F_N(.) : B^\varphi_{M_2,w_\alpha} \to B^{\varphi,0}_{M_2,w_\alpha}$

$$\begin{cases} F_N(w)(t) = \psi(t) \quad si \; -1 \leq t \leq 0 \\ F_N(w)(t) = F_N(w)(\frac{k}{N}) \\ + \int_{\frac{k}{N}}^t b(s, F_N(w)(s), F_N(w)(s-1)ds \\ +\sigma(\frac{k}{N}, F_N(w)(\frac{k}{N}), F_N(w)(\frac{k}{N} - 1))(w(t) - w(\frac{k}{N})) \; pour \; \frac{k}{N} \leq t \leq \frac{k+1}{N}. \end{cases}$$

Pour $g \in \mathcal{H}$ avec $e(g) \leq a$

$$\begin{cases} F_N(g)(t) = F_N(g)(0) \\ + \int_0^t b(s, F_N(g)(s), F_N(g)(s-1)ds \\ + \int_0^t \sigma(\underline{s}_N, F_N(\underline{s}_N), F_N(g)(\underline{s}_N - 1))\dot{g}_s ds \; pour \; t \in [0, \infty) \\ F_N(g)(t) = \psi(t) \quad si \; -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Notons que $X_N^\varepsilon(s) = F_N(\sqrt{\varepsilon}W)(s)$ où W est un mouvement brownien standard. Définissons $I_N(f) = \inf\{\frac{1}{2}e(g); F_N(g) = f\}$ pour chaque $f \in B^{\varphi,0}_{M_2,w}$

***Lemme* 5.1.** *Pour tout $a > 0$, la fonction $g \to F_N(g)$ est continue sur $\{\| g \|_{\mathcal{H}} \leq a\}$ dans $B^{\varphi,0}_{M_2,w}$ avec la norme $\| \,.\, \|_{M_2,w}$.*

Démonstration. Pour $t \in [0, 1]$, soient $g_1, g_2 \in \mathcal{H}$ tel que $\| g_1 \|_{\mathcal{H}} \vee \| g_2 \|_{\mathcal{H}} \leq a$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi_N(t) = \int_0^t &\Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N^{(1)}(g_1)(\underline{s}_N), F_N^{(1)}(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big) \\ &- \sigma\Big(\underline{s}_N, F_N^{(2)}(g_2)(\underline{s}_N), F_N^{(2)}(g_2)(\underline{s}_N - 1)\Big)\Big\} \times \dot{g}_2(s)ds \\ &+ \int_0^t \Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N^{(1)}(g_1)(\underline{s}_N), F_N^{(1)}(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)\Big\} \times \Big\{[\dot{g}_1(s) - \dot{g}_2(s)]ds\Big\} \\ + \int_0^t &\Big\{b\Big(s, F_N^{(1)}(g_1)(s), F_N^{(1)}(g_1)(s-1)\Big) - b\Big(s, F_N^{(2)}(g_2)(s), F_N^{(2)}(g_2)(s-1)\Big)\Big\}ds. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\| \Psi_N(t) \|_{M_2,w} \leq \| V_1 \|_{M_2,w} + \| V_2 \|_{M_2,w} + \| V_3 \|_{M_2,w} .$$

Posons

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \int_0^t \Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N-1)\Big) \\ &- \sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_2)(\underline{s}_N), F_N(g_2)(\underline{s}_N-1)\Big)\Big\} \times \dot{g}_2(s)ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(t) &= \int_0^t \Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N-1)\Big)\Big\} \\ &\times \Big\{[\dot{g}_1(s)-\dot{g}_2(s)]\Big\}ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3(t) &= \int_0^t \Big\{b\Big(s, F_N(g_1)(s), F_N(g_1)(s-1)\Big) \\ &- b\Big(s, F_N(g_2)(s), F_N(g_2)(s-1)\Big)\Big\}ds. \end{aligned}$$

T_3 est un cas particulier de T_1 si nous remplaçons σ par b dans T_1 et $\dot{g}_1$ par 1, il suffit de prouver que T_1, T_3 tendent vers zéro.

$$V_1 = \parallel T_1 \parallel_{M_2} + \sup_{-1\leq t\leq 1} \frac{w_{M_2}(T_1,t)}{w(t)}$$

Le condition de Lipschitz sur σ implique que

$$\parallel T_1 \parallel_{M_2} \leq C \parallel F_N(g_1) - F_n(g_2) \parallel \parallel g_2 \parallel_{\mathcal{H}} .$$

Pour le dernier terme, rappelons que

$$w_p(T_1,t) = \sup_{|h|\leq t} \parallel \Delta_h T_1 \parallel_p .$$

Donc

$$\parallel \Delta_h T_1 \parallel_p = (\int_{I_h} |T_1(t+h) - T_1(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, \text{ où } I_h = \{t \in I,\ t+h \in I\}$$

$$\begin{aligned} |T_1(t+h) - T_1(t)| &\leq |\int_t^{t+h} \Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N-1)\Big) \\ &- \sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_2)(\underline{s}_N), F_N(g_2)(\underline{s}_N-1)\Big)\Big\}\dot{g}_2(s)ds| \\ &\leq 2C \parallel F_N(g_1) - F_N(g_2) \parallel \parallel g_2 \parallel_{\mathcal{H}} |h|. \end{aligned}$$

Ainsi

$$w_p(T_1,t) = \sup_{|h|\leq t} \parallel \Delta_h T_1 \parallel_p \leq C \parallel F_N(g_1) - F_N(g_2) \parallel \parallel g_2 \parallel_{\mathcal{H}} |t|.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,1]} \frac{w_{M_2}(T_1,t)}{w(t)} &\leq 2C \parallel F_N(g_1) - F_N(g_2) \parallel \parallel g_2 \parallel_{\mathcal{H}} \frac{|t|}{\sqrt{t(1+\log\frac{1}{t})}} \\ &\leq K \parallel F_N(g_1) - F_N(g_2) \parallel \end{aligned}$$

D'où
$$\| T_1 \|_{M_2,w} \leq C_0 \| F_N(g_1) - F_N(g_2) \| \tag{5.2}$$
Pour compléter la preuve de la proposition, il reste à prouver que T_2 tende vers zéro quand $\| g_1 - g_2 \|_{M_2,w} \to 0$. On a :

$$\begin{aligned} T_2(t) &\leq \| \int_0^t \Big\{ [\dot{g}_1(s) - \dot{g}_2(s)] d\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)\Big\} \|_{M_2,w} \\ &+ \| \Big\{\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)\Big\}\Big\{[g_1(s) - g_2(s)]\Big\} \|_{M_2,w} \\ &\leq \| g_1 - g_2 \| \| \int_0^t d|\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)| \|_{M_2,w} \\ &+ C \| g_1 - g_2 \|_{M_2,w} \end{aligned}$$

où $|\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)|$ désigne la variation de $\sigma\Big(\underline{s}_N, F_N(g_1)(\underline{s}_N), F_N(g_1)(\underline{s}_N - 1)\Big)$ sur $[0, s]$.
Ainsi
$$\| T_2 \|_{M_2,w} \leq C \| g_1 - g_2 \|_{M_2,w} \ . \tag{5.3}$$
Combinons maintenant (5.2) et (5.3) nous avons

$$\| F_N(g_1) - F_N(g_2) \|_{M_2,w} \leq C_1 \| F_N(g_1) - F_N(g_2) \| + C \| g_1 - g_2 \|_{M_2,w},$$

en vertu de la continuité par rapport à la norme uniforme de la fonction $g \in \mathcal{H} \to F_N(g)$, (Voir Mellouk [10]) la preuve est complète. □

***Lemme* 5.2.** $\lim_{N\to+\infty} \sup_{g;e(g)\leq a} \sup_{-1\leq t\leq m} |F_N(g)(t) - F(g)(t)| = 0.$

Démonstration. Pour $g \in \mathcal{H}$ avec $\| g \|_{\mathcal{H}} \leq a$, on a

$$\begin{aligned} |F(g)(t) - F(g)(\underline{s}_N)| &\leq \int_{\underline{s}_N}^t |b(s, F(g)(s), F(g)(s-1))| ds \\ &+ \int_{\underline{s}_N}^t |\sigma(\underline{s}_N, F(g)(\underline{s}_N), F(g)(\underline{s}_N - 1)||\dot{g}|(s) ds \end{aligned}$$

Par la condition de croissance linéaire sur b et σ, nous avons

$$\begin{aligned} |F(g)(t)| &\leq |\psi(0)| + C \int_0^t (1 + 2 \sup_{-1\leq u\leq s} |F(g)(u)|) ds \\ &+ C \int_0^t (1 + 2 \sup_{-1\leq u\leq s} |F(g)(u)|)|\dot{g}|(s) ds \end{aligned}$$

Le Lemme de Gronwall implique que

$$\sup_{-1\leq u\leq m} |F(g)(u)| \leq C \exp(2m + a) = C_a \tag{5.4}$$

(5.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz impliquent que

$$|F(g)(t) - F(g)(\underline{s}_N)| \leq \tilde{C}_a C_a (\frac{1}{N})^{\frac{1}{2}} \to 0 \ quand\ N\ tend\ vers\ +\infty$$

uniformément sur l'ensemble $\{g; \parallel g \parallel_{\mathcal{H}} \leq a\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
|F_N(g)(t) - F(g)(t)| &\leq C\Big\{\int_0^t |F_N(g)(s) - F(g)(s)|ds + \int_0^t |F_N(g)(s-1) - \\
&\quad F(g)(s-1)|ds + \int_0^t \sup_{x,\tilde{x}} |\sigma(\underline{s}_N, x, \tilde{x}) - \sigma(s, x, \tilde{x}) \\
&\quad |\dot{g}|(s)ds + C\int_0^t |F_N(g)(s) - F(g)(s)||\dot{g}|(s)ds + \\
&\quad C\int_0^t |F_N(g)(s-1) - F(g)(s-1)||\dot{g}|(s)ds\Big\} \\
&\quad +C\int_0^t |F(g)(s) - F(g)(\underline{s}_N)||\dot{g}|(s)ds \\
&\quad +C\int_0^t |F(g)(s-1) - F(g)(\underline{s}_N - 1)||\dot{g}|(s)ds \\
&\leq C_a\Big[\frac{1}{\sqrt{N}} + \sup_s \sup_{x,\tilde{x}} |\sigma(\underline{s}_N, x, \tilde{x}) - \sigma(s, x, \tilde{x})|^2\Big] \\
&+ 2\int_0^t \sup_{-1\leq u\leq s} \parallel F_N(g)(u) - F(g)(u) \parallel ds \\
&+ 2\int_0^t \sup_{-1\leq u\leq s} \parallel F_N(g)(u) - F(g)(u) \parallel |\dot{g}|(s)ds
\end{aligned}$$

Cela donne

$$\parallel F_N(g)(t) - F(g)(t) \parallel \leq \bar{C}C_a\Big[\frac{1}{\sqrt{N}} + \sup_s \sup_{x,\tilde{x}} |\sigma(\underline{s}_N, x, \tilde{x}) - \sigma(s, x, \tilde{x})|^2\Big]$$

Par conséquent

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\|g\|_{\mathcal{H}}\leq a} \parallel F_N(g)(.) - F(g)(.) \parallel_\infty = 0. \tag{5.5}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\parallel F_N(g)(t) - F(g)(t) \parallel^{**} &\leq K_a\Big[\frac{1}{\sqrt{N}} + \sup_s \sup_{x,\tilde{x}} |\sigma(\underline{s}_N, x, \tilde{x}) - \sigma(s, x, \tilde{x})|^2\Big] + \\
&\quad C \sup_{0\leq u<v\leq 1} \int_u^v \frac{(1 + |\dot{g}|(s))|F_N(g)(s) - F(g)(s)|ds}{w(|v-u|)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$\begin{aligned}
\parallel F_N(g)(t) - F(g)(t) \parallel^{**} &\leq K_a\Big[\frac{1}{\sqrt{N}} + \sup_s \sup_{x,\tilde{x}} |\sigma(\underline{s}_N, x, \tilde{x}) - \sigma(s, x, \tilde{x})|^2\Big] + \\
&\quad 2C(1+ \parallel g \parallel_{\mathcal{H}}) \parallel F_N(g) - F(g) \parallel_\infty \sup_{0\leq u<v\leq 1} \frac{\sqrt{v-u}}{w(|v-u|)}
\end{aligned}$$

□

Nous prouvons que $\{X_N^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ définie par (5.1) est une bonne approximation exponentielle de $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ définie par

$$X^\varepsilon(t) = X^\varepsilon(0) + \int_0^t b(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1))ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1))dW_s \tag{5.6}$$

***Lemme* 5.3.** *Supposons les conditions H_3 et H_4 vérifiées, et supposons aussi que σ, b sont bornées, puis pour $m \geq 1$, $\delta > 0$, alors*

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\sup_{-1\leq t\leq m} |X^\varepsilon(t) - X_N^\varepsilon(t)|) = -\infty \tag{5.7}$$

Démonstration. Puisque le coefficient de dérive b n'est pas forcément borné, pour prouver (5.7), introduisons quelques résultats auxiliaires. Pour $N \geq 1$, par le théorème (2.3),

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P\Big(\sup_{1\leq k\leq N} |\sqrt{\varepsilon}(W_{k/N} - W_{(k-1)/N})| \geq N\Big) \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln P(\| \sqrt{\varepsilon} W \|_{M_2,w} \geq N) \\
&\leq -\inf\{\frac{1}{2} \| h \|_{\mathcal{H}}^2; \| h \|_{M_2,w} \geq N\} \\
&\leq -\frac{1}{2}N^2.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

En effet, si $h \in \mathcal{H}([0,1], \mathbb{R}^d)$ satisfait $\| h \|_{M_2,w} \geq N$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que $\| h \|_{\mathcal{H}} \geq N$.
Définissons l'ensemble

$$\Gamma_\varepsilon = \{ \sup_{1\leq k\leq N} |\sqrt{\varepsilon}(W_{k/N} - W_{(k-1)/N})| \leq N\} \bigcap \{\| \sqrt{\varepsilon} W \|_{M_2,w} \leq N\}, \tag{5.9}$$

par (5.8)

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P\Big(\sup_{1\leq k\leq N} |\sqrt{\varepsilon}(W_{k/N} - W_{(k-1)/N}) \geq N|\Big) \leq -\frac{1}{2}N^2 \tag{5.10}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln P(\Gamma_\varepsilon^c) = -\infty. \tag{5.11}$$

Pour prouver (5.7), soit $\Psi_N^\varepsilon(t) = X_N^\varepsilon(t) - X^\varepsilon(t)$ pour $t \geq 0$. Puis

$$\begin{aligned}
\Psi_N^\varepsilon(t) &= \int_0^t [b(s, X_N^\varepsilon(s), X_N^\varepsilon(s-1)) - b(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1))]ds \\
&+ \sqrt{\varepsilon} \int_0^t [\sigma(\underline{s}_N, X_N^\varepsilon(\underline{s}_N), X_N^\varepsilon(\underline{s}_N - 1)) - \sigma(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1))]dW_s
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Pour $\rho > 0$, définissons

$$\tau_{N,\rho}^\varepsilon := \inf\{t \geq 0; |X_N^\varepsilon(t) - X_N^\varepsilon(\underline{t}_N)| \geq \frac{\rho}{N}\}, \tag{5.13}$$

$$\Psi_{N,\rho}^\varepsilon(t) := \Psi_N^\varepsilon(t \wedge \tau_{N,\rho}^\varepsilon),$$

$$\upsilon_{N,\rho}^\varepsilon := \inf\{t \geq 0, |\Psi_{N,\rho}^\varepsilon(t)| \geq \frac{\delta}{N}\}$$

et

$$\theta_{N,\rho}^\varepsilon(t) = \int_\Omega \{\frac{\rho^2}{N^2} + |\Psi_{N,\rho}^\varepsilon(t)|^2\}^{\frac{1}{\varepsilon}} dP.$$

Puis

$$\begin{aligned} P(\sup_{0\le t\le 1}|\Psi_N^\varepsilon(t)|>\frac{\delta}{N}) &= P(\sup_{0\le t\le 1}|\Psi_N^\varepsilon(t)|>\delta,\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1)\\ &+ P(\sup_{0\le t\le 1}|\Psi_N^\varepsilon(t)|>\delta,\tau_{N,\rho}^\varepsilon> 1)\\ &\le P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1)+P(\upsilon_{N,\rho}^\varepsilon\le 1)\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1) &= P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1,\Gamma_\varepsilon)+P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1,\Gamma_\varepsilon^c)\\ &\le \sum_{k=1}^N P(\sup_{\frac{k-1}{N}\le t\le\frac{k}{N}}|X_N^\varepsilon(t)-X_N^\varepsilon(\frac{k-1}{N})|\ge\frac{\rho}{N},\Gamma_\varepsilon)+P(\Gamma_\varepsilon^c)\\ &\le \sum_{k=1}^N P\Big[\sup_{\frac{k-1}{N}\le t\le\frac{k}{N}}\parallel\int_{\frac{k-1}{N}}^t\sqrt{\varepsilon}\sigma(s,X^\varepsilon(s),X^\varepsilon(s-1))dW_s\parallel^{**}\ge\frac{\rho}{2N},\Gamma_\varepsilon\Big]\\ &+ P(\Gamma_\varepsilon^c).\end{aligned}$$

On a

$$\parallel\int_{\frac{k-1}{N}}^t\sqrt{\varepsilon}\sigma(s,X^\varepsilon(s),X^\varepsilon(s-1))dW_s\parallel^{**}\le 2C\sqrt{\varepsilon}\parallel W\parallel^{**}.$$

Par le théorème (2.4)

$$\begin{aligned} &P\Big[\sup_{\frac{k-1}{N}\le t\le\frac{k}{N}}\parallel\int_{\frac{k-1}{N}}^t\sqrt{\varepsilon}\sigma(s,X^\varepsilon(s),X^\varepsilon(s-1))dW_s\parallel^{**}\ge\frac{\rho}{2N},\Gamma_\varepsilon\Big]\\ &\le K\max(1,(\frac{\rho^2}{16N^4C^2\varepsilon l}))\exp(-\frac{\rho^2}{16KN^2C^2\varepsilon}\log(\frac{\rho}{4N^2C\sqrt{\varepsilon l}}))\end{aligned}$$

Etant donné $r>0,\rho>0$ et N suffisamment grand et on choisit $\frac{\rho^2}{16N^2C^2\varepsilon}\log(\frac{\rho}{4N^2C\sqrt{\varepsilon l}})>Kr$, alors

$$P\Big[\sup_{\frac{k-1}{N}\le t\le\frac{k}{N}}\parallel\int_{\frac{k-1}{N}}^t\sqrt{\varepsilon}\sigma(s,X^\varepsilon(s),X^\varepsilon(s-1))dW_s\parallel^{**}\ge\frac{\rho}{2N},\Gamma_\varepsilon\Big]\le K\exp(-\frac{r}{\varepsilon}) \tag{5.14}$$

(5.11) et (5.14) impliquent alors que

$$\lim_{N\to+\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon P(P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon\le 1))=-\infty \tag{5.15}$$

Pour $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, définissons $f_{\varepsilon,\rho}(y)=(\frac{\rho^2}{N^2}+|y|^2)^{1/\varepsilon}$, $y\in\mathbb{R}^d$. Par la formule d'Itô

$$M_t^{N,\rho}:=f_{\varepsilon,\rho}(\Psi_{N,\rho}^\varepsilon(t))-\int_0^{t\wedge\tau_{N,\rho}^\varepsilon}g_{\varepsilon,N}^\rho(s)ds-\frac{\rho^{2/\varepsilon}}{N^{2/\varepsilon}} \tag{5.16}$$

est une martingale avec valeur initiale zéro, où

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon,N}^\rho(t) &= \frac{2}{\varepsilon}(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\langle\Psi_N^\varepsilon(t),b(t,X^\varepsilon(s),X^\varepsilon(t-1))\\ &- b(t,X_N^\varepsilon(t),X_N^\varepsilon(t-1))\rangle+\frac{2}{\varepsilon}(\frac{1}{\varepsilon}-1)\varepsilon(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-2}\times\\ &|(\sigma(t,X^\varepsilon(t),X^\varepsilon(t-1))-\sigma(\underline{t}_N,X_N^\varepsilon(\underline{t}_N),X_N^\varepsilon(\underline{t}_N-1))\Psi_N^\varepsilon(t)|^2\\ &+ (\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi_N^\varepsilon(t)|)^{1/\varepsilon-1}|(\sigma(t,X^\varepsilon(t),X^\varepsilon(t-1))\\ &- \sigma(\underline{t}_N,X_N^\varepsilon(\underline{t}_N),X_N^\varepsilon(\underline{t}_N-1))|^2\end{aligned}$$

Pour $0 \leq t \leq \tau^{\varepsilon}_{N,\rho}$, notons que $X^{\varepsilon}_N(u) = \psi(u)$ et $X^{\varepsilon}(u) = \psi(u)$ pour $u \leq 0$, nous voyons que

$$\begin{aligned} g^{\rho}_{\varepsilon,N}(t) &\leq \frac{C}{\varepsilon} f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^{\varepsilon}_N(t)) + \{4(\frac{1}{\varepsilon} - 1)(\frac{\rho^2}{N^2} + |\Psi^{\varepsilon}_N(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-2} + 2(\frac{1}{\varepsilon} - 1)(\frac{\rho^2}{N^2} \\ &\quad + |\Psi^{\varepsilon}_N(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\} \times \Big\{\Big(\sigma(t, X^{\varepsilon}(t), X^{\varepsilon}(t-1)) \\ &\quad - \sigma(\underline{t}_N, X^{\varepsilon}(\underline{t}_N), X^{\varepsilon}(\underline{t}_N - 1))\Big)^2 + |\Psi^{\varepsilon}_N(t)|^2 + |X^{\varepsilon}_N(t) - X^{\varepsilon}_N(\underline{t}_N)|^2 \\ &\quad + |\psi(t-1) - \psi(\underline{t}_N - 1)|^2\Big\} \end{aligned}$$

Par continuité uniforme, pour $N \geq N_0$ et $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, on a

$$|\sigma(t, X^{\varepsilon}(t), \sigma(t, X^{\varepsilon}(t-1)) - \sigma(\underline{t}_N, X^{\varepsilon}(\underline{t}_N), X^{\varepsilon}(\underline{t}_N - 1))| < \frac{\rho}{N}$$

et

$$|\psi(t-1) - \psi(\underline{t}_N - 1)| < \frac{\rho}{N}.$$

Ainsi pour $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned} g^{\rho}_{\varepsilon,N}(t) &\leq C(\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{\varepsilon}) f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^{\varepsilon}_N(t)) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^{\varepsilon}_N(t)). \end{aligned}$$

Le théorème d'arrêt de Doob montre qu'il existe une constante $K < \infty$, indépendante de N, ε, ρ et N_0, tel que, pour $N \geq N_0$,

$$\theta^{\varepsilon}_{N,\rho}(t) \leq \frac{\rho^{2/\varepsilon}}{N^{2/\varepsilon}} + \frac{K}{\varepsilon} \int_0^t \theta^{\varepsilon}_{N,\rho}(s) ds, \quad t \in [0,1]$$

(voir par exemple, Deuschel & Stroock [6], p. 30). Par conséquent, pour $N \geq N_0$,

$$\theta^{\varepsilon}_{N,\rho}(1) \leq \exp\{\frac{1}{\varepsilon}(K + 2ln\rho - \ln N)\}$$

donc, pour $N \geq 1$

$$P(\upsilon^{\varepsilon}_{N,\rho} \leq 1) \leq \Big(\frac{N^2}{\rho^2 + \delta^2}\Big)^{1/\varepsilon} \theta^{\varepsilon}_{N,\rho}(1).$$

D'où,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_N \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \varepsilon \log P(\upsilon^{\varepsilon}_{N,\rho} \leq 1) = -\infty. \tag{5.17}$$

En combinant (5.15) et (5.17), nous avons prouvé (5.7) pour $m = 1$. Supposons maintenant (5.7) pour un entier m. Nous allons prouver que c'est aussi vrai pour $m+1$. Soient Ψ^{ε}_N, $\tau^{\varepsilon}_{N,\rho}$ définis dans (5.12) et (5.13). En outre, introduisons deux nouveaux temps d'arrêts :

$$\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho} := \inf\{t \geq 0; |X^{\varepsilon}(t-1) - X^{\varepsilon}_N(t-1)| \geq \frac{\rho}{N}\}, \tag{5.18}$$

$$\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho} := \inf\{t \geq 0; |X^{\varepsilon}(t-1) - X^{\varepsilon}_N(\underline{t}_N - 1)| \geq \frac{\rho}{N}\}, \tag{5.19}$$

et définissons $\Phi^\varepsilon_{N,\rho}(t) := \Psi^\varepsilon_N(t\wedge\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^\varepsilon_{N,\rho})$ et $\bar{v}^\varepsilon_{N,\rho} := \inf\{t\geq 0; |\Phi^\varepsilon_{N,\rho}(t)| \geq \frac{\delta}{N^{1/4}}\}$. Puis

$$\begin{aligned}P(\sup_{t\leq m+1}|\Psi^\varepsilon_N(t)| > \frac{\delta}{N}) &\leq P(\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^\varepsilon_{N,\rho}\leq m+1)\\ &\quad +P(\sup_{t\leq m+1}|\Psi^\varepsilon_N(t)|>\delta, \tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^\varepsilon_{N,\rho}>m+1)\\ &\leq P(\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\leq m+1)+P(\tau^\varepsilon_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\leq m+1)\\ &\quad +P(\bar{v}^\varepsilon_{N,\rho}\leq m+1).\end{aligned}$$

Comme dans la preuve de (5.15)

$$\lim_{N\to+\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P(\tau^\varepsilon_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\leq m+1) = -\infty. \tag{5.20}$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P\Big(\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\leq m+1)\\ &\leq \lim_{N\to+\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log P(\sup_{-1\leq t\leq m}|X^\varepsilon(t)-X^\varepsilon_N(t)|>\frac{\rho}{N}\Big) = -\infty\end{aligned} \tag{5.21}$$

En utilisant la formule d'Itô,

$$\bar{M}^{N,\rho}_t := f_{\varepsilon,\rho}(\Phi^\varepsilon_{N,\rho}(t)) - \int_0^{t\wedge\tau^\varepsilon_{N,\rho}\wedge\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho},\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}} g^\rho_{\varepsilon,N}(s)ds - \frac{\rho^{2/\varepsilon}}{N^{2/\varepsilon}} \tag{5.22}$$

est une martingale avec valeur initiale zéro, où

$$\begin{aligned}g^\rho_{\varepsilon,N}(t) &\leq \frac{2}{\varepsilon}(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}|\Psi^\varepsilon_N(t)|(|\Psi^\varepsilon_N(t)|+|X^\varepsilon(t-1)-X^\varepsilon_N(t-1)|)\\ &\quad +\{4(\frac{1}{\varepsilon}-1)(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-2}+2(\frac{1}{\varepsilon}-1)(\rho^2\\ &\quad +|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\}\times\Big\{\Big(\sigma(t,X^\varepsilon(t),X^\varepsilon(t-1))\\ &\quad -\sigma(\underline{t}_N,X^\varepsilon(\underline{t}_N),X^\varepsilon(\underline{t}_N-1))\Big)^2+|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2+|X^\varepsilon_N(t)-X^\varepsilon_N(\underline{t}_N)|^2\\ &\quad +|X^\varepsilon_N(t-1)-X^\varepsilon_N(\underline{t}_N-1)|^2+|X^\varepsilon(t-1)-X^\varepsilon_N(t-1)|^2\Big\}\\ &\leq \frac{2}{\varepsilon}(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}|\Psi^\varepsilon_N(t)|(|\Psi^\varepsilon_N(t)+\frac{\rho}{N})+\{4(\frac{1}{\varepsilon}-1)\\ &\quad \times(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-2}|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2+2(\frac{\rho^2}{N^2}+|\Psi(t)|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}-1}\}\\ &\quad \times(|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2+4\frac{\rho^2}{N^2})\\ &\leq C(\frac{1}{\varepsilon}+1+\frac{1}{\varepsilon})f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t)))\\ &\leq \frac{C}{\varepsilon}f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t))\end{aligned}$$

pour $s\leq\tau^\varepsilon_{N,\rho}\wedge\tau^{1,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge\tau^{2,\varepsilon}_{N,\rho}\wedge(m+1)$, et n suffisamment grand. En utilisant (5.20), (5.21) et en suivant la preuve du cas $m=1$, on voit que (5.7) est également vrai pour $m+1$. Ceci complète la preuve du lemme □

Preuve du théorème 3.1. Notons que $X^\varepsilon_N(t) = F_N(\sqrt{\varepsilon}W)(t)$ où W est un mouvement Brownien. Le théorème se déduit du lemme (5.1), (5.2), (5.7) et du principe de contraction (Théorème 4.2.23 [5]). □

Cas où b et σ ne sont pas bornés

Pour $R > 0$, définissons $m_R := \sup\{|b(t,x,\tilde{x}),|\sigma(t,x,\tilde{x})|, t \in [0,m], |x| \leq R, |\tilde{x}| \leq R\}$ et $b_R^i =:= (-m_R - 1) \vee b_i \wedge (m_R + 1)$, $\sigma_{i,j}^R =:= (-m_R - 1) \vee \sigma_{i,j} \wedge (m_R + 1)$, $1 \leq i, j \leq d$.

Posons $b_R := (b_1^R, ..., b_d^R)$ et $\sigma_R := (\sigma_{i,j}^R)_{1 \leq i,j \leq d}$. Puis $b_R(t,x,\tilde{x}) = b(t,x,\tilde{x})$, $\sigma_R(t,x,\tilde{x}) = \sigma(t,x,\tilde{x})$ pour $t \in [0,m], |x| \leq R, |\tilde{x}| \leq R$. De plus b_R, σ_R satisfont la condition H_3 avec la même constante de Lipschitz. Soit $X_R^\varepsilon(.)$ la solution de

$$\begin{cases} X_R^\varepsilon(t) = X_R^\varepsilon(0) + \int_0^t b_R(s, X_R^\varepsilon(s), X_R^\varepsilon(s-1))ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \sigma_R(s, X_R^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1))dW_s \\ X_R^\varepsilon(t) = \psi(t), \qquad t \in [-1, 0] \end{cases} \tag{5.23}$$

Pour $e(g) < \infty$ avec $g \in \mathcal{H}$, soit $F_R(g)$ la solution de

$$\begin{cases} F_R(g)(t) = F_R(g)(0) \\ + \int_{\frac{k}{N}}^t b(s, F_R(g)(s), F_R(g)(s-1), r(s))ds \\ + \sigma(s, F_R(g)(s), F_R(g)(s-1))\dot{g}_s ds \ pour \ t \in [0, \infty) \\ X_t^\varepsilon = \psi(t) \quad si \ -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Définissons $I_R(f) = \inf\{\frac{1}{2}e(g); F_N(g) = f\}$ pour chaque $f \in B_{M_2,w}^{\varphi,0}$.
Si $\sup\limits_{-1 \leq t \leq m} | F(t) | \leq R$, alors $F(g) = F_R(g)$. Conséquence,

$$I(f) = I_R(f), \ pour \ tout \ f, \ avec \ \sup_{-1 \leq t \leq m} | F(g)(t) | \leq R. \tag{5.24}$$

***Proposition* 5.4.** *Fixons $m \geq 1$. Pour $\delta > 0$,*

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log P(\sup_{-1 \leq t \leq m} |X^\varepsilon(t) - X_R^\varepsilon(t)| > \delta) = -\infty \tag{5.25}$$

Démonstration. Nous raisonnons encore par récurrence. La preuve pour le cas $m = 1$ est similaire à celle du lemme (5.7). Supposons que (5.25) est vraie pour m. Nous allons prouver qu'il est également valable pour $m + 1$.
Soit $\Psi_R^\varepsilon(t) := X^\varepsilon(t) - X_R^\varepsilon(t)$. Pour $R_1 > 0$, définissons $\upsilon_{R_1}^\varepsilon := \inf\{t \geq 0, |X^\varepsilon(t)| \geq R_1\}$. Pour $R > R_1$, on a

$$\begin{aligned} \Psi_R^\varepsilon(t \wedge \upsilon_{R_1}^\varepsilon) &= \int_0^{t \wedge \upsilon_{R_1}^\varepsilon} [b_R(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1)) - b_R(s, X_R^\varepsilon(s), X_R^\varepsilon(s-1))]ds \\ &+ \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t \wedge \upsilon_{R_1}^\varepsilon} [\sigma_R(s, X^\varepsilon(s), X^\varepsilon(s-1)) - \sigma_R(s, X_R^\varepsilon(s), X_R^\varepsilon(s-1))]dW_s \end{aligned}$$

Pour $\rho > 0$, définissons $\tau_{R,\rho}^\varepsilon := \inf\{t \geq 0; |X^\varepsilon(t-1) - X_R^\varepsilon(t-1)| \geq \rho\}$, $\Psi_{R,\rho}^\varepsilon(t) := \Psi_R^\varepsilon(t \wedge \upsilon_{R_1}^\varepsilon \wedge \tau_{R,\rho}^\varepsilon)$, $\upsilon_{R,\rho}^\varepsilon := \inf\{t \geq 0, |\Psi_{R,\rho}^\varepsilon(t)| \geq \delta\}$ et $\theta_{R,\rho}^\varepsilon(t) = \int_\Omega \{\rho^2 + |\Psi_{N,\rho}^\varepsilon(t)|^2\}^{\frac{1}{\varepsilon}} dP$. Puis

$$\begin{aligned} P(\sup_{-1 \leq t \leq m+1} |\Psi_R^\varepsilon(t)| > \delta) &\leq P(\upsilon_{R_1}^\varepsilon \leq m+1) + P(\upsilon_{R,\rho}^\varepsilon \leq m+1) + P(\tau_{R,\rho}^\varepsilon \leq m+1) \\ &\leq P(\tau_{N,\rho}^{1,\varepsilon} \leq m+1) + P(\tau_{N,\rho}^\varepsilon \wedge \tau_{N,\rho}^{2,\varepsilon} \leq m+1) \\ &\quad + P(\bar{\upsilon}_{N,\rho}^\varepsilon \leq m+1) \\ &\leq P(\sup_{-1 \leq t \leq m+1} |X^\varepsilon(t)| > R_1) \qquad (5.26) \\ &+ P(\sup_{-1 \leq t \leq m+1} |X^\varepsilon(t) - X_R^\varepsilon(t)| > \rho) + P(\upsilon_{R,\rho}^\varepsilon \leq m+1) \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\sup_{-1\le t\le m} |X^\varepsilon(t) - X^\varepsilon_R(t)| > \delta) = -\infty \tag{5.27}$$

Par la formule d'Itô

$$M_t^{R,\rho} := f_{\varepsilon,\rho}(\Phi^\varepsilon_{R,\rho}(t)) - \int_0^{t\wedge \upsilon^\varepsilon_{R_1}\wedge \tau^\varepsilon_{R,\rho}} g^\rho_{\varepsilon,R}(s)ds - \rho^{2/\varepsilon} \tag{5.28}$$

est une martingale avec valeur initiale zéro, où comme dans la preuve du lemme (5.7), pour $s \le t \wedge \upsilon^\varepsilon_{R_1} \wedge \tau^\varepsilon_{R,\rho}$,

$$\begin{aligned} g^\rho_{\varepsilon,R}(t) &\le C(\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{\varepsilon}) f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_R(t)) \\ &\le \frac{C}{\varepsilon} f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_R(t)). \end{aligned} \tag{5.29}$$

Ceci implique que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\upsilon^\varepsilon_{R,\rho} \le 1) \le \log\Big(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta^2}\Big) + C \tag{5.30}$$

Par conséquent, il résulte de (5.26), (5.27) et (5.29) que

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\sup_{-1\le t\le m+1} |\Psi^\varepsilon_R(t)| > \delta) &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\sup_{-1\le t\le m+1} |X^\varepsilon(t)| > R_1) \\ &\quad \vee \{\log\Big(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta^2}\Big) + C\} \end{aligned}$$

Par la Proposition 3.5 dans Salah-Eldin, A., Mohammed & Tusheng, Z [14], en faisant tendre ρ vers 0, et puis R_1 vers l'infini, nous avons (5.25) pour $m+1$.
□

Lemme 5.5. *I(.) est une bonne fonctionnelle d'action sur $B^{\varphi,0}_{M_2,w}$, i.e., pour tout $\alpha \ge 0$, l'ensemble $\{f; I(f) \le \alpha\}$ est compact.*

Démonstration. Comme dans le lemme (5.2), nous pouvons montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{g; e(g)\le a} \sup_{-1\le t\le m} |F_N(g)(t) - F(g)(t)| = 0.$$

En particulier, ceci implique que $F(.)$ est continue sur l'ensemble $\{g; e(g) \le \alpha\}$. Puisque $e(.)$ est une bonne fonctionnelle d'action, alors $I(.)$ est aussi une bonne fonctionnelle d'action. □

Preuve du théorème 3.1. Pour $R > 0$, soit $C \subset B^{\varphi,0}_{M_2,w}$ un sous-ensemble fermé et posons $C_R = C \cap \{f; \| f \|_{M_2,w} \le R\}$. Notons par C^δ_R le voisinage d'ordre δ de C_R et soit μ^δ_R la loi de X^ε_R. Nous avons

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(C) &\le \mu_\varepsilon(C_{R_1}) + P(\sup_{-1\le t\le m} | X^\varepsilon(t) |> R_1) \\ &\le \mu^R_\varepsilon(C^\delta_{R_1}) + P(\sup_{-1\le t\le m} | X^\varepsilon(t) - X^\varepsilon_R(t) |> \delta) \\ &+ P(\sup_{-1\le t\le m} | X^\varepsilon(t) |> R_1) \end{aligned}$$

En utilisant le principe de grande déviation pour $\{\mu_\varepsilon^R, \varepsilon > 0\}$ nous avons

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(C) &\leq (-\inf_{f\in C_{R_1}^\delta} I_R(f)) \vee (\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P(\sup_{-1\leq t\leq m} \mid X^\varepsilon(t) \mid > R_1)) \\ &\vee (\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P(\sup_{-1\leq t\leq m} \mid X^\varepsilon(t) - X_R^\varepsilon(t) \mid > \delta).\end{aligned}$$

Faisons tendre R vers l'infini, nous avons

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(C) \leq (-\inf_{f\in C_{R_1}^\delta} I(f)) \vee (\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P(\sup_{-1\leq t\leq m} \mid X^\varepsilon(t) \mid > R_1))$$

Encore par la proposition 3.5 dans Salah-Eldin, A., Mohammed & Tusheng, Z [14], en faisant tendre ρ vers 0, et puis R_1 vers ∞, on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(C) \leq -\inf_{f\in C} I(f),$$

ainsi, on a la majoration pour les fermés.
Soit G un sous-ensemble ouvert de $B_{M_2,w}^{\varphi,0}$. Soit $\delta > 0$ et fixons $\phi_0 \in G$ tel que $B(\phi_0, \delta) = \{f; \parallel f - \phi_0 \parallel_{M_2,w} \leq \delta\} \subset G$. Puis

$$\begin{aligned}-I_R(\phi_0) &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon^R(B(\phi_0, \frac{\delta}{2})) \\ &\leq (\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(G)) \\ &\vee \Big(\liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon P(\sup_{-1\leq t\leq m} \mid X^\varepsilon(t) - X_R^\varepsilon(t) \mid > \frac{\delta}{2})\Big).\end{aligned}$$

Notons que $I_R(\phi_0) = I(\phi_0)$ pour tout $R \geq \parallel \phi_0 \parallel_{M_2,w}$. En faisant tendre R vers l'infini, nous avons

$$-I(\phi_0) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(G). \tag{5.31}$$

Comme ϕ_0 est arbitraire, il s'ensuit que

$$-\inf_{f\in G} I(f) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(G), \tag{5.32}$$

ainsi, on a la minoration pour les ouverts.

□

Références

[1] Baldi, P., Ben Arous, G. & Kerkyacharian, G., *Large deviations and the Strassen theorem in Hölder norm.* Stoc. Proc. Appl. 71, 1992, 435-453.

[2] Barlow, M. T. and Yor, M. *Semimartingal inequalities via the Garsia-Rodemich Rumesey Lemma and application to local times.* Journal of functional Analysis, 49, 1982, 198-229.

[3] Ben Arous, G. & Ledoux, M., *Grandes déviations de Freidlin-Wentzell en norme Holdérienne*. Séminaire de probabilité (Strasbourg), tome 28 , pp. 293-299(1994).

[4] Cieleski, Z., Kerkyacharian, G. & Roynette, B., *Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens.* Studia Matematica. 107, pp. 171-204 (1993).

[5] Dembo, A. & Zeitouni, O., *Large deviations and Applications.* Boston : Jones and Bartlett(1993).

[6] Deuschel, J.D. & Stroock, D.W., *Large Deviations.* Academic Press, Boston, San Diego, New York, (1989).

[7] Eddahbi, M., Nzi, M. & Oukinine, Y., *Grandes déviations des diffusions sur les espaces de Besov-Orlicz et application.* Sochastics and Sochastic Reports, 65(1999), 299-315.

[8] Freidlin, M. & Wentzell, A., *On Small Random Perturbation of Dynamical Systems.* Russian Mathematical Surveys, 25, No.1(1970).

[9] Lakhel, E. H. *Large deviation for stochastic Volterra equation in the Besov-Orlicz space and application* Random Oper. and Stoch. Equ., Vol. 11, No. 4, 2003, pp. 333-350.

[10] Mellouk, M., *A large-deviation principle for random evolution equations.* International Statistical Institute (ISI) and Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability. Bernouille, vol 6, No. 6(2000), pp.977-999.

[11] Mellouk, M. & Millet, A., *Large deviations for stochastic Flows and anticipating SDEs in Besov-Orlicz spaces.* Stochastics and Stochastic Reports, 63 :3-4, (1998), 267-302.

[12] Randriamanirisoa, S.H.& Rabeherimanana T.J. *A large deviation principle for random evolution delay equations in Hölder space.* JMMAFI-Journal de Mathématiques, Mathématiques & Applications Fondamentales et Informatique, volume 1, 2014, pp. 17-32.

[13] Roynette, B., *Approximation en norme Besov de la solution d'une EDS.* Stochastics and Stochastic Reports, Volume 49(1994), 191-209.

[14] Salah-Eldin, A., Mohammed & Tusheng, Z, *Large deviations for stochastics systems with memory.* Stochastics and Stochastic Reports, Volume 49(1994), 191-209.