Journal de Mathématiques,
Mathématiques & Applications
Fondamentales et Informatique
JMMAFI 2016, **vol.3**, p 1-24

THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE ET PRINCIPE DE DEVIATIONS MODEREES POUR LES EQUATIONS D'EVOLUTIONS ALEATOIRES

R.B. RAKOTOARISOA [1] ; J.H. ANDRIATAHINA [2] et T.J. RABEHERIMANANA [3]

Domaine des Sciences & Technologie
Mention Mathématiques et Informatiques, B.P. 906, Ankatso 101,
Antananarivo, Madagascar

Résumé :

On considère la famille des processus stochastiques $X^\varepsilon = \{X^\varepsilon(t),\ 0 \le t \le 1\}$, $\varepsilon > 0$ où X^ε est la solution de l'équation différentielle d'Itô

$$dX^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t))dW_t + b(X^\varepsilon(t), Y(t))dt \qquad (E)$$

où les coefficients dépendent des processus $Z = \{Z(t), t \in [0;1]\}$ et $Y = \{Y(t), t \in [0;1]\}$. Dans cet article, on se propose de démontrer un théorème de la limite centrale et un principe de déviations modérées pour X^ε, solution de **(E)** considérée comme une variable aléatoire à valeur dans $C^{\alpha,0}([0;1];\mathbb{R}^d)$. A cette fin, nous utilisons plusieurs résultats tels que l'équivalence exponentielle,le principe de contraction, l'inégalité de Transport de Talagrand et l' inégalité exponentielle.

Mots Clés : Théorème de la limite centrale, Principe de déviations modérées, Principe de grandes déviations, Equations d'évolutions aléatoires, Equivalence exponentielle, Inégalité de transport de Talagrand et la norme höldérienne.

Abstract :

We consider a familly stochastics process $X^\varepsilon = \{X^\varepsilon(t),\ 0 \le t \le 1\}$, $\varepsilon > 0$ when X^ε is a solution of Itô differntiel equation.

$$dX^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t))dW_t + b(X^\varepsilon(t), Y(t))dt \qquad (E)$$

when the coefficients depend to processes $Z = \{Z(t), t \in [0;1]\}$ et $Y = \{Y(t), t \in [0;1]\}$. In this paper, we purpose to show a central limit theorem and a moderate deviations principle for X^ε, solution of **(E)** considered as which a random-variable to value in $C^{\alpha,0}([0;1];\mathbb{R}^d)$. In this aim, we use lots of results such as exponential equivalence, contraction principle, Talagrand transportation inequality and exponential inequality.

Keys words : Central limit theorem, Moderate deviations principle, Large deviations principle, Exponential equivalence, Random evolution equation, Talagrand transportation inequality and the Hölder norm.

1. rbenja90@gmail.com
2. joceandhaj@gmail.com
3. rabeherimenana.toussaint@yahoo.fr

Introduction et notations.

Le principe de grandes déviations a été étudié par beaucoup d'auteurs tels qu' Anzencott [1], Freidlin-Wentzell [9] ; Schilder [21], Dembo et Zeitouni [6]. Cependant, d'autres auteurs ont trouvé des résultats des grandes déviations sur les équations d'évolutions aléatoires voir [3], [11], [15], [16], [18] et [19]. Mais dans cet article, nous nous proposons d'étudier le théorème de la limite centrale(TLC) et le principe de déviations modérées (PDM) dans $C^{\alpha,0}([0;1];R^d)$ pour la famille des lois de l'équation des évolutions aléatoires perturbées

$$\begin{cases} dX^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t))dW_t + b(X^\varepsilon(t), Y(t))dt \\ \\ X^\varepsilon(0) = x \end{cases} \tag{0.1}$$

où $x \in R^d$, W est un mouvement brownien standard sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Y est un processus aléatoire progressivement mesurable qui satisfait une certaine condition d'intégrabilité, Z est un processus aléatoire tel que son support topologique est un sous-ensemble compact de $C^{\alpha,0}([0;1];R^d)$. En outre, W est indépendant de (Y, Z) et σ et b satisfont :
(H_0) : $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^k$ et $b : \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$
(H_1) : la fonction $b(x, y)$ est mesurable en (x, y) et il existe une constante $C_b > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |b(x,y)| &\leq K \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \\ |b(x,y) - b(x',y')| &\leq C_b(|x-x'| + |y-y'|)\forall \ x, x' \in \mathbb{R}^d; \ y, y' \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

(H_2) : La fonction $\sigma(x, z)$ est mesurable en (x, z) et il existe une constante $C_\sigma > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\sigma(x,z| &\leq K \ \ \forall \ (x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \\ |\sigma(x,z) - \sigma(x',z')| &\leq C_\sigma(|x-x'| + |z-z'|) \ \ \forall \ x, x' \in \mathbb{R}^d; \ z, z' \in \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

Soit

$$V^\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)}(X^\varepsilon(t) - X^0(t)), \qquad t \in [0,1]$$

tel que

$$h(\varepsilon) \longrightarrow \infty \ et \ \sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon) \longrightarrow 0, \ quand \ \varepsilon \longrightarrow 0, \quad t \in [0,1].$$

Le but dans cet article est d'étudier la convergence de $V^\varepsilon(t) = \dfrac{R^\varepsilon(t)}{h(\varepsilon)}$ pour $h(\varepsilon) \longrightarrow \infty$ avec

$$R^\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(X^\varepsilon(t) - X^0(t)), \qquad t \in [0,1]$$

et $X^0(t)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire aléatoire :

$$\begin{cases} dX^0(t) = b(X^0(t), Y(t))dt \\ \\ X^0(0) = x \end{cases} \tag{0.2}$$

et d'établir le principe de grandes déviations dans $C^{\alpha,0}([0;1];R^d)$ de $V^\varepsilon(t) = \dfrac{R^\varepsilon(t)}{h(\varepsilon)}$.

Signalons le fait que, Mellouk[15], S.H Randriamanirisoa et T.J Rabeherimanana[19] et Bezuidenhout[3] étudient le principe de grandes déviations pour des différentes équations d'évolution aléatoires. En outre, pour σ et b ne dépendant que du processus X^ε, le PDM est étudié par Y. Ma, R. Wang et L. Wu[14]. Le PDM pour les équations de réaction-diffusion stochastique est établi par R. wang et T. Zhang[24].

La section 1 est consacrée à quelques définitions et résultats généraux. Dans la section 2, nous annonçons le résultat principal de cet article concernant le PGD du processus $V^\varepsilon(t)$. Dans la section 3, nous démontrons le PGD du processus $R^0(t)$ qui est la limite de $R^\varepsilon(t)$ quand $\varepsilon \to 0$. Dans la dernière section, nous prouvons que $R^\varepsilon(t)$ converge vers un processus de Gauss $R^0(t)$ qui est le TLC et que le processus $V^\varepsilon(t)$ satisfait un PGD avec une certaine fonctionnelle d'action , ceci nous amène à prouver l'équivalence exponentielle des processus $V^\varepsilon(t)$ et $\dfrac{R^0(t)}{h(\varepsilon)}$.

Maintenant, nous allons introduire quelque notations et conventions que nous allons utiliser dans cet article.
On note pour $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$,

$$|f|_\infty = \sup\{|f(t)|;\quad t \in [0;1]\}$$

$$||f||_\alpha = \sup_{\{0 \le |t-s| \le 1\}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Définissons le module de continuité Hölderienne de f par

$$\omega_\alpha(f;\delta) = \sup_{0 \le |t-s| \le \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Soit $C^\alpha([0;1];\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f $\alpha-$Hölderiennes continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}^d$ tel que $||f||_\alpha < \infty$ et $C([0;1],\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues à valeur dans R^d induit par la topologie usuelle de convergence uniforme et W un mouvement brownien standard sur Ω. Soit $C^{\alpha,0}([0;1];R^d)$, le sous-ensemble séparable de $C^\alpha([0;1];\mathbb{R}^d)$ constitué des fonctions F tel que $\lim\limits_{|t-s|\to 0} \dfrac{|F(t) - F(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0$.
Pour une variable aléatoire Y ; on note *suppY* le support de la distribution de Y.

1 Définitions et résultats généraux

Définition 1.1. *Une fonction $I : E \longrightarrow [0;+\infty]$ est dite une fonctionnelle d'action si elle est semi-continue inférieurement (s.c.i). Si pour chaque $a < \infty$, $\Gamma_a = \{x \in E, I(x) \le a\}$ est compact, alors I est une bonne fonctionnelle d'action.*
Pour chaque sous-ensemble A de E et chaque fonctionnelle d'action I, on note $I(A) = \inf\limits_{x\in A} I(x)$.

Définition 1.2. *Pour une fonction I , la famille de probabilité $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGD si on a :*
(i) I est une bonne fonctionnelle d'action.
(ii) Pour tout ouvert O de E,

$$\liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(O) \ge -I(O).$$

(iii)Pour tout fermé F de E,

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \varepsilon \log P_\varepsilon(F) \le -I(F).$$

Soit $(\{W(t); t > 0\}, (\Omega; \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un mouvement brownien standard $d-$ dimensionnel et soit $\Omega = C([0;1], \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}^d$ équipé avec la topologie usuelle de la convergence uniforme définie par la norme $|f|_\infty$ et soit $\mathcal{H}([0;1], \mathbb{R}^d)$ l'espace de Cameron-Martin constitué des fonctions absolument continues avec une dérivée de carrée intégrable. C'est un espace d'Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_H = \int_0^t \dot{f}_s \dot{g}_s ds.$

Le PGD suivant provient de Baldi et al [2] (1992), qui est une extension du théorème de Schilder(voir Schilder[21] ; Deushell et Stroock[7]).

***Théorème* 1.3.** *: La mesure de probabilité induite par $\sqrt{\varepsilon}W$ sur $\mathcal{C}^{\alpha,0}([0;1], \mathbb{R}^d$ équipé avec la norme $||.||_\alpha$ satisfait un PGD avec la bonne fonctionnelle d'action $\lambda(.)$ définie par*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |\dot{h}(s)|^2 ds, \ \ si \ h \in \mathcal{H}([0;1], \mathbb{R}^d) \\ \\ +\infty \qquad\qquad\qquad\qquad sinon. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous rappelons la version de l'inégalité exponentielle classique pour l'intégrale stochastiques, qui est cruciale dans la preuve de l'équivalence exponentielle (voir par exemple ; Stroock[22] (1981)).

***Lemme* 1.4.** *Soient $f : [0;1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l \otimes \mathbb{R}^d$ et $g : [0;1] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^l$ des fonctions bornées $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurables et soit*

$$U(t) = \int_0^t f(s) dW_s + \int_0^t g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1$$

et $B = \sup_{t,\omega} |g(t,\omega)|$. Définissons $A = \sup_{t,\omega} f(t,\omega) f^T(t,\omega)$ alors pour chaque $s > 0$, $T > 0$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ et $r > lBT^{1-\alpha}$,

$$P\left(\sup_{\{s \leq t \leq s+T\}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} \geq r \right) \leq 2l \exp\left(-\frac{(r - lBT^{1-\alpha})^2}{2Al^2T^{1-2\alpha}} \right). \tag{1.2}$$

***Théorème* 1.5** ([6])**.** *Si la famille des mesures de probabilité $\{\mu_\varepsilon\}$ vérifie un PGD avec la fonctionnelle d'action I et exponentiellement équivalente à la famille $\{\tilde{\mu}_\varepsilon\}$; alors le même PGD est vérifié par $\{\tilde{\mu}_\varepsilon\}$.*

Soit $\Omega = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R}^k)$ l'espace de trajectoire du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $(W_t, 0 \leq t \leq 1)$. Soit P la mesure de Wiener et $\mathcal{F}$ une filtration dans Ω. Soit $Y = \{Y(t), 0 \leq t \leq 1\}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui est $\{\mathcal{F}_t\}-$progressivement mesurable, on suppose que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}^{1/(1-\alpha)}([0;1]; \mathbb{R}^m)$. soit $Z = \{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ un processus $\{\mathcal{F}_t\}-$mesurable prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^l$. On suppose que *suppZ* est un sous- ensemble compact de $\mathcal{C}^{\alpha,0}([0,1]; \mathbb{R}^l)$ et (Y, Z) et W sont indépendants.

Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$X^\varepsilon(t) = x + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s), Z(t)) dW_s + \int_0^t b(X^\varepsilon(s), Y(s)) ds.$$

L'existence et l'unicité de la solution de cette équation sont assurées par (H_0) -(H_2)
Pour $h \in \mathcal{H}([0;1];\mathbb{R}^d)$, $r \in \mathcal{L}^{1:(1-\alpha)}([0;1];\mathbb{R}^m)$; $u \in suppZ$. Soit $\phi(h,r,u)$ l'unique solution de l'EDO

$$g(t) = x + \int_0^t \sigma(g(s), u(s))\dot{h}(s)ds + \int_0^t b(g(s), r(s))ds \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

L'existence et l'unicité de cette EDO sont des conséquences des continuités lipschitziennes de b et σ et sont standard.
Soit $\tilde{\lambda} : \mathcal{C}^{\alpha,0}([0;1];\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0;\infty]$ par

$$\tilde{\lambda}(\tilde{h}) = \inf\{\lambda(h); h \in \mathcal{H}, \exists (r,u) \in suppY \times suppZ \ tel\ que\ \phi(h,r,u) \equiv \tilde{h}\}. \tag{1.3}$$

Puisque $\tilde{\lambda}$ n'est pas nécessairement semi-continue inférieurement(s.c.i) voir Bezuidenhout[3], on introduit la régularisation s.c.i $\tilde{\lambda}^*$ définie par

$$\tilde{\lambda}^*(\tilde{h}) = \lim_{a\longrightarrow 0} \inf_{\rho\in B_\alpha(\tilde{h},a)} \tilde{\lambda}(\rho)$$

où $B_\alpha(\tilde{h},a)$ est la boule de centre $\tilde{h}$ et de rayon a suivant la norme $||.||_\alpha$, l'existence de la limite de la partie droite de cette équation est assurée par le fait que $\inf_{\rho\in B_\alpha(\tilde{h},a)} \lambda(\rho)$ est une fonction décroissante en a.

2 Résultat principal

Dans cette section, on établit le théorème principal concernant le théorème de la limite centrale (TLC) et le principe de déviations modérées (PDM).
Soit $Db_X = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} b^i\right)$ la matrice jacobienne de b par rapport à la première variable uniformément continue vérifie :
(H_3) : $\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d,\ \exists\, C_{Db} > 0\ \ tel\ \ que\ \ |Db_X(x_1,y) - Db_X(x_2,y)| \le C_{Db}|x_1 - x_2|$

Théorème 2.1. *(i)(TLC) R^ε converge vers un processus gaussien R^0 définie par*

$$\begin{cases} dR^0(t) = Db_X(X^0(t), Y(t))R^0(t)dt + \sigma(X^0(t), Z(t))dW_t \\ \\ R^0(0) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où Db_X est la matrice jacobienne de b par rapport à la première variable.
(ii)(PDM) $V^\varepsilon(t) = \left(\dfrac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{h(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}\right)_{t\in[0;1]}$ satisfait un PGD sur l'espace $\mathcal{C}^{\alpha,0}([0;1],\mathbb{R}^d)$ avec la vitesse $h^2(\varepsilon)$ et la fonctionnelle d'action

$$\lambda^*(\tilde{h}) = \lim_{a\longrightarrow 0} \inf_{\rho\in B_\alpha(\tilde{h},a)} \tilde{\lambda}(\rho) \tag{2.2}$$

où $\tilde{\lambda}$ est définie précédemment par (1.3). Plus précisément, pour tout sous-ensemble borélien A de $\mathcal{C}^{\alpha,0}\left([0;1];\mathbb{R}^d\right)$

$$\begin{aligned} -\inf_{\gamma\in \mathring{A}} \tilde{\lambda}^*(\gamma) \ &\le \liminf_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}(V^\varepsilon \in A) \\ &\le \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}(V^\varepsilon \in A) \le -\inf_{\gamma\in\bar{A}} \tilde{\lambda}^*(\gamma) \end{aligned}$$

où $\dot{A}$ désigne l'intérieur et $\bar{A}$ l'adhérence de A.

3 Grandes déviations du processus de Gauss

3.1 Extension du principe de contraction.

D'après le théorème (2.1) de Mellouk[15], le processus $\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}$ satisfait un PGD avec la bonne fonction de taux $\tilde{\lambda}^*(\tilde{h})$.

***Théorème* 3.1.** *La famille $P^\varepsilon = P \circ \left(\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}\right)$, loi de $\left(\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}\right)$ définie dans (2.1) satisfait un PGD avec la bonne fonctionnelle d'action $\tilde{\lambda}^*$.*

Preuve (voir Mellouk[15])
Le principe de contraction est une base de la théorie de grandes déviations (voir Deutchel et Stroock [7] 1989). Soit P_ε une famille de mesure de probabilité sur l'espace E satisfaisant un PGD avec la bonne fonctionnelle d'action Iet soit $F : E \longrightarrow E'$ continue . Soit $Q_\varepsilon = P_\varepsilon \circ F^{-1}$ une famille de mesure image, alors on a :

***Théorème* 3.2** (Dembo et Zeitouni[6])**.** *Q_ε obéit un PGD avec la bonne fonctionnelle d'action J, définie par*

$$J(y) = \inf_{\{x:F(x)=y\}} I(x) \tag{3.1}$$

avec la convention usuelle $inf\emptyset = \infty$

Soit (E_X, d_X), (E_Y, d_Y), (E_Z, d_Z) et (E', d') des espaces Polonais et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Supposons que $\{X^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est une famille de variable aléatoire à valeurs dans E_X, Y est une variable aléatoire dans E_Y et Z une variable aléatoire prenant ses valeurs dans E_Z, on donne une fonction de taux I sur E_X et $a > 0$, soit $\Gamma_a = \{x \in E_X : I(x) \le a\}$ et $\Gamma_\infty = \bigcup\limits_a \Gamma_a$.

***Théorème* 3.3.** *Soit I une fonctionnelle d'action sur E_X ; $F_N; F : \Gamma_\infty \times E_Y \times E_Z \longrightarrow E'$ $\dfrac{R_N}{h(\varepsilon)}, \dfrac{R}{h(\varepsilon)} : \Omega \longrightarrow E'$, des applications qui vérifient les conditions suivantes :*
(a) (i) pour tout $a > 0$ et $N \ge 1$, $F_{N|\Gamma_a \times suppY \times suppZ}$ est continue.
(ii) $F_{N|\Gamma_a \times suppY \times suppZ}$ converge vers $F_{|\Gamma_a \times suppY \times suppZ}$ uniformément quand $N \longrightarrow \infty$.
(b)Pour chaque $a > 0$ et $N \ge 1$, $F_N(\{I \le a\} \times suppY \times suppZ)$ et $F(\{I \le a\} \times suppY \times suppZ)$ sont relativement compacts dans (E', d').
(c)Pour tout $N \ge 1$, $\left\{\dfrac{R_N^0}{h(\varepsilon)}\right\}_{\varepsilon>0}$ satisfait un PGD (quand $\varepsilon \longrightarrow 0$) sur E' avec une bonne fonctionnelle d'action

$$I_N^*(\zeta) = \lim_{\rho\to 0} \inf_{\xi \in B'(\zeta,\rho)} I_N(\xi), \tag{3.2}$$

où $B'(\zeta, \rho)$ est la boule centrée en ζ et de rayon ρ dans (E', d') et

$$I_N(\zeta) = \inf\{I(x), \exists (y, z) \in suppY \times suppZ \ tel\ que\ F_N(x, y, z) = \xi\}.$$

(d) $\left\{\dfrac{R_N^0}{h(\varepsilon)}\right\}$ *est une bonne approximation de* $\left\{\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}\right\}$,*qui vérifie pour tout* $\delta > 0$

$$\lim_N \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\{\left|\frac{R_N^0}{h(\varepsilon)}-\frac{R^0}{h(\varepsilon)}\right| > \delta\} = -\infty \tag{3.3}$$

alors, $\left\{\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}\right\}$ *satisfait un PGD avec la bonne fonction du taux* $\tilde{I}^*(\zeta) = \lim\limits_{\rho\longrightarrow 0}\inf\limits_{\xi\in B'(\zeta,\rho)}\tilde{I}(\xi)$ *où* $\tilde{I}(\xi) = \inf\{I(x), \exists (y,z) \in suppY \times suppZ \text{ tel que } F(x,y,z) = \xi\}$.

Preuve (Voir Mellouk [15]).

Pour la preuve du PGD de $R^0(t)/h(\varepsilon)$, il faut démontrer que $\dfrac{R_N^0}{h(\varepsilon)}$ est une bonne approximation exponentielle de $\dfrac{R^0}{h(\varepsilon)}$.

3.2 Approximation exponentielle

On a

$$dR^0(t) = Db_x(X^0(t), Y(t))R^0(t)dt + \sigma(X^0(t), Z(t))dW_t$$

et soit $t_N = [tN]/N$ où $[x]$ désigne la partie entière de x, $R_N^0 = \{R_N^0(t); 0 \le t \le 1\}$ la solution de l'EDS suivant

$$dR_N^0(t) = Db_x(X_N^0(t), Y(t))R_N^0(t)dt + \sigma(X_N^0(t_N), Z(t_N))dW_t \tag{3.4}$$

On montre que $\{R_N^0(t)\}$ est une bonne approximation exponentielle de $\{R^0(t)\}$. En premier, nous allons établir l'approximation suivante

***Lemme* 3.4.** *: Pour tout* $\delta > 0$

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\sup_{t\in[0;1]}|R_N^0(t) - R^0(t)| > \frac{\delta}{N^\alpha}\right) = -\infty \tag{3.5}$$

Démonstration. : le coefficient de dérive n'est pas nécessairement borné. Pour prouver l'égalité 3.5 ; on introduit quelques résultats auxiliaires. Soit $0 < \alpha < \beta < \dfrac{1}{2}$ et $0 < \gamma < \beta - \alpha$ alors par le théorème 1.4 de Mellouk (2000),

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \quad & P\left(\sup_{k\in[1;N]}\frac{1}{h(\varepsilon)}|W_{\frac{k}{N}} - W_{\frac{k-1}{N}}| \ge N^{\gamma-\beta}\right) \\ & \le \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(||\frac{1}{h(\varepsilon)}W||_\beta \ge N^\gamma\right) \\ & \le -\inf\{\frac{1}{2}||h||_{\mathcal{H}}^2; ||h||_\beta \ge N^\gamma\} \\ & \le -\frac{1}{2}N^{2\gamma}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

En fait, si $h \in \mathcal{H}([0;1];\mathbb{R}^d)$ satisfait à $||h||_\beta \geq N^\gamma$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz implique $||h||_{\mathcal{H}} \geq N^\gamma$.
Définissons l'ensemble

$$B_{\beta,\gamma,\varepsilon} = \left\{ \sup_{k\in[1;N]} h^{-1}(\varepsilon)|W_{k/N} - W_{k-1/N}| \leq N^{\gamma-\beta} \right\} \cap \left\{ ||h^{-1}(\varepsilon)W||_\beta \leq N^\gamma \right\} \tag{3.7}$$

par 3.6, on a

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty} \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon) \log P\left(B^C_{\beta,\gamma,\varepsilon}\right) = -\infty. \tag{3.8}$$

De plus, l'ensemble $B_{\beta,\gamma,\varepsilon}$, par le lemme de Gronwall et les propositions sur les coefficients Db_X et σ, pour $t \in [0;1]$, on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |R^0_N(t)| &\leq c\left\{ \sum_{k=1}^N h^{-1}(\varepsilon)|W_{k/N\wedge t} - W_{k-1/N\wedge t}| + \int_0^1 (1 + |R^0_N(s)|)ds \right\} \\ &\leq C\left\{ N^{\gamma+1-\beta} + \int_0^t |R^0_N(s)|ds \right\} \\ &\leq CN^{\gamma+1-\beta}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pour prouver 3.5, soit $\Psi^\varepsilon_N(.) = \dfrac{R^0_N(.) - R^0(.)}{h(\varepsilon)}$, alors pour $t \in [0;1]$, $\Psi^\varepsilon_N(t)$ satisfait

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon_N(t) = &\int_0^t \{Db_x(X^0_N(s), Y(s)) - Db_x(X^0(s), Y(s))\} \frac{R^0(s)}{h(\varepsilon)} ds \\ &+ h^{-1}(\varepsilon) \int_0^t \{\sigma(X^0_N(s_N), Z(s_N)) - \sigma(X^0(s), Z(s))\} dW_s. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pour $\rho > 0$, on définit

$$\tau^\rho_{N,\varepsilon}(\omega) = \inf\left\{ t > 0; |R^0_N(t,\omega) - R^0_N(t_N,\omega)| \geq \frac{\rho}{N^\alpha} \right\} \wedge 1$$

$$\theta^{\rho,\delta}_{N,\varepsilon}(\omega) = \inf\left\{ t > 0; |\Psi^\varepsilon_N(t,\omega)| > \frac{\delta}{N^\alpha} \right\} \wedge \tau^\rho_{N,\varepsilon}(\omega)$$

et

$$\nu^\rho_{N,\varepsilon}(t) = \int_\Omega \left(\frac{\rho^2}{N^{2\alpha}} + |\Psi^\varepsilon_N\left(t \wedge \theta^{\rho,\delta}_{N,\varepsilon}(\omega), \omega\right)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dP.$$

Alors, on a

$$P\left(\sup_{t\in[0;1]} \left| R^0_N(t) - R^0(t) \right| > \frac{\delta}{N^\alpha} \right) \leq P(\tau^\rho_{N,\varepsilon} < 1) + P(\theta^{\rho,\delta}_{N,\varepsilon} < 1). \tag{3.11}$$

Plus précisément, nous appliquons l'inégalité de Stroock et l'expression 3.8 avec les hypothèses $H_0 - H_2$ pour obtenir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que,

$$\begin{aligned} P(\tau^\rho_{N,\varepsilon} < 1) &\leq P(\tau^\rho_{N,\varepsilon} < 1, B_{\beta,\gamma,\varepsilon}) + P(\tau^\rho_{N,\varepsilon} < 1, B_{\beta,\gamma,\varepsilon}) \\ &\leq \sum_{k=1}^N P\left(\sup_{\frac{k-1}{N}\leq t\leq\frac{k}{N}} \left| R^0_N(t) - R^0_N(\frac{k-1}{N} \right| \geq \frac{\rho}{N^\alpha}, B_{\beta,\gamma,\varepsilon} \right) + P\left(B^C_{\beta,\gamma,\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

$$\leq CdN \exp\left\{ -\frac{\left(\rho - CdN^{\gamma+1-\beta}\left(\frac{1}{N}\right)^{1-\alpha}\right)^2}{C\varepsilon d^2\left(\frac{1}{N}\right)^{1-2\alpha}} \right\} + P\left(B^C_{\beta,\gamma,\varepsilon}\right)$$

$$\leq CdN \exp\{-CN^{1-2\alpha}/\varepsilon\} + P\left(B^C_{\beta,\gamma,\varepsilon}\right).$$

Comme $N^{\gamma+\alpha-\beta} \longrightarrow 0$ quand $N \longrightarrow \infty(\gamma > \beta - \alpha)$. Ainsi, par (3.8), on en déduit

$$\lim_N \limsup_\varepsilon h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\tau^\rho_{N,\varepsilon} < 1\right) = -\infty. \tag{3.12}$$

Comme $suppZ$ est un sous ensemble compact de $\mathcal{C}^{\alpha,0}([0;1];\mathbb{R}^l)$,pour chaque $\rho > 0$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que, pour $N \geq N_0$

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |Z(t) - Z(t_N)| \leq \rho N^{-\alpha} \tag{3.13}$$

pour $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, soit $\rho_N = \rho/N^\alpha$ et $f_{\varepsilon,\rho}(y) = (\rho_N^2 + |y|^2)^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Alors, une application de la formule d'Itô à $f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t))$ établit que

$$f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t\wedge\theta^{\rho,\delta}_{N,\varepsilon})) - \int_0^{t\wedge\theta^{\rho,\delta}_{N,\varepsilon}} Z^\rho_{\varepsilon,N}(s)ds - \rho_N^{2/\varepsilon}$$

est une martingale où si $< .,. >$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$

$$g^\rho_{\varepsilon,N}(t) = 2h^2(\varepsilon)\left(\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2\right)^{\frac{1}{h^{-2}(\varepsilon)-1}} \langle \Psi^\varepsilon_N(t), \left(Db_x(X^0_N(t), Y(t)) - Db_x(X^0(t), Y(t))\right)\rangle$$
$$+2(h^2(\varepsilon)-1)||\left(\sigma(X^0_N(t_N), Y(t_N)) - \sigma(X^0(t), Y(t))\right)^* \Psi^\varepsilon_N(t)||^2(\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2)^{\frac{1}{h^{-2}(\varepsilon)-1}}$$
$$+||\sigma(X^0_N(t_N), Y(t_N)) - \sigma(X^0(t), Y(t))||^2\left(\left|\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{h^{-2}(\varepsilon)-1}}.$$

Pour $0 \leq t \leq \tau^\rho_{N,\varepsilon}$, par (3.13), on a pour $N > N_0$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ que il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
|g^\rho_{\varepsilon,N}(t)| &\leq C2h^2(\varepsilon)\left(\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2\right)^{h^2(\varepsilon)} \frac{\Psi^\varepsilon_N(t)}{\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}|R^0_N(t) - R^0(t)| \\
&+C|h^2(\varepsilon)-1|\{\rho_N^2 + |Z(t_N) - Z(t)|^2\}\frac{|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}{\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}(\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2)^{1/h^{-2}(\varepsilon)-1} \\
&+C\{\rho_N^2 + |Z(t_N) - Z(t)|^2\}(\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2)^{1/h^{-2}(\varepsilon)-1} \\
&\leq Ch^2(\varepsilon)f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t))\frac{\Psi^\varepsilon_N(t)\rho_N}{\rho_N^2 + C|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2} \\
&+|h^2(\varepsilon)-1|\frac{\rho_N^2}{\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}\frac{|\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}{\rho_N^2 + |\Psi^\varepsilon_N(t)|^2}f_{\varepsilon,\rho}(\Psi^\varepsilon_N(t))
\end{aligned}$$

$$+C|h^2(\varepsilon)-1|\frac{|Z(t_N)-Z(t)|^2}{\rho_N^2+|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2}.\frac{|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2}{\rho_N^2+|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2}f_{\varepsilon,\rho}(\Psi_N^\varepsilon(t))$$

$$+C\frac{\rho_N^2+|Z(t_N)-Z(t)|^2}{\rho_N^2+|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2}f_{\varepsilon,\rho}(\Psi_N^\varepsilon(t))$$

$$\leq C\left\{(h^2(\varepsilon)+1)+\left(1+\frac{\rho_N^2+|Z(t_N)-Z(t)|^2}{|\Psi_N^\varepsilon(t)|^2}\right)\right\}f_{\varepsilon,\rho}(\Psi_N^\varepsilon(t))$$

$$\leq Ch^2(\varepsilon)f_{\varepsilon,\rho}(\Psi_N^\varepsilon(t))$$

ceci joint au théorème d'arrêt de Doob, montre qu'il existe une constante $\tilde{C}>0$ indépendant de N,ε,ρ et N_0 tels que, pour $N\geq N_0$

$$\nu_{N,\varepsilon}^\rho(t)\leq \rho_N^{2h^2(\varepsilon}+Ch^2(\varepsilon)\int_0^t\nu_{N,\varepsilon}^\rho(s)ds.$$

En outre, pour $N\geq N_0$

$$\nu_{N,\varepsilon}^\rho(1)\leq \exp\{h^2(\varepsilon)(h^2(\varepsilon)(\tilde{C}+2\log\rho-2\alpha\log N)\}$$

puis, pour tout $N\geq 1$

$$P(\theta_{N,\varepsilon}^{\rho;\delta}<1)\leq\left(\frac{\rho^2+\delta^2}{N^{2\alpha}}\right)^{-h^2(\varepsilon)}\nu_{N,\varepsilon}^\rho(1)$$

on conclut que

$$\lim_{\rho\longrightarrow 0}\sup_N\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}h^2(\varepsilon)lnP\left(\theta_{N,\varepsilon}^{\rho;\delta}<1\right)=-\infty$$

ceci avec (3.11) et (3.12) impliquent (3.5). □

***Lemme* 3.5.** *Pour tout $\delta>0$*

$$\limsup_{N\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(||R_N^0(t)-R^0(t)||_\alpha>\delta\right)=-\infty. \tag{3.14}$$

Démonstration. On applique le 4.5 de Mellouk à $\Psi_N^\varepsilon(.)=\dfrac{R_N^0(.)-R^0(.)}{h(\varepsilon)}$ et lemme 3.4, on voit qu'il suffit de prouver

$$\limsup_{N\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\max_{1\leq k\leq N}\left\{\sup_{\frac{k-1}{N}\leq s\leq t\leq\frac{k}{N}}\frac{|\Psi_N(t)-\Psi_N(s)|}{|t-s|^\alpha}\right\}>\delta\right)=-\infty.$$

Donc, par le lemme 1.5 de Mellouk et comme dans la preuve du lemme précédent, on voit que pour $0<\alpha<\beta<\dfrac{1}{2}$ et $0<\gamma<\beta-\alpha$

$$\limsup_{N\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\max_{1\leq k\leq N}\left\{\sup_{\frac{k-1}{N}\leq s\leq t\leq\frac{k}{N}}\frac{|\Psi_N(t)-\Psi_N(s)|}{|t-s|^\alpha}\right\}>\delta,B_{\beta,\gamma,\alpha}\right)=-\infty$$

où $B_{\beta,\gamma,\varepsilon}$ est définie par (3.7), d'où (3.8) achève la preuve. □

Ainsi par le théorème 1.5, pour le PDM du théorème principal, il suffit de démontrer que $V^\varepsilon = R^\varepsilon/h(\varepsilon)$ est $h^{-2}(\varepsilon)-$exponentiellement équivalente à $R^0/h(\varepsilon)$; c'est à dire :

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log \mathbb{P}\left(\left\|V^\varepsilon - \frac{R^0}{h(\varepsilon)}\right\|_\alpha > \delta\right) = -\infty;\ \forall\delta > 0. \qquad (3.15)$$

Nous le montrerons sous la condition lipschitzienne globale, au moyen de la T_2-inégalité de Talagrand sur l'espace de chemin établi par Djellout-Guillin-Wu[8] et l'inégalité de concentration correspondante(critère de Bobkov-Gotze [4]), dans la section suivante.

Avant d'entrer à la section suivante, on peut supposer l'hypothèse suivante qu'on utilisera dans la preuve du théorème principal.
(H) b est de classe C^1 et Db_X uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\frac{1}{2}(|(\sigma(x_1;z)-\sigma(x_2;z))(\sigma(x_1;z)-\sigma(x_2;z))^*| + \langle x_1-x_2, b(x_1,y)-b(x_2,y)\rangle) \leq L|x_1-x_2|. \qquad (3.16)$$

4 Preuve du théorème principal

4.1 Une L^p estimation du processus R^ε

***Proposition* 4.1.** *b et σ satisfont les conditions H_0 et H_2, il existe une constante $C(p,K,C_b)$ qui dépend de p,K,C_b, tel que*

$$\mathbb{E}(|X^\varepsilon - X^0|_\infty)^p \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} C(p,K,C_b) \to 0 \qquad \varepsilon\to 0 \qquad (4.1)$$

Démonstration.

$$X^\varepsilon(t) - X^0(t) = \int_0^t [b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s))]ds + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))dW_s$$

$$\begin{aligned}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty\right)^p &\leq 2^{p-1}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t [b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s))]ds|\right)^p \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{p}{2}}\left(\sup_{t\in[0,T]}|\int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))dW_s|\right)^p. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Soit $I_1^\varepsilon(t) = \displaystyle\int_0^t [b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s))]ds$ et

$I_2^\varepsilon(t) = \displaystyle\int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))dW_s$.

Par l'hypothèse H_1 et l'inégalité de Hölder ;

$$\mathbb{E}(|I_1^\varepsilon|_\infty)^p \leq C_b^p\left(\int_0^t 1ds\right)^{\frac{p}{q}}\mathbb{E}\int_0\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty^t\right)^p dt \qquad (4.3)$$

où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$

$$\mathbb{E}(|I_2^\varepsilon|_\infty)^p \quad\leq\quad \varepsilon^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}|\int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))|^p dW_s$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma^2(X^\varepsilon(s),Z(s))ds\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{p}{2}}\mathbb{E}\left(\int_0^T K_\sigma^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \varepsilon^{\frac{p}{2}}C(K,p). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

D'après (4.2)et(4.3),(4.4) il existe une constante $C(p,K,C_b)$ telle que

$$\mathbb{E}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty\right)^p \leq C(p,K,C_b)\left(\mathbb{E}\int_0^1\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty\right)^p dt + \varepsilon^{\frac{p}{2}}\right).$$

Par le lemme de Gronwall, on a :

$$\mathbb{E}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty\right)^p \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}}C(p,K,C_b)e^{C(p,K,C_b)}.$$

□

4.2 Preuve du TLC du théorème principal

Comme $V^\varepsilon(t) = \dfrac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{h(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}}$ et pour $h(\varepsilon) = 1$, on montre que $V_\varepsilon(t) = R^\varepsilon(t) = \dfrac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \to R^0(t)$ quand $\varepsilon \to 0$ c-à-d $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}(||R^\varepsilon - R^0||) = 0$.

$$R^\varepsilon(t) = \frac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t [b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s))]ds + \int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))dW_s$$

et

$$R^0(t) = \int_0^t Db_X(X^0(s),Y(s))R^0(s)ds + \int_0^t \sigma(X^0(s),Z(s))dW_s.$$

$$\begin{aligned}
R^\varepsilon(t) - R^0(t) &= \int_0^t \left[\sigma(X^\varepsilon(s),Z(s)) - \sigma(X^0(s),Z(s))\right]dW_s \\
&+ \int_0^t \left[\frac{b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db_X(X^0(s),Y(s))R^0(s)\right]ds \\
&= J_1^\varepsilon(t) + J_2^\varepsilon(t) + J_3^\varepsilon(t) \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

où

$$J_1^\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\sigma(X^\varepsilon(s),Z(s)) - \sigma(X^0(s),Z(s))\right]dW_s$$

$$J_2^\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\frac{b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db_X(X^0(s),Y(s))R^\varepsilon(s)\right]ds$$

$$J_3^\varepsilon(t) = \int_0^t Db_X(X^0(s),Y(s))\left[R^\varepsilon(s) - R^0(s)\right]ds.$$

Etape 1 : Estimations de $J_1^\varepsilon(t)$, $J_2^\varepsilon(t)$, et $J_3^\varepsilon(t)$

$$J_1^\varepsilon(t) = \int_0^t \Big[\sigma(X^\varepsilon(s), Z(s)) - \sigma(X^0(s), Z(s))\Big]\, dW_s$$

$\mathbb{E}|J_1^\varepsilon(t)|^p \leq \int_0^t C_\sigma \mathbb{E}(|X^\varepsilon(t) - X^0(t)|^p)$ d'après (H_2).
Par la proposition 4.1, pour $p > 2$, on a
$\mathbb{E}(|X^\varepsilon(t) - X^0(t)|^p) \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} c(p, K, C_b, C_\sigma)$

$$\mathbb{E}|J_1^\varepsilon(t)|^p \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} c(p, K, C_b, C_\sigma). \tag{4.6}$$

Par la formule de Taylor, il existe un champ aléatoire $\theta^\varepsilon(t)$ qui prend ses valeurs dans (0,1).

$$\begin{aligned}
&\frac{b(X^\varepsilon(t), Y(s)) - b(X^0(t), Y(t)}{\sqrt{\varepsilon}} \\
&\quad = Db_X(X^0(t) + \theta^\varepsilon(t)(X^\varepsilon(t) - X^0(t)), Y(t)) \left(\frac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad = Db_X(X^0(t) + \theta^\varepsilon(t)(X^\varepsilon(t) - X^0(t)), Y(t)) R^\varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Comme Db_X est uniformément continue, alors

$$\begin{aligned}
&\Big|Db_X(X^0(t) + \theta^\varepsilon(t)(X^\varepsilon(t) - X^0(t)), Y(t)) - Db_X(X^0(t), Y(t))\Big| \\
&\leq C_b \Big|X^0(t) + \theta^\varepsilon(t)(X^\varepsilon(t) - X^0(t)) - X^0(t)\Big| \\
&\leq C_b |\theta^\varepsilon(t)(X^\varepsilon(t) - X^0(t))| \\
&\leq C_b |X^\varepsilon(t) - X^0(t)|.
\end{aligned}$$

On a,

$$|J_2^\varepsilon(t)| \leq \int_0^t |(X^\varepsilon(s) - X^0(s)) R^\varepsilon(s)| ds \leq \sqrt{\varepsilon} C \int_0^t |R^\varepsilon(s)|^2 ds.$$

Pour $p > 2$,

$$\mathbb{E}(|J_2^\varepsilon(t)|)^p \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} \int_0^t \mathbb{E}(|R^\varepsilon(s)|^2) ds \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} C. \tag{4.7}$$

$$J_3^\varepsilon(t) = \int_0^t Db_X(X^0(s), Y(s)) \Big[R^\varepsilon(s) - R^0(s)\Big]\, ds$$

$$|J_3^\varepsilon(t)| \leq C_{Db} \int_0^t |R^\varepsilon(s) - R^0(s)| ds. \tag{4.8}$$

Par l'inégalité de Gronwall appliquée à $|R^\varepsilon - R^0|$, on a

$$\mathbb{E}|R^\varepsilon(t) - R^0(t)|^p \leq \varepsilon^{\frac{p}{2}} c(p, K, C_b). \tag{4.9}$$

Etape 2 : Pour $p > 2$ et pour $t \in [0; T]$ et par l'inégalité de Burkholder-Gandy-Devis (voir Revuz-Yor cf[20]) ; on a

$$\mathbb{E}|J_1^\varepsilon(t) - J_1^\varepsilon(s)|^p \;\leq\; C_p \mathbb{E}\left(\int_s^t \sigma(X^\varepsilon(s), Z(s)) - \sigma(X^0(s), Z(s))^2 du\right)^{\frac{p}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq c(p, C_\sigma)\mathbb{E}\left(\int_s^t |X^\varepsilon(u) - X^0(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq c(p, K, C_\sigma, C_b)\varepsilon^{\frac{p}{2}}|t-s|^{\frac{p-2}{2}} \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

où la proposition (4.1) est utilisée et $c(p, K, C_b, C_\sigma)$ est une constante indépendante de ε. Pour $J_2^\varepsilon(t)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|J_2^\varepsilon(t) \quad &- \quad J_2^\varepsilon(s)|^p \\
&\leq \left(\int_s^t \left|\frac{b(X^\varepsilon(u), Y(u)) - b(X^0(u), Y(u)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db_X(X^0(u), Y(u))R^\varepsilon(u)\right| du\right)^p \\
&\leq \mathbb{E}\left(\int_s^t C_b|X^\varepsilon(u) - X^0(u)|/\sqrt{\varepsilon}du + \int_s^t C_{Db}|R^\varepsilon(u)|du\right)^p \\
&\leq c(p, C_b, C_{Db})\mathbb{E}\left(\int_s^t |R^\varepsilon(u)|du\right)^p \\
&\leq c(p, K, C_b, C_\sigma, C_{Db})|t-s|^{\frac{p-2}{2}}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Enfin, pour $J_3^\varepsilon(t)$, comme Db est uniformément continue et grâce au résultat de la première étape, on a l'estimation suivante

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}|J_3^\varepsilon(t) - J_3^\varepsilon(s)|^p &\leq c(p, C_{Db})\left(\int_s^t |R^\varepsilon(u) - R^0(u)|du\right)^p \\
&\leq c(p, K, C_b, C_{Db})\varepsilon^{\frac{p}{2}}|t-s|^{\frac{p-2}{2}}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Par l'équation (4.10), (4.11) et (4.12) ; on obtient qu'il existe un constante $\tilde{C}$ indépendante de ε tel que

$$\mathbb{E}|(R^\varepsilon(t) - R^0(t)) - (R^\varepsilon(s) - R^0(s))|^p \leq \tilde{C}\varepsilon^{\frac{p}{2}}|t-s|^{\frac{p-2}{2}}.$$

Pour tout $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$, on peut choisir $p > 2$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}||R^\varepsilon - R^0||_\alpha = 0.$$

La preuve du TLC est terminée. ⊡

4.3 Inégalité T_2-transport de Talagrand

Premièrement, nous introduisons quelques notions et certaines notations utiles. Etant donné un espace métrique (E,d) muni de sa tribu borélienne σ, et $1 \leq p < +\infty$, la L^p-distance de Wasserstein entre deux mesures de probabilité μ et ν sur E est définie par :

$$W_p(\mu, \nu) : = \inf\left(\iint d(x,y)^p d\pi(x,y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

où l'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilité π sur l'espace produit $E \times E$ avec les distributions marginales μ et ν (dit couple (μ, ν)).
Une mesure de probabilité μ satisfait l'inégalité T_2-transport de Talagrand $T_2(C_T)$ sur (E, d) où $C_T > 0$ est une constante (ici T est l'indice de Talagrand), si pour toute mesure de probabilité ν

$$W_2(\mu, \nu)^2 \leq 2C_T H(\nu/\mu) \qquad (4.13)$$

où $H(\nu/\mu)$ est l'information de Kulback-Leibler ou l'entropie relative de ν par rapport à μ :

$$\begin{cases} H(\nu/\mu) = \int \log(\frac{d\nu}{d\mu})d\nu; & si\ \nu \ll \mu \\ \\ +\infty & sinon\ . \end{cases}$$

Maintenant, soit $\mu = P^\varepsilon$ la loi de $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]}$, qui est toujours une mesure de probabilité sur un espace de Hilbert

$$E = L^2([0,T]; R^d) = \left\{\varphi : [0,T] \longrightarrow R^d\ mesurable;\ ||\varphi||_2^2 = \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt < +\infty\right\}$$

(à $dt-$équivalence près) muni de la distance $d_2(\varphi_1, \varphi_2) := ||\varphi_1 - \varphi_2||_2$ c'est à dire

$$d_2(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{\int_0^T |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2 dt}$$

où les inégalités (5.5) et (5.6) de Djellout [8] sont

$$\left(W_2^{d_2}(\mathbb{Q}, \mathbb{P}_x)\right)^2 \leq 2\frac{(1 - \exp(\varepsilon - 2\delta T))||\sigma||}{\varepsilon(2\delta - \varepsilon)} H(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \tag{4.14}$$

et pour toute mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$

$$\left(W_2^{d_2}(\nu, P_T(x,.))\right)^2 \leq 2\frac{\sup_{t\in[0;T]} \exp(\varepsilon - 2\delta)||\sigma||_\infty^2}{\varepsilon} H(\nu/P_T(x,.)).$$

Par l'inégalité (4.14) précédente, et la remarque (5.9) de Djellout-Guillin-Wu [8], on a :

***Lemme* 4.2.** *Supposons que σ, b sont localement lipschitziens, σ est borné et (3.16) Alors pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, la loi P^ε de $X^\varepsilon = (X_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]}$ satisfait sur $\left(L^2([0,T]; \mathbb{R}^d), d^2\right)$ la T_2- inégalité de Talagrand $T_2(\varepsilon C_T)$, où*

$$C_T = \frac{||\sigma||_\infty^2(\exp(\delta + 2L) - 1)}{\delta(\delta + 2L)} \tag{4.15}$$

avec $\delta > 0$ arbitrairement , $\frac{||\sigma||_\infty^2(\exp(\delta + 2L) - 1)}{\delta + 2L} := T$ et $\delta + 2L = 0$ (ce type de convention sera utilisé plus tard) et $||\sigma||_\infty = \sup_{x\in R^d, z\in R^n, ||z||=1} ||\sigma(x)z||$.

En effet, on prend $\varepsilon = \delta$ et $\delta = -L$ dans l'inégalité 5.5 de Djellout [8], alors on a :

$$\left(W_2^{d_2}(\mathbb{Q}, \mathbb{P}^\varepsilon)\right)^2 \leq 2\frac{(1 - \exp(\delta + 2L))||\sigma||_\infty^2}{\delta(-2L - \delta)} H(\mathbb{Q}/\mathbb{P}) \tag{4.16}$$

la constante de Talagrand C_T du lemme précédent est établie.
Notons que : $||\sigma||_\infty \leq \sqrt{\sup_{x\in R^d} tr(\sigma\sigma^*(x))} \leq \sqrt{M}$.

Ensuite nous utilisons ce lemme pour obtenir l'inégalité de concentration de mesure cruciale suivante.

***Théorème* 4.3** ([4] théorème 3.1). *Soit μ une mesure de probabilité sur (Ω, d) telle que $\int d(x, x_0)d\mu(x) < +\infty$, pour un certain $x_0 \in \Omega$. L'inégalité*

$$W_1(\mu, \nu) \leq \sqrt{2cD(\nu/\mu)} \tag{4.17}$$

est vérifiée pour toute mesure de probabilité absolument continue ν (par rapport à μ), si et seulement si, pour chaque fonction f sur Ω avec $||f||_{Lip} \leq 1$ et $\int f d\mu = 0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int e^{tf} d\mu < e^{ct^2/2} \tag{4.18}$$

***Lemme* 4.4.** *Supposons que σ et b sont localement lipschitziennes, σ est bornée et (4.1) ; alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $r > 0$*

$$P\left(\left(\int_o^t |R_t^\varepsilon|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} - \mathbb{E}(\left(\int_o^t |R_t^\varepsilon|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq r\right) \leq \exp\left\{-\frac{r^2}{2C_T}\right\} \tag{4.19}$$

où C_T est une constante donnée par (4.15).

Démonstration. Puisque $||R^\varepsilon|| = \Phi(X^\varepsilon)$ où $\Phi(\phi) = ||(\phi - X^0)/\sqrt{\varepsilon}||$ est lipschitzienne sur $\left(L^p\left([0;1];\mathbb{R}^d\right), d_2\right)$ avec le coefficient $1/\sqrt{\varepsilon}$, l'inégalité de concentration (4.19) précédente suit du lemme 4.2 par le critère de Bobkov-Gotze . □

4.4 Preuve de l'équivalence exponentielle entre $R^\varepsilon(t)$ et $R^0(t)$.

***Lemme* 4.5.** *Sous les hypothèses (H_0), (H_1) et (H) ; pour tout $\delta > 0$,*

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\left(\left|V^\varepsilon - \frac{R^0}{h(\varepsilon)}\right|_\infty > \delta\right) = -\infty.$$

Rappelons que

$$R^\varepsilon(t) = \frac{X^\varepsilon(t) - X^0(t)}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t [b(X^\varepsilon(t), Y(t)) - b(X^0(t), Y(t))]dt + \int_0^t [\sigma(X^\varepsilon(s), Z(t))dW_s$$

et

$$R^0(t) = \int_0^t Db_X(X^0(s), Y(s))R^0(s)ds + \int_0^t \sigma(X^0(s), Z(s))dW_s.$$

On a,

$$\begin{aligned} d(R^\varepsilon(t) - R^0(t)) &= Db_X(X^0(t), Y(t))(R^\varepsilon(t) - R^0(t))dt + \Bigg(\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t)) - \\ &\sigma(X^0(t), Z(t))dW_t\Bigg) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Bigg[\Bigg(b(X^\varepsilon(t), Y(t)) - b(X^0(t), Y(t)) - Db_X(X^0(t), Y(t))\Bigg) \\ &(X^\varepsilon(t) - X^0(t))\Bigg]dt = Db_X(X^0(t), Y(t))(R^\varepsilon(t) - R^0(t))dt + K^\varepsilon(t) \end{aligned} \tag{4.20}$$

où

$$K^\varepsilon(t) = \int_0^t \Big(\sigma(X^\varepsilon(s), Z(s)) - \sigma(X^0(s), Z(s))\Big)\, dW_s$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \Big[\Big(b(X^\varepsilon(s), Y(s)) - b(X^0(s), Y(s)) - Db_X(X^0(s), Y(s))\Big)\,(X^\varepsilon(s) - X^0(s))\Big]\, ds.$$

La solution de (4.18) est donnée par

$$R^\varepsilon(t) - R^0(t) = K^\varepsilon(t) + \int_0^t Db_X(X^0(s), Y(s))J(s,t)K^\varepsilon(s)ds$$

où $J(s,t)$ satisfait l'équation matricielle $J(s,s) = Id$
et $\dfrac{d}{dt}J(s,t) = Db_X(X^0(s), Y(s))J(s,t) \qquad 0 \leq s \leq t.$
Puisque $|\langle Db_X(x,y), x\rangle| \leq L|x|^2$ d'après l'hypothèse (H) précédente, on a $|J(s,t)y| \leq c(p,K,C_b)|y|\ \forall y \in \mathbb{R}^d$.
Comme $|Db|_\infty = \sup\limits_{(x,z)\in(R^d)^2, |z|\leq 1} |Db(x,z)|$, nous avons alors pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} |R^\varepsilon(t) - R^0(t)| &\leq |K^\varepsilon(t)| + |Db|_\infty C(p,K,C_b)K^\varepsilon(s)| \\ &\leq \left(1 + |Db|_\infty \frac{C(p,K,C_b)}{L}\right)|K^\varepsilon|_\infty. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Par (4.21), l'équivalence du PDM désirée entre $\dfrac{R^\varepsilon(t)}{h(\varepsilon)}$ et $\dfrac{R^0(t)}{h(\varepsilon)}$ suit de la proposition suivante.

***Proposition* 4.6.** *Sous l'hypothèse (H) ; pour tout $r > 0$,*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\frac{|K^\varepsilon|_\infty}{h(\varepsilon)} > r\right) = -\infty.$$

Pour accomplir la preuve du lemme 4.5, il suffit de prouver la proposition ci-dessus.

Démonstration.

$$\begin{aligned} &|K^\varepsilon(t)| \leq \left|\int_0^t \Big(\sigma(X^\varepsilon(s), Z(s)) - \sigma(X^0(s), Z(s))\Big)\, dB_s\right| \\ &+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\Big(b(X^\varepsilon(s), Y(s)) - b(X^0(s), Y(s)) - Db_X(X^0(s), Y(s))\Big)\,(X^\varepsilon(s) - X^0(s))\right| ds \\ &= |M^\varepsilon(t)| + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\Big(b(X^\varepsilon(s), Y(s)) - b(X^0(s), Y(s))\Big)\,(X^\varepsilon(s) - X^0(s))\right| ds \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ensuite, on estime les deux termes du membre de droite.
(a) Pour la martingale continue $M^\varepsilon(t)$, on désigne par

$$< M^\varepsilon >_s = \int_0^s \Big(\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t)) - \sigma(X^0(t), Z(t))\Big)\Big(\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t)) - \sigma(X^0(t), Z(t))\Big)^* dt$$

son processus de variation quadratique. Pour tout $\eta > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& P\left(\sup_{0\le t\le T}|M^\varepsilon(t)| \ge \frac{rh(\varepsilon)}{2}\right) \\
& \le P\left(\sup_{0\le t\le T}|M^\varepsilon(t)| \ge \frac{rh(\varepsilon)}{2}; < M^\varepsilon >_t \le \eta\right) + P\left(< M^\varepsilon >_t \ge \eta\right) \\
& \le 2\exp\left\{-\frac{\frac{r^2h(\varepsilon)^2}{2^2}}{2\eta}\right\} + P\left(< M^\varepsilon >_T \ge \eta\right) \\
& \le 2\exp\left\{-\frac{r^2h(\varepsilon)^2}{8\eta}\right\} + P\left(< M^\varepsilon >_T \ge \eta\right).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
< M^\varepsilon >_T &= \int_0^T \Big(\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t)) - \sigma(X^0(t), Z(t))\Big)\Big(\sigma(X^\varepsilon(t), Z(t)) - \sigma(X^0(t), Z(t))\Big)^* dt \\
&\le L\int_0^T |X^\varepsilon(t) - X^0(t)|dt = \varepsilon L\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt
\end{aligned} \tag{4.24}$$

pour une certaine constante L. Quand ε est assez petit, par la proposition 4.1

$$E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, il résulte du lemme 4.4 que

$$\begin{aligned}
P\left(< M^\varepsilon >_T \ge \eta\right) &\le P\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt \ge \frac{\eta}{\varepsilon L}\right) \\
&\le P\left(\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} - E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(\frac{\eta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le P\left(\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} - E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{\eta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\le exp\left\{-\frac{\eta}{8\varepsilon C_T L}.\right\}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Notons que $\varepsilon h^2(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$ et $\eta > 0$ une constante arbitraire, nous obtenons

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log P\left(\sup_{0\le t\le 1}|M^\varepsilon(t)| \ge \frac{rh(\varepsilon)}{2}\right) = -\infty. \tag{4.26}$$

(b) Du fait que b est de classe $\mathbf{C}^1$ et Db est uniformément continu, pour tout $\eta > 0$ il existe une certaine constante $\delta > 0$, telle que :
$|b(x_1, y) - b(x_2, y) - Db(x_2, y)(x_1 - x_2)| \le \eta|x_1 - x_2|$ lorsque $|X^\varepsilon(t) - X^0(t)| \le \delta$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left|b(X^\varepsilon(t), Y(t)) - b(X^0(t), Y(t)) - Db_X(X^0(t), Y(t))\right|\left|(X^\varepsilon(t) - X^0(t))\right|$$

$$\leq \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big|(X^\varepsilon(t) - X^0(t))\Big| = \eta|R^\varepsilon(t)|$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&P\Bigg(\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Big|b(X^\varepsilon(t),Y(t)) - b(X^0(t),Y(t)) - Db_X(X^0(t),Y(t))\Big|\Big|(X^\varepsilon(t) - X^0(t))\Big|dt\\&\geq \frac{h(\varepsilon)r}{2}\Bigg) \leq P\Big(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \delta\Big)) + P\Big(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|dt \geq \frac{rh(\varepsilon)}{2\eta}\Big).\end{aligned} \tag{4.27}$$

D'après le théorème de Freidlin-Wentzell

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \delta\right) \leq 0$$

et

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon h^{-2}(\varepsilon) \log P\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \delta\right) = -\infty. \tag{4.28}$$

Lorsque ε est assez petit $E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{rh(\varepsilon)}{4\eta\sqrt{T}}$ par le lemme 4.2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le lemme 4.4, on a

$$\begin{aligned}&P\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|dt \geq \frac{rh(\varepsilon)}{2\eta}\right) \leq P\left(\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{rh(\varepsilon)}{2\eta\sqrt{T}}\right)\\&\leq P\left(\left(\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} - E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) \geq \frac{rh(\varepsilon)}{2\eta\sqrt{T}} - \frac{rh(\varepsilon)}{4\eta\sqrt{T}}\right)\\&\leq P\left(\left(\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} - E\left(\int_0^T |R^\varepsilon(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right) \geq \frac{rh(\varepsilon)}{4\eta\sqrt{T}}\right)\\&\leq \exp\left\{-\frac{r^2h^2(\varepsilon)}{32\eta^2 C_T}\right\}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Puisque η est arbitraire, en plongeant (4.28) et (4.29) dans (4.27) ; on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon) \log P\Bigg(\int_0^T \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\Big(&b(X^\varepsilon(t),Y(t)) - b(X^0(t),Y(t)) -\\&Db_X(X^0(t),Y(t))\Big)|dt \geq \frac{h(\varepsilon)r}{2}\Bigg) = -\infty.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Le résultat désiré suit de (4 ;21) ; (4.26) et (4.30). □

Pour accomplir la preuve de l'équivalence exponentielle en norme holderienne, il suffit de montrer le lemme suivant.

***Lemme* 4.7.** *Sous les hypothèses (H_0), (H_1), (H_3) et (H) ; pour tout $\delta > 0$,*

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\left(\left\|V^\varepsilon - \frac{R^0}{h(\varepsilon)}\right\|_\alpha > \delta\right) = -\infty.$$

Démonstration.

$$J_3^\varepsilon(t) = \int_0^t Db_X(X^0(s), Y(s)) \left[R^\varepsilon(s) - R^0(s)\right] ds.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$|J_3^\varepsilon(t) - J_3^\varepsilon(s)| \leq \left(\int_s^t |Db_X(X^0(u), Y(u))|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^t |R^\varepsilon(u) - R^0(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_{Db}^q |t-s|^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^t |R^\varepsilon(u) - R^0(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Choisissons $q \in (2;3)$, $\alpha = \dfrac{1}{q}$ et notons que $|R^\varepsilon - R^0|_\infty^u \leq (1+u)^\alpha ||R^\varepsilon - R^0||_\alpha$, on obtient,

$$||J_3^\varepsilon||_\alpha \leq C_{Db} \left(\int_s^t (1+u)^\alpha \left(||R^\varepsilon(u) - R^0(u)||_\alpha\right)^p du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, pour $t \in [0,1]$, on a :

$$\left(||R^\varepsilon(u) - R^0(u)||_\alpha\right)^p \leq C(p, C_{Db}) \left[||J_1^\varepsilon||_\alpha + ||J_2^\varepsilon||_\alpha + \int_s^t \left(||R^\varepsilon(u) - R^0(u)||_\alpha\right)^p du\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Appliquons le lemme de Gronwall à $g(t) = \left(||R^\varepsilon(u) - R^0(u)||_\alpha\right)^p$, on a :

$$\left(||R^\varepsilon(u) - R^0(u)||_\alpha\right)^p \leq C(p, C_{Db}) \left(||J_1^\varepsilon||_\alpha + ||J_2^\varepsilon||_\alpha\right)^p e^{C(p,T,C_{Db})}.$$

Alors, il suffit de montrer que pour $\delta > 0$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} h^{-2}(\varepsilon) \log \mathbb{P}\left(\frac{||J_i^\varepsilon||_\alpha}{h(\varepsilon)} \leq \delta\right) = -\infty \quad i = 1, 2.$$

1-ère étape : Pour $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$

$$\mathbb{P}\left(||J_1^\varepsilon||_\alpha \geq h(\varepsilon)\delta\right) \leq \mathbb{P}\left(||J_1^\varepsilon||_\alpha \geq h(\varepsilon)\delta, |X^\varepsilon - X^0|_\infty < \eta\right) + \mathbb{P}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \eta\right)$$

Comme $|\left(\sigma(x_1,z) - \sigma(x_2,z)\right)\left(\sigma(x_1,z) - \sigma(x_2,z)\right)^*| \leq L|x_1 - x_2|$, alors pour chaque $s \geq 0, T \geq 0, 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ et $h(\varepsilon)\delta \geq \eta d L$,

$$\mathbb{P}\left(||J_1^\varepsilon||_\alpha \geq h(\varepsilon)\delta, |X^\varepsilon - X^0|_\infty < \eta\right) \leq 2d \exp\left(-\frac{h^2(\varepsilon)\delta^2}{2\eta^2 L^2 d^2}\right). \tag{4.31}$$

Comme X^ε satisfait un PGD sur $C^{\alpha,0}([0;1]; R^d)$,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \eta\right) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left(||X^\varepsilon - X^0||_\alpha \geq \eta\right)$$

$$\leq -\inf\{\tilde{I}^*(f); ||f - X^0||_\alpha \geq \eta\}.$$

Puisque $\tilde{I}^*$ est une bonne fonctionnelle d'action, l'ensemble des niveaux est compact, il existe alors f_0 telle que $\inf\{\tilde{I}^*(f); ||f - X^0||_\alpha \geq \eta\}$ soit atteinte en f_0 , on peut conclure que

$$-\inf\{\tilde{I}^*(f); ||f - X^0||_\alpha \geq \eta\} < 0.$$

Du fait que $h(\varepsilon) \longrightarrow \infty$ *et* $\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon) \longrightarrow 0$, *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$, on a

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \eta\right) = -\infty. \tag{4.32}$$

Comme $\eta > 0$ arbitraire, d'après (4.32), on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(\frac{||J_1^\varepsilon||_\alpha}{h(\varepsilon)} \leq \delta\right) = -\infty. \tag{4.33}$$

2-ème étape : Pour le deuxième terme

$$J_2^\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\frac{b(X^\varepsilon(s),Y(s)) - b(X^0(s),Y(s)}{\sqrt{\varepsilon}} - Db_X(X^0(s),Y(s))R^\varepsilon(s)\right] ds.$$

Commme dans la preuve du TLC, on a

$$J_2^\varepsilon \leq C_D b\int_0^1 (|X^\varepsilon - X^0|_\infty)^2/\sqrt{\varepsilon}\ dt. \tag{4.34}$$

Ensuite, comme dans la preuve de la proposition 4.1

$$|X^\varepsilon - X^0|_\infty \leq |\tilde{J}_2^\varepsilon|_\infty \tag{4.35}$$

où

$$\tilde{J}_2^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma(X^\varepsilon(s),Z(s))dW_s. \tag{4.36}$$

On applique le lemme 1.4 avec $|\sigma(x,z)| \leq K$; pour chaque $\eta > 0$, on obtient pour tout ε assez petit tel que $h(\varepsilon)\delta \geq \sqrt{\varepsilon}KL$

$$P\left(|\tilde{J}_2^\varepsilon|_\infty \geq h(\varepsilon)\delta, |X^\varepsilon| < |X^0| + \eta\right) \leq 2d\exp\left(-\frac{(h(\varepsilon)\delta)^2}{\varepsilon K^2 L(1+|X^0|+\eta)^2}\right). \tag{4.37}$$

Pour la même raison que dans la première étape, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\quad & h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(|X^\varepsilon|_\infty \geq |X^0|_\infty + \eta\right)\\ & \leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(|X^\varepsilon - X^0|_\infty \geq \eta\right) \qquad (4.38)\\ & = -\infty.\end{aligned}$$

Par (4.34) et (4.38), on a

$$\begin{aligned}&\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(\frac{||J_2^\varepsilon||_\alpha}{h(\varepsilon)} \geq \delta\right) \leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(\frac{(|\tilde{J}_2^\varepsilon|_\infty)^2}{h(\varepsilon)} \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)\delta}{c(\alpha,K,C_b)}\right)\\ &\leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}\left(\frac{(|\tilde{J}_2^\varepsilon|_\infty)^2}{h(\varepsilon)} \geq \frac{\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)\delta}{c(\alpha,K,C_b)}, |X^\varepsilon|_\infty \geq |X^0|_\infty + \eta\right)\\ &+ \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}(|X^\varepsilon|_\infty \leq |X^0|_\infty + \eta)\\ &\leq \left(\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{-\delta}{\sqrt{\varepsilon}h(\varepsilon)C(\alpha,K,C_b)K^2L(1+|X^0|_\infty+\eta)^2}\right)\\ &\vee \left(\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} h^{-2}(\varepsilon)\log\mathbb{P}(|X^\varepsilon|_\infty \leq |X^0|_\infty + \eta)\right) = -\infty.\end{aligned}$$

La preuve du PDM est complète. □

Cas non bornées

Dans le cas ou b et σ ne sont pas bornées, l'hypothèse ci-dessous est nécessaire pour montrer que X^ε est borné dans le sens de PGD.

(K) : σ est localement lipschitzienne, b est de classe C^1 et il existe une constante positive C telle que :

$$\max\{|\sigma\sigma^*(x,z)|, \langle x, b(x,y)\rangle\} \leq C(1+|x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^l \ et\ z \in \mathbb{R}^m.$$

Considérons aussi le temps d'arrêt

$$\tau_R^\varepsilon := \inf\{t; |X^\varepsilon(t)| \geq R\}.$$

***Lemme* 4.8.** *[14] Sous l'hypothèse (K),*

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left(\tau_R^\varepsilon \leq T\right) = -\infty. \tag{4.39}$$

Démonstration. Soit $f(x,y) = \log(1+|x|^2)$, par la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} df(X^\varepsilon(t), Y(t)) &= \langle \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown_x f(X^\varepsilon(t), Y(t)), \sigma(X^\varepsilon(t), Z(t))dW_t\rangle \\ &+\langle b(X^\varepsilon(t), Y(t)), \bigtriangledown_x f(X^\varepsilon(t), Y(t))\rangle dt \\ &+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^*)_{i,j}(X^\varepsilon(t), z(t))\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X^\varepsilon(t), Y(t))dt \\ &= \langle \sqrt{\varepsilon} \bigtriangledown_x f(X^\varepsilon(t), Y(t)), \sigma(X^\varepsilon(t), Z(t))dW_t\rangle + \mathcal{L}^\varepsilon f(X^\varepsilon(t), Y(t))dt \end{aligned}$$

où $\bigtriangledown_x$ est l'opérateur Gradient et $\mathcal{L}^\varepsilon$ est le générateur de X^ε.
Puis considérons la martingale

$$M^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \langle \bigtriangledown_x f(X^\varepsilon(s), Y(s)), \sigma(X^\varepsilon(s), Z(s))dW_s\rangle.$$

Comme σ est linéaire croissante d'après (K), son processus de variation quadratique $\langle M^\varepsilon\rangle$ satisfait

$$\langle M^\varepsilon\rangle_t = \varepsilon\int_0^t \left(\sigma(X^\varepsilon(s), Z(s))^* \bigtriangledown_x f(X^\varepsilon(s), Y(s))\right)^2 ds \leq 4\varepsilon C t.$$

Notons ensuite que pour $\varepsilon \in (0;1]$,

$$\mathcal{L}^\varepsilon f(x,y) = \frac{\varepsilon|\sigma\sigma^*(x,z)| + 2\langle b(x,y), x\rangle}{1+|x|^2} - \frac{2|x|^2}{(1+|x|^2)^2} \leq 3C,$$

où C est la constante dans (K) .
Par conséquent pour tout $t \geq 0$ et $\varepsilon \in (0;1]$

$$f(X^\varepsilon(t), Y(t)) \leq f(x_0) + M^\varepsilon(t) + 3Ct.$$

Pour chaque $R > 0$ assez grand tel que $c(R,T) = \log(1+R^2) - [\log(1+|x_0|^2) + 3CT] > 0$, nous avons grâce à l'inégalité de Bernstein pour les martingales locales continues

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tau_R^\varepsilon \leq T\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X^\varepsilon(t)| > R\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]} f(X^\varepsilon(t), Y(t)) \geq \log(1+R^2)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]} |M_t^\varepsilon| \geq c(R,T)\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{c(R,T)^2}{8\varepsilon CT}\right\}. \end{aligned}$$

$\square$

Maintenant, pour chaque $R > o$ assez grand tel que $c(R,T) > 0$, soit $\sigma^{(R)} = \sigma$ et $b^{(R)} = b$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^l$ avec $|x| \leq R$, $|y| \leq R$ tel que $\sigma^{(R)}$ soit globalement lipschitzienne et bornée, et $b^{(R)}$ soit de classe C^1 avec $Db^{(R)}$ uniformément continue et bornée. Considéron $X^{\varepsilon,R}$, solution de l'équation (0.1) avec $(\sigma^{(R)}, b^{(R)})$ en place de (σ, b). Nous avons par le lemme 4.8 précédent,

$$\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left(X^{\varepsilon}(t) \neq X^{\varepsilon,R}(t) \textit{ pour tout } t \in [0;T]\right)$$

$$\leq \limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0} \varepsilon \log \mathbb{P}\left(\tau_R^{\varepsilon} \leq T\right) \leq -\frac{c(R,T)}{8\varepsilon CT}.$$

En outre, par le lemme d'approximation ([6]), le théorème de Freidlin-Wentzell est vérifié sous l'hypothèse (K) et V^{ε} et $X^{\varepsilon,R} - X^0/h(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ satisfont le même PGD grâce à [6, théorème 4.2.13].

Références

[1] R.Anzencott, Grandes déviations et applicatons *in Ecole d'été de probabilité de saint Flour VIII-1978* (Lecture note iin math 774, Springer Verlag, Berlin Hedelberg New York, 1980, **pp 1- 176**

[2] Baldi, P., Ben Arous, G. and Kerkyacharian, G. Large deviation and Strassen law in Hölder norm. *Stochastic Process. Appl,* **42** : 1992, 171-180.

[3] Bezuidenhout, C. A large deviations principle for small perturbations of random evolution equations. • *Ann. Probab.*, • **15** : 1987, 646-658.

[4] S. G. Bobkov, F. Götze, Exponential Integrability and Transportation Cost Related to Logarithmic Sobolev Inequalities *J. Funct. Anal.* **163** : 1999, 1-28.

[5] S. Cerrai and M.Röckner., Large deviations for stochastic reaction-diffusion systems with multiplicative noise and non-Lipschitz reaction term, *Ann. Probab* **32(1B)** : 2004, 1100-1139.

[6] A. Dembo and O. Zeitouni. Large deviations technique and applications. Second Edition. Applications of Mathematics **38**. Springer-Verlag, 1998.

[7] J.D. Deuschel and D.W. Stroock. Large deviations. Pure and Applied Mathematicas. Academic Press, **137** : 1989.

[8] H. Djellout, A. Guillin and L. Wu. Transportation cost-information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions. *Ann. Probab.,* **32** : 2004, 2702-2732.

[9] Freidlin and Wentzell. Random perturbation of dynamical systems Springer, Berlin 1984.

[10] Guillin. A. Averaging principle of SDE with small diffusion : Moderate deviations. *Ann Probab.* **31** : 2003, 413-433.

[11] Yi-Jun Hu. A large Deviation principle for small random perturbations of random evolution equations in Hölder norm *Departement of Mathemathics, Wuhan University, People Republics of China.* 1997.

[12] I. Ikeda and S. Watanabe. Stochastic differential equations and Diffusion processes. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[13] W. Liu. Large deviations for stochastic evolution equations with small multiplicative noise. *Appl. Math. Optim.,* **61(1)** : 2010, 27-56.

[14] Yutao Ma, Ran Wang, and Liming Wu. Moderate deviation principle for dynamical systems with small random perturbation, 2011.

[15] Mohamed Mellouk. Large deviation for a random evolution equation **Bernoulli 6(6)** : 2000, 977-999.

[16] L.I. Rajaonarison, T.J. Rabeherimanana. Nouveaux résultats sur les petites perturbations d'équations d'évolutions aléatoires. *Annales Maths. Blaise Pascal* **19** : 2012, p 271-296.

[17] T.J. Rabeherimanana. Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse,* **Vol XI, n°2** : 2002, p 201-224.

[18] L.I. Rajaonarison, T.J. Rabeherimana. Petites perturbations d'équations d'évolutions aléatoires avec réflexion en norme höldérienne. *Afrika Mathematika* **vol 25,4** : 2014, p 1179-1196.

[19] S.H. Randriamanirisoa et T.J. Rabeherimanana A large deviation Principle for an random evolution delay equations in Holder space *Jmmafi.***vol.1** : 2014, p 17-32.

[20] Daniel Revuz and Marc Yor. Continuous martingal and Brownian motion. *Mathematics subject classification,* Third Edition, Springer., 1991.

[21] M. Schilder, Some asymptotic formulas for Wiener integral, *Trans. Amer.Math. Soc.,* **125** : 1966, 63-85.

[22] Stroock, D.W. Some applications of stochastic calculus to partial differential equations, *In P.L.Hennequin (ed.), école d'été de probabilités de Saint Flour XI,* Lecture Notes in Math. Berlin : Springer-Verlag **976 :** 1981, pp. 267-382.

[23] C. Villani. Optimal transport. Old and new. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] Springer-Verlag, Berlin, **338** : 2009.

[24] Ran Wang, Tusheng Zhang. Moderate deviation for stochastic reaction diffusion equations with multiplicative noise Springer Science+Business Media Dordrecht .,2014.