Journal de Mathématiques,
Mathématiques & Applications
Fondamentales et Informatique
JMMAFI 2016, **vol.3**, p 25-39

Principe de grandes déviations des diffusions réfléchies perturbées en norme höldérienne

L.I. RAJAONARISON[1] & T.J.RABEHERIMANANA[2]

Résumé. Dans cet article, nous démontrons un principe de grandes déviations pour les diffusions réfléchies perturbées en utilisant la technique d'Azencott en norme höldérienne.

MOTS CLES: Principe de grandes déviations, diffusions réfléchies perturbées, norme höldérienne.

Abstract. This paper is devoted to prove a large deviations principle for perturbed reflected diffusion processes using the method of Azencott in hölderian norm.

KEYWORDS: Large deviations principle, perturbed reflected diffusion process, hölderian norm.

1. Introduction

Dans [6], Bo et Zhang étudiaient le principe de grandes déviations associé aux diffusions perturbées et aux diffusions réfléchies perturbées, solutions

[1]ESPA Mention Eléctronique, B.P. 1500, Vontovorona Antananarivo, Madagascar
[2]Domaine des Sciences & Technologie, Mention Mathématiques et Informatiques, B.P. 906, Ankatso 101, Antananarivo, Madagascar

de (1.1) et (1.2) en norme uniforme habituelle

$$X_t^\varepsilon = x + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b(X_s^\varepsilon)ds + \beta \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s^\varepsilon,\ t\in[0,1] \quad (1.1)$$

et

$$T_t^\varepsilon = y + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t a(T_s^\varepsilon)dB_s + \beta \sup_{0\leqslant s\leqslant t} T_s^\varepsilon + L_t^\varepsilon,\ t\in[0,1] \quad (1.2)$$

où $\beta \in]0,1[$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^+$ sont déterministes, $b, \sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lipschitziennes continues avec une constante de Lipschitz L et bornées par M, $\{L_t^\varepsilon, t\in[0,1]\}$ est un processus croissant continu avec $L_0^\varepsilon = 0$ et $\displaystyle\int_0^t 1_{\{T_s^\varepsilon=0\}}dL_s^\varepsilon = L_t^\varepsilon,\ t\in[0,1]$.
Nous pensons à $\{L_t^\varepsilon, t\in[0,1]\}$ comme étant le temps local de la semi-martingale $\{T_t^\varepsilon, t\in[0,1]\}$ au point zéro. $\{B_t, t\in[0,1]\}$ est un mouvement brownien standard unidimesionnel sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$. L'existence et l'unicité de solutions de (1.1) et (1.2) sont prouvées dans Doney et Zhang [10].

Leur approche est basée sur la méthode d'Azencott [2] classique en norme uniforme, voir aussi Priouret [14], Doss et Priouret [11] et Baldi et Caramellino [3] en tenant compte des termes perturbés $\beta\sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s^\varepsilon$ et $\beta\sup_{0\leqslant s\leqslant t} T_s^\varepsilon$.

Le but de cet article est de démontrer pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta \in]0,1[$ un principe de grandes déviations pour la famille X^ε définie dans (1.1) (resp. pour $(\alpha,\beta) \in]0, \frac{1}{2}[^2$, T^ε définie dans (1.2)) lorsque $C([0,1],\mathbb{R})$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni de la norme α-höldérienne (resp. $C([0,1],\mathbb{R}^+)$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$ est muni de la norme α-höldérienne) en s'inspirant de la méthode d'Azencott, voir Ben Arous et Ledoux [4].

Pour $\beta = 0$, le principe de grandes déviations associé à (1.1) est étudié dans Freidlin & Wentzell [12], Azencott [2], Priouret [14], Baldi & Caramellino [3], Deuschel et Stroock [9], Stroock [16], Varadhan [17] et Dembo et Zeitouni [8] en norme uniforme, Ledoux, Qian et Zhang [13] en théorie des chemins rugueux[3], Ben Arous et Ledoux [4] en norme hölderienne, tandis que celui de (1.2) est étudié dans Anderson et Orey [1] et Doss et Priouret [11] en norme uniforme.

---

[3]en anglais rough paths

Dans la section 1.1, nous donnons quelques définitions et des résultats généraux. La section 2 est consacrée au PGD des diffusions perturbées, tandis que dans la section 3 nous étudions le PGD des diffusions réfléchies perturbées.

1.1. **Définitions et résultats généraux**

Si x est une fonction réelle continue sur $[0,1]$, s'annulant en 0, nous définissons la suite $(\xi_m(x))_{m\geqslant 1}$ par la formule

$$\xi_m(x) = \xi_{2^n+k}(x) = 2^{n/2}\left(2x\Big(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\Big) - x\Big(\frac{k}{2^n}\Big) - x\Big(\frac{k-1}{2^n}\Big)\right), \tag{1.3}$$

pour $n \geqslant 0$ et $k = 1, \ldots, 2^n$. Définissons

$$\|x\| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |x_t| \tag{1.4}$$

$$\|x\|_\alpha = \sup_{0\leqslant s\neq t\leqslant 1} \frac{|x_t - x_s|}{|t-s|^\alpha}, \alpha \in]0,1[\tag{1.5}$$

$$||x||'_\alpha = \sup_{m\geq 1} |m^{\alpha-1/2}\xi_m(x)|,\ \alpha \in]0;1[$$

cf. Ben Arous et Gradinaru [5].

Nous avons aussi

$$\|x\| \leqslant \|x\|_\alpha \tag{1.6}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, les normes $\|\ .\ \|_\alpha$ et $\|\ .\ \|'_\alpha$ sont équivalentes, cf. Ciesielski [7].

Posons $\mathscr{H} = \mathscr{H}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions absolument continues satisfaisant $h(0) = 0$ et $\int_0^1 |\dot{h}(s)|^2 ds < +\infty$ $\Big(\dot{h}(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}\Big)$. Pour $h \in \mathscr{H}$, nous posons

$$\|h\|_{\mathscr{H}} = \left(\int_0^1 |\dot{h}(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Rappelons deux lemmes, cf. Ben Arous et Ledoux [4].

Lemme 1.1. *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de α telle que pour tout $u > 0$ et tout $v > 0$*

$$P\{\|B\|_\alpha \geqslant u, \|B\| \leqslant v\} \leqslant C \max\left(1, \Big(\frac{u}{v}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \exp\left(-\frac{1}{C} \cdot \frac{u^{\frac{1}{\alpha}}}{v^{\frac{1}{\alpha}-2}}\right)$$

Lemme 1.2. *Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de α telle que pour tout $u > 0$ et tout processus continu K sur $[0,1]$,*

$$P\left\{\left\|\int_0^{\cdot} K(s)dB(s)\right\|_\alpha \geqslant u, \|K\| \leqslant 1\right\} \leqslant C\exp\left(\frac{-u^2}{C}\right)$$

Soit E un espace topologique et $\mathscr{I}$ sa tribu borélienne, et soit P_ε une famille de mesures de probabilité sur $(E, \mathscr{I})$. Nous donnons d'abord quelques définitions, cf. Dembo et Zeitouni [8], et Deuschel et Stroock [9] par exemple.

Définition 1.3. Une fonction $I : E \longrightarrow [0, +\infty]$ est dite une fonctionnelle d'action si elle est semi-continue inférieurement (s.c.i.), c'est-à-dire quelque soit la suite x_n tendant vers x, on a $I(x) \leqslant \liminf I(x_n)$. De plus, si, pour chaque $a \geqslant 0$, $\Gamma(a) = \{x \in E; I(x) \leqslant a\}$ est compact, nous dirons que I est une bonne fonctionnelle d'action.

Pour tout A borélien E, nous posons

$$I(A) = \inf_{x\in A} I(x)$$

Définition 1.4. Nous dirons que la famille de mesures de probabilité $\{P_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un principe de grandes déviations (PGD) pour une certaine fonction I si on a

(i) I est une bonne fonctionnelle d'action.

(ii) Pour tout A borélien de E, on a

$$-I(A^\circ) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(A) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P^\varepsilon(A) \leqslant -I(A^-),$$

où A° (resp.A^-) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A).

Rappelons aussi le théorème de Schilder classique, voir Schilder [15], Stroock [16] par exemple.

Théorème 1.5. *La mesure de probabilité induite par $\sqrt{\varepsilon}\, W$ sur $C([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme uniforme $\|\,.\,\|$ satisfait un PGD avec la bonne fonctionnelle d'action $\lambda(.)$ définie par*

$$\lambda(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathscr{H}} & si\ h \in \mathscr{H} \\ +\infty & sinon \end{cases} . \tag{1.8}$$

Rappelons aussi l'inégalité exponentielle, voir [16].

Lemme 1.6. *Soit* $Z_t = \int_s^t C(u)dB_u + \int_s^t D(u)du$ *un processus d'Ito, où* $0 \leqslant s < t < \infty$ *et* $C, D : [0,\infty[\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont des processus aléatoires* $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$*-progressivement mesurables. Si* $|C(.)| \leqslant M_1$ *et* $|D(.)| \leqslant M_2$*, alors pour* $T > s$ *et* $R > 0$ *vérifiant* $R > M_2(T-s)$*, nous avons*

$$P\left(\sup_{s\leqslant t\leqslant T} |Z_t| \geqslant R\right) \leqslant \exp\left(-\frac{(R - M_2(T-s)^2)}{2M_1(T-s)}\right) \tag{1.9}$$

Un des outils de base en théorie des grandes déviations est le "principe de contractions" ou "principe de transfert", voir Dembo et Zeitouni [8] par exemple.

Soit P^ε une famille de mesure de probabilités sur un espace Polonais E satisfaisant un PGD avec une fonctionnelle d'action I et soit $F : E \longrightarrow E'$ une fonction continue. Notons $Q^\varepsilon = P^\varepsilon \circ F^{-1}$ la famille de mesure image de P^ε par F. Alors nous avons

Théorème 1.7. *La famille* $\{Q^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *satisfait un PGD avec une bonne fonctionnelle d'action* J *définie par*

$$J(y) = \inf_{\{F(x)=y\}} I(x)$$

avec la convention: $\inf \phi = +\infty$.

2. PGD pour les diffusions perturbées

Pour $h \in \mathscr{H}$, notons $\Phi^x(h)$ l'unique solution de l'équation perurbée déterministe suivante:

$$\begin{aligned}\Phi^x(h)(t) = \quad & x + \int_0^t \sigma(\Phi^x(h)(s))\,\dot{h}\,(s)ds + \int_0^t b(\Phi^x(h)(s))ds \\ & + \beta \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Phi^x(h)(s),\ t \in [0,1]\end{aligned} \tag{2.1}$$

Il n'est pas difficile d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution de (2.1) en utilisant les mêmes arguments que le théorème 2.1 dans Doney et Zhang [10].

Nous avons alors le résultat central suivant:

Théorème 2.1. *Si* $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $\beta \in]0,1[$, *en notant* ν_ε *la famille de mesures de probabilité associée à* X^ε*, solution de (1.1), considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans* $C_x([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme höldérienne définie dans (1.4), alors* ν_ε *satisfait un PGD avec la fonctionnelle d'action définie par*

$$I_x(g) = \inf_{\{h \in \mathscr{H}; g = \Phi^x(h)\}} \lambda(h) \tag{2.2}$$

où λ *est définie dans (1.8)*

Nous faisons la convention: $\inf \phi = +\infty$.

Ce théorème va se déduire du théorème 2.2

Théorème 2.2. *Soient* $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\beta \in]0,1[$ *et* $h \in \mathscr{H}$*; pour tous* $R > 0$ *et* $\rho > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* ε *suffisamment petit,*

$$P\Big\{\|X^{\varepsilon,x} - \Phi^x(h)\|_\alpha \geqslant \rho; \|\sqrt{\varepsilon}\, B - h\| \leqslant \delta\Big\} \leqslant \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon}\Big). \tag{2.3}$$

Preuve du théorème 2.2. Traitons d'abord le cas $h = 0$. Plus précisément, on a la proposition suivante:

Proposition 2.3. *Soient* $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\beta \in]0,1[$*; pour tous* $R > 0$ *et* $\rho > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* ε *suffisamment petit,*

$$P\Big\{\|\sqrt{\varepsilon} \int_0^\cdot \sigma(X^{\varepsilon,x}(s)) dB_s\|_\alpha \geqslant \rho; \|\sqrt{\varepsilon}\, B\| \leqslant \delta\Big\} \leqslant \exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon}\Big). \tag{2.4}$$

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, posons $t_k = \dfrac{k}{n}$ pour $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Définissons $X_t^{\varepsilon,n} = X_{t_k}^\varepsilon$ si $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.
Alors pour $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} A^\varepsilon = \;& \Big\{\Big\| \int_0^\cdot \sigma(X_s^\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}\, dB_s\Big\|_\alpha \geqslant \rho, \|\sqrt{\varepsilon}\, B\| \leqslant \delta\Big\} \\ & \subset \Big\{\Big\|\sqrt{\varepsilon} \int_0^\cdot \Big[\sigma(X^{\varepsilon,x}(s)) - \sigma(X^{\varepsilon,n,x}(s))\Big] dB_s\Big\|_\alpha \geqslant \frac{\rho}{2}, \|X^{\varepsilon,x} - X^{\varepsilon,n,x}\| \leqslant \gamma\Big\} \\ & \quad \cup \{\|X^{\varepsilon,x} - X^{\varepsilon,n,x}\| > \gamma\} \\ & \quad \cup \Big\{\Big\|\sqrt{\varepsilon} \int_0^\cdot \sigma(X^{\varepsilon,n,x}(s)) dB_s\Big\|_\alpha \geqslant \frac{\rho}{2}, \|\sqrt{\varepsilon}\; B\| \leqslant \delta\Big\} \\ & = B^\varepsilon \cup C^\varepsilon \cup D^\varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons en utilisant le lemme 1.6 la formule (2.17) de Bo et Zhang [6]

$$P(C^\varepsilon) \leqslant n \exp\left(-\frac{n\gamma^2(1-\beta)^2}{8M^2\varepsilon}\right). \tag{2.5}$$

Pour tous $R > 0$ et $\gamma > 0$, il existe ε_0 et n_0 tels que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $n \geqslant n_0$,

$$P(C^\varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right). \tag{2.6}$$

Par le lemme 1.2,

$$P(B^\varepsilon) \leqslant C \exp\left(-\frac{\rho^2}{4C\gamma^2\varepsilon}\right), \tag{2.7}$$

où $C > 0$ ne dépend que de α et L.

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{\cdot} \sigma(X^{\varepsilon,n,x}(s))dB_s\right\|_\alpha &= \sqrt{\varepsilon}\left\|\sum_{j=0}^{n-1} \sigma(X^{\varepsilon,n,x}_{t_j})[B(t_{j+1}\wedge\ .) - B(t_j \wedge\ .)]\right\|_\alpha \\ &\leqslant 2nM\|\sqrt{\varepsilon}\ B\|_\alpha.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Donc par le lemme 1.1,

$$P(D^\varepsilon) \leqslant C' \max\left(1, \left(\frac{\rho}{2\delta}\right)^{1/\alpha}\right)\ \exp\left(-\frac{1}{C'n^{1/\alpha}.2^{1/\alpha}.\varepsilon} \cdot \frac{\rho^{1/\alpha}}{\delta^{(1/\alpha)-2}}\right) \tag{2.9}$$

où $C' > 0$ dépend de α et M.

Etant donnés $R > 0$ et $\rho > 0$, on choisit alors $\gamma > 0$ suffisamment petit pour que $\dfrac{\rho^2}{4C\gamma^2} \geqslant R$ que , puis n tel que l'on a (2.7) et enfin $\delta > 0$ tel que, dans (2.9),

$$\frac{\rho^{1/\alpha}}{\delta^{(1/\alpha)-2}} \geqslant C'(2n)^{1/\alpha}.$$

□

Terminons la preuve du théorème 2.2 quand $h = 0$.
En utilisant le fait que $\Big|\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} X^\varepsilon_u - \sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t} \Phi^x(0)(u)\Big| \leqslant \sup\limits_{0\leqslant u\leqslant t}\Big|X^\varepsilon_u - \Phi^x(0)(u)\Big|$, nous avons

$$\begin{aligned}\Big|X^\varepsilon_t - \Phi^x(0)(t)\Big| \leqslant &\ \Big|\sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X^\varepsilon_u)dB_u\Big| + L\int_0^1 \Big|X^\varepsilon_u - \Phi^x(0)(u)\Big|du \\ &+\beta \sup_{0\leqslant u\leqslant t}\Big|X^\varepsilon_u - \Phi^x(0)(u)\Big|.\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall et (1.6),

$$\begin{aligned}\left\|X^\varepsilon - \Phi^x(0)\right\| &\leqslant \frac{e^L}{1-\beta}\left\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\right\| \\ &\leqslant \frac{e^L}{1-\beta}\left\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\right\|_\alpha.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Pour tout $0 \leqslant t \leqslant 1$ et toute fonction $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, posons

$$\|x\|_{\alpha,t} = \sup_{0\leqslant u<v\leqslant t} \frac{|x(v)-x(u)|}{|v-u|^\alpha}. \tag{2.11}$$

Par le principe de réflexions,

$$\begin{aligned}&\frac{\left|\Big(X^\varepsilon(t) - \Phi^x(0)(t)\Big) - \Big(X_s^\varepsilon - \Phi^x(0)(s)\Big)\right|}{|t-s|^\alpha} \\ &= \frac{1}{|t-s|^\alpha}\left(\left|\sqrt{\varepsilon}\int_s^t \sigma(X_v^\varepsilon)dB_v + \frac{\beta}{1-\beta}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_s^u \sigma(X_v^\varepsilon)dB_v\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \int_s^u b(X_v^\varepsilon)dv\Big) - \frac{\beta}{1-\beta}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big(\int_s^u b(\Phi^x(0))(v)dv\Big)\right|\right)\end{aligned} \tag{2.12}$$

nous avons alors

$$\begin{aligned}\|X^\varepsilon - \Phi^x(0)\| \leqslant\ & \frac{1}{1-\beta}\left\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\right\|_{\alpha,t} + \frac{\beta L}{1-\beta}\|X^\varepsilon - \Phi^x(0)\| \\ & + \frac{\beta L}{1-\beta}\int_0^\cdot \|X^\varepsilon - \Phi^x(0)\|_{\alpha,0}du.\end{aligned} \tag{2.13}$$

En utilisant le lemme de Gronwall et (2.10),

$$\|X^\varepsilon - \Phi^x(0)\|_\alpha \leqslant \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{\beta L}{1-\beta}e^L\right)\left\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^1 \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\right\|_\alpha e^{\frac{\beta L}{e^{1-\beta}}} \tag{2.14}$$

□

Dans le cas général, on effectue une translation sur l'espace de Wiener par la formule de Cameron-Martin pour se ramener à $h = 0$.

Comme

$$\begin{aligned} X^\varepsilon(t) - \Phi^x(h)(t) = \; & \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u + \int_0^t \Big\{ \Big(\sigma(X_u^\varepsilon) - \sigma(\Phi^x(h)(u))\Big)\, \dot{h}_u \\ & + \Big(b(X_u^\varepsilon) - b(\Phi^x(h)(u))\Big)\Big\}\, du \\ & + \beta\left(\sup_{0\leqslant u\leqslant t} X_u^\varepsilon - \sup_{0\leqslant u\leqslant t}\Phi^x(h)(u)\right), \end{aligned}$$

par le même raisonnement que dans (2.10), nous avons

$$\begin{aligned} \|X^\varepsilon - \Phi^x(h)\| & \leqslant \frac{e^{L(1+\|h\|_{\mathscr{H}})}}{1-\beta}\, .\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\Big\| \\ & \leqslant \frac{e^{L(1+\|h\|_{\mathscr{H}})}}{1-\beta}\, .\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\Big\|_\alpha \end{aligned} . \tag{2.15}$$

De même, de

$$\begin{aligned} & \frac{\Big|\Big(X^\varepsilon(t) - \Phi^x(h)(t)\Big) - \Big(X^\varepsilon(s) - \Phi^x(h)(s)\Big)\Big|}{|t-s|^\alpha} \\ & = \frac{1}{|t-s|^\alpha}\left(\Big|\sqrt{\varepsilon}\int_s^t \sigma(X_v^\varepsilon)dB_v + \frac{\beta}{1-\beta}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_s^u \sigma(X_v^\varepsilon)dB_v \right. \\ & \quad + \int_s^u \Big(\sigma(X_v^\varepsilon)\, \dot{h}_v + b(X_v^\varepsilon)\Big)dv\Big) \\ & \quad \left. - \frac{\beta}{1-\beta}\sup_{s\leqslant u\leqslant t}\Big(\int_s^u \big(\sigma(\Phi^x(h)(v))\, \dot{h}_v + b(\Phi^x(h))(v)dv\big)\Big)\Big|\right), \end{aligned}$$

on tire, en utilisant (2.15)

$$\begin{aligned} \|X^\varepsilon - \Phi^x(h)\|_{\alpha,t} \leqslant \; & \frac{1}{1-\beta}\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_u^\varepsilon)dB_u\Big\|_\alpha \\ & + \frac{\beta L}{1-\beta}(1+\|h\|_{\mathscr{H}}).e^{L(1+\|h\|_{\mathscr{H}})}.\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot \sigma(X_v^\varepsilon)dB_v\Big\|_\alpha \\ & + \frac{\beta L}{1-\beta}\int_0^\cdot (1+|\,\dot{h}_s\,|)\|X^\varepsilon - \Phi^x(h)\|_{\alpha,s}ds. \end{aligned}$$

Par application du lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} \|X^\varepsilon - \Phi^x(h)\|_\alpha \leqslant & \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{\beta L}{(1-\beta)^2}(1 + \|h\|_{\mathscr{H}}) \right) \\ & . \left\| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\cdot} \sigma(X_v^\varepsilon) dB_v \right\|_\alpha . e^{\frac{\beta L}{e^{1-\beta}}(1+\|h\|_{\mathscr{H}})}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Proposition 2.4. *Soient* $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\beta \in]0,1[$. *Pour tout* $a \geq 0$, *l'application* $\mathbb{R}^+ \times ((\mathbf{C}[0,1], \mathbb{R}), \|\|_\alpha) \cap \left(\left\{ h \in \mathscr{H} : \frac{1}{2}\|h\|_{\mathscr{H}}^2 \leqslant a \right\} \right) \longrightarrow ((\mathbf{C}[0,1], \mathbb{R}), \|\|_\alpha)$ *qui a* (x, h) *associe* g, *solution de (2.1) est continue.*

Preuve : c'est une modification du lemme 1 de [15].

□

3. **PGD pour les diffusions perturbées réfléchies**

Dans cette section, nous prouverons le principe de grandes déviations associé au processus T^ε, solution de (1.2).

Pour $y \geqslant 0$ et $f \in C_y([0,1], \mathbb{R})$, espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ issues de y à l'instant 0, définissons deux fonctionnelles

$$\Gamma : C_y([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C_y([0,1], \mathbb{R}_+) \text{ et } K : C_y([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C_0([0,1], \mathbb{R}_+)$$

par

$$\Gamma f = f + \widetilde{f} \text{ et } K f = \widetilde{f}, \text{ où } \widetilde{f} = -\inf_{s \leqslant t}(f(s) \wedge 0), t \in [0,1].$$

Par le principe des réflexions, la solution de T^ε de (1.2) est donnée par

$$T_t^\varepsilon = (\Gamma Z^\varepsilon)(t) \text{ et } L_t^\varepsilon = (K Z^\varepsilon)(t), \; t \in [0,1], \tag{3.1}$$

où Z^ε est solution de l'équation

$$Z_t^\varepsilon = y + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t a(\Gamma Z^\varepsilon(s)) dB_s + \beta \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} (\Gamma Z^\varepsilon)(s), \; t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Pour $h \in \mathscr{H}$, considérons $\widetilde{\Phi}^y(h)$ l'unique solution de

$$\widetilde{\Phi}^y(h)(t) = y + \int_0^t a(\widetilde{\Phi}^y(h)(u)).\, \dot{h}_u \, du + \beta \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \widetilde{\Phi}^y(h)(u) + \eta_t, \; t \in [0,1], \tag{3.3}$$

où $\widetilde{\Phi}(h)$ est continue, non négative et η un processus croissant continu satisfaisant à $\eta_t = \int_0^t 1_{\{\widetilde{\Phi}(h)(s)=0\}} d\eta_s$. L'existence et l'unicité de (3.3) peuvent être obtenues par le théorème 3.1 et les théorèmes 4.2, 4.3 dans [10]. Comme dans 3.1, $\widetilde{\Phi}(h)$ s'écrit aussi

$$\widetilde{\Phi}(h)t = (\Gamma V(h))(t) \text{ et } \eta_t = (KV(h))(t),\ t \in [0,1], \tag{3.4}$$

où $V(h)$ est solution de

$$V(h)(t) = y + \int_0^t a(\Gamma V(h)(s)).\, \dot{h}_s\, ds + \beta \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Big(\Gamma V(h)(s)\Big),\ t \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Soit ν_ε^1 la loi de Z^ε, solution de (3.2), considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $C_y([0,1], \mathbb{R}^+)$, muni de la norme α-höldérienne. Nous avons alors

Théorème 3.1. *Si $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{1}{2}[^2$, alors ν_ε^1 satisfait un PGD avec la fonctionnelle d'action définie par*

$$\widetilde{I}_y(g) = \inf_{\{f\in\mathscr{H}, g=\widetilde{\Phi}(h)\}} \lambda(h), \tag{3.6}$$

où λ est définie dans (1.8).

Nous faisons la convention: $\inf \phi = +\infty$.

Soit ν_ε^2 la loi de T^ε, solution de (1.2), considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $C_y([0,1], \mathbb{R}^+)$, muni de la norme α-höldérienne. Nous avons alors le résultat central suivant de cette section.

Théorème 3.2. *Si $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{1}{2}[^2$, alors ν_ε^2 satisfait à un PGD avec la fonctionnelle d'action définie par*

$$\bar{I}_y(\bar{g}) = \inf_{\{\bar{g}=\Gamma g\}} \widetilde{I}_y(g), \tag{3.7}$$

où $\widetilde{I}_y(g)$ est définie dans (3.6).

Nous faisons la convention: $\inf \phi = +\infty$.

Preuve. On utilise le principe des contractions, théorème 1.7.

Comme $\Gamma\psi - \psi = (K\psi, 0, \ldots, 0)$, voir Anderson et Orey [1], page 194, il suffit de montrer que Γ est α-höldérienne continue.
Rappelons que

$$\|\Gamma\psi_1 - \Gamma\psi_2\| \leqslant \|\psi_1 - \psi_2\|. \tag{3.8}$$

Soient ψ_1 ψ_2, deux éléments de $C_y([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme α-höldérienne

$$\begin{aligned}\frac{\|\Gamma\psi_1-\Gamma\psi_2\|_\alpha}{\|\psi_1-\psi_2\|_\alpha} &= \sup_{0\leqslant s<t\leqslant 1}\frac{\left|\Big(\Gamma\psi_1(t)-\Gamma\psi_2(t)\Big)-\Big(\Gamma\psi_1(s)-\Gamma\psi_2(s)\Big)\right|}{\|\psi_1-\psi_2\|_\alpha}\\ &\leqslant \frac{2\|\psi_1-\psi_2\|_\infty+2\|\psi_1-\psi_2\|_\infty}{\|\psi_1-\psi_2\|_\infty}=4.\end{aligned}$$

Ainsi, on a:

$$\|\Gamma\psi_1-\Gamma\psi_2\|_\alpha\leqslant 4\|\psi_1-\psi_2\|_\alpha.$$

□

Preuve du théorème 3.1. Ce théorème va se déduire du théorème 3.3.

Théorème 3.3. *Soient* $(\alpha,\beta)\in]0,\frac{1}{2}[^2$ *et* $h\in\mathscr{H}$*; pour tous* $R>0$ *et* $\rho>0$*, il existe* $\delta>0$ *tel que pour tout* ε *suffisamment petit,*

$$P\{\|Z^{\varepsilon,y}-V^y(h)\|_\alpha\geqslant\rho;\|\sqrt{\varepsilon}\ B-h\|\leqslant\delta\}\leqslant\exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon}\Big).\tag{3.9}$$

Preuve. Traitons d'abord le cas $h=0$. Plus précisément, on a la proposition suivante

Proposition 3.4. *Soient* $(\alpha,\beta)\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[^2$*; pour tous* $R>0$ *et* $\rho>0$*, il existe* $\delta>0$ *tel que pour tout* ε *suffisamment petit,*

$$P\{\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot a\Big((\Gamma Z^{\varepsilon,y})(s)\Big)dB_s\|_\alpha\geqslant\rho;\|\sqrt{\varepsilon}\ B\|\leqslant\delta\}\leqslant\exp\Big(-\frac{R}{\varepsilon}\Big).\tag{3.10}$$

Preuve. La preuve est semblable à celle de la proposition 2.4. Nous écrivons seulement la différence.

Pour $\gamma>0$, posons

$$\begin{aligned}\widetilde{A}^\varepsilon = &\left\{\Big\|\int_0^\cdot a(\Gamma Z^\varepsilon(s))\sqrt{\varepsilon}\,dB_s\Big\|_\alpha\geqslant\rho,\|\sqrt{\varepsilon}\,B\|\leqslant\delta\right\}\\ &\subset\left\{\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot\Big[a(\Gamma Z^{\varepsilon,y}(s))-a(\Gamma Z^{\varepsilon,n,y}(s))\Big]dB_s\Big\|_\alpha\geqslant\frac{\rho}{2},\|Z^{\varepsilon,y}-Z^{\varepsilon,n,y}\|\leqslant\gamma\right\}\\ &\quad\cup\{\|Z^{\varepsilon,y}-Z^{\varepsilon,n,y}\|>\gamma\}\\ &\quad\quad\cup\left\{\Big\|\sqrt{\varepsilon}\int_0^\cdot a(\Gamma Z^{\varepsilon,n,y}(s))dB_s\Big\|_\alpha\geqslant\frac{\rho}{2},\|\sqrt{\varepsilon}\ B\|\leqslant\delta\right\}\\ &=\widetilde{B}^\varepsilon\cup\widetilde{C}^\varepsilon\cup\widetilde{D}^\varepsilon.\end{aligned}$$

D'après les résultats de Bo et Zhang [6],

$$P(\widetilde{C}^{\varepsilon}) \leqslant n \exp\left(-\frac{n\gamma(1-2\beta)^2}{8N^2\varepsilon}\right)). \tag{3.11}$$

Pour tous $R > 0$ et $\gamma > 0$, il existe $\widetilde{\varepsilon}_0$ et $\widetilde{n}_0$ tels que si $\varepsilon \leqslant \widetilde{\varepsilon}_0$ et $n \geqslant \widetilde{n}_0$,

$$P(\widetilde{C}^{\varepsilon}) \leqslant \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon}\right)). \tag{3.12}$$

par le lemme 1.2 et (3.9),

$$P(\widetilde{B}^{\varepsilon}) \leqslant C \exp\left(-\frac{\rho^2}{16C\gamma^2\varepsilon}\right)), \tag{3.13}$$

où $C > 0$ ne dépend que de α et L. □

Ensuite, on termine comme dans la preuve de la proposition 2.4. □

Dans le cas général, on termine la preuve du théorème 3.3 comme on a fait dans la preuve du théorème 2.2. □

Proposition 3.5. *Soient* $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{1}{2}[^2$. *Pour tout* $a \geq 0$, *l'application* $\mathbb{R}^+ \times ((\mathbf{C}[0,1], \mathbb{R}^+), \|\|_\alpha) \times \left(\left\{h \in \mathscr{H} : \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathscr{H}} \leqslant a\right\}\right) \longrightarrow ((\mathbf{C}[0,1], \mathbb{R}^+), \|\|_\alpha)$ *qui a* (x, h) *associe* g, *solution de (3.3) est continue.*

Bibliographie

[1] Anderson (R.) & Orey (S.). Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary. *Nagoya Math. J.* Vol **60** (1976), pp. 189-216.

[2] Azencott (R.). «*Grandes déviations et applications*», Ecole de Proba. de Saint-Flour VIII-1978, *Lect. Notes in Math.*, **774** (1980), pp. 1-76, Springer Verlag, Berlin.

[3] Baldi, (P.) & Caramellino (L.). General Freidlin-Wentzell large deviations and positive diffusions. *Statistics & Probability Letters.* vol. **81**, Issues **8**, (2011), pp. 1218-1229.

[4] Ben Arous (C.) & Ledoux (M.). Grandes déviations de Freidlin-Wentzell en norme höldérienne. *Séminaire de proba. (Strasbourg)*, tome **28** (1994).

[5] BEN AROUS & GRADINARU (M.). Hölder norms and the support theorem for diffusions. *Annales de l'I. H. P.*. Probabilités et Statistiques **30** (1994), pp. 415-436.

[6] BO (L.) & ZHANG (T.). Large deviations for perturbed reflected diffusion processes, *Stochastics*, **81**; 6 (2009), pp. 531-543.

[7] CIESIELSKI (Z.). On the isomorphisms of the spaces H_α and m. *Bull. Acad. Pol. Sc.***8** (1960), pp. 217-222.

[8] DEMBO (A.) & ZEITOUNI (O.)., *«Large Deviations Techniques and Applications»*, Boston: Jones and Bartlett, 1993.

[9] DEUSCHELL (J.D.)& STROOCK (D.W.), *«Large deviations»*, Academic Press, Boston, 1989.

[10] DONEY (R.H.) & ZHANG (T.). Perturbed Skorohod equations and perturbed reflected diffusion processes. *Ann. I. H. Poincaré* **41** (2005), pp.107-121.

[11] DOSS (H.) & PRIOURET (P.). Petites perturbations des systèmes dynamiques avec réflexion, *Sém. de Proba. XVII, Lecture Notes in Math.* n° **986**, (1983), pp. 353-370, Springer - Verlag.

[12] FREIDLIN (M.) & WENTZELL (A.D.). On small random perturbations of dynamical systems. *Russian Math. Serveys* **25**, (1970), pp. 1-55.

[13] LEDOUX (M.), QIAN (Z.) & ZHANG (T.). Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths. *Stochastic Processes and Their Applications* **102**, (2202), pp. 265-283.

[14] PRIOURET (P.). Remarque sur les petites perturbations de systèmes dynamiques. *Séminaire de Proba. de Strasbourg. Lecture Notes in Math.*. (1982), pp. 184-200, Springer - Verlag.

[15] RAJAONARISON (L.I.) & RABEHERIMANANA (T.J.). Petites perturbations d'équations d'évolutions aléatoires avec réflexion en norme höldérienne. *Afrika Matematika,* (2014), 25,4, pp. 1179-1196.

[16] SCHILDER (M.). Some asymptotic formulae for Wiener integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **125**, (1966), pp. 63-85.

[17] STROOCK (D.W.) *«An introduction to the theory of large deviations»* Sringer - Verlag, Berlin, 1984.

[18] VARADHAN (S.R.S.). *«Large deviations and applications»*. SIAM, Philadelphia, 1984.