Journal de Mathématiques,
Mathématiques & Applications
Fondamentales et Informatique
JMMAFI 2015, Vol.**2**,pp 1-16

Filtrage non linéaire et grandes déviations. Applications : développement asymptotique.

L.I. RAJAONARISON[1], T.J. RABEHERIMANANA[2]

[1] ESPA, Département d'Electronique,
B.P 1500, Vontovorona, Antananarivo, Madagascar

[2] Faculté des Sciences , Département de Mathématiques et Informatique,
B.P 906, Ankatso, 101, Antananarivo, Madagascar

[1] *lilirabe@voila.fr*, [2] *rabeherimanana.toussaint@gmx.fr*

Résumé : Dans cet article, nous poursuivrons un double but :

- supprimer la condition H_{22} de la section 3 introduite dans [12] en utilisant la théorie des décompositions de flots (voir [3, 4, 8, 10]) et ensuite
- étudier le comportement asymptotique de

$$J(\epsilon) = \mathbb{E}\left\{\chi(X^{\epsilon})\exp -\frac{\theta(X^{\epsilon})}{\epsilon^2} | Y^{\epsilon} = \omega\right\}$$

  lorsque $\epsilon \searrow 0$ en théorie du filtrage non linéaire pour le couple signal/observation défini dans (1).

Mots clés : Décompositions des flots, principe de grandes déviations, filtrage non linéaire, développement asymptotique.

Abstract : In this paper, we use the decomposition theorem for flows of S.D.E (see [3, 4, 8, 10]) for removing the condition H_{22} of the section 3 in [12] and after, we study the asymptotic behavior of

$$J(\epsilon) = \mathbb{E}\left\{\chi(X^{\epsilon})\exp -\frac{\theta(X^{\epsilon})}{\epsilon^2} | Y^{\epsilon} = \omega\right\}$$

when $\epsilon \searrow 0$ in non-linear filtering for the couple signal/ observation defined in (1).

Keywords : Decomposition theorem for flows of S.D.E, large deviations principle, non linear filtering, asymptotic expansions.

Introduction

Considérons le couple signal/ observation, interpreté au sens de Stratonovich :

$$\left.\begin{array}{rcl} X_t^\epsilon & = & x+\epsilon\sum_{i=1}^r\int_0^t\tilde{\sigma}_i(X_s^\epsilon)\circ d\tilde{B}_s^i+\sum_{j=1}^l\int_0^t\sigma_j(X_s^\epsilon)\circ dY_s^{\epsilon,j}+\int_0^t\tilde{\sigma}_0(X_s^\epsilon)ds \\ Y_t^\epsilon & = & \int_0^t\Gamma(X_s^\epsilon)ds+\epsilon B_t \quad X_0^\epsilon=x\in\mathbb{R}^n,\ \ Y_0^\epsilon=0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

où les $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_i$, σ_j sont $r+l+1$ champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, Γ une application régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$, $\tilde{B}=(\tilde{B}_t^i)_{i=1,\dots,r}$ et $B=(B_t^j)_{j=1,\dots,l}$ deux mouvements browniens indépendants issus de 0 à l'instant 0. Nous noterons $\mathbb{P}$ (resp. $\tilde{\mathbb{P}}$) la mesure de Wiener associée à B (resp. $\tilde{B}$).

Le but de cet article est de démontrer un principe de grandes déviations relatif à une version normalisée de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Y^ϵ. Pour cela, nous effectuons un changement de probabilités (Girsanov) pour que sous $\mathbb{P}_0$, $\frac{Y^\epsilon}{\epsilon}$ soit un mouvement brownien standard indépendant de $\tilde{B}$. Cependant, pour démontrer notre résultat central, nous sommes conduit à résoudre la difficulté dans l'élimination de l'intégration en dY dans l'exponentielle de Girsanov. Pour ce faire, dans [12], nous avons introduit l'hypothèse H_{22} mais ici nous appliquons la théorie des décompositions de solutions d'E.D.S au couple $C_t^\epsilon=\left(X_t^\epsilon,\int_0^t\Gamma(X_s^\epsilon)dY_s^\epsilon\right)$ (voir les formules (21) ,(22),(23),(24) et (25)). Le résultat principal de cette théorie est que C^ϵ s'écrit :

$$C_t^\epsilon=\Phi_t^\epsilon(\widehat{C}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon})$$

où $\Phi_t^\epsilon(x)$ est la version essentiellement unique de :

$$c_t^\epsilon=x+\sum_{j=1}^l\int_0^t\hat{\sigma}_j(c_s^\epsilon)\circ dY_s^{\epsilon,j}$$

qui est un flot de C^∞-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^{n+1}$ noté $\mathbb{D}^{n+1}$, et $\widehat{C}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}$ est solution d'une E.D.S relativement à $\epsilon\tilde{B}$ paramétrée par Φ^ϵ.

En fixant le flot Φ, nous donnons une estimation asymptotique pour la famille $\left(T_\Gamma^\epsilon(\Phi,dw)\right)_{\epsilon>0}$ une version normalisée de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Φ^ϵ en utilisant comme dans Hijab [7] un résulat de Varadhan [14]. Et par identification, nous obtenons notre résultat central.

Cet article comporte quatre sections. Dans la première, nous décomposons le signal suivant l'idée de Kunita [8], Bismut [4], voir aussi Ben Arous et Castell [3] et nous-même [10] et [9, 11] pour le cas nilpotent et énonçons les résultats de grandes déviations de Ben Arous et Castell [3] relatifs à la famille $\left(N_0^\epsilon(\omega,dw)\right)_{\epsilon>0}$, où $N_0^\epsilon(\omega,dw)$ désigne une version de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Y^ϵ (cas où $\Gamma=0$). La section 2 est consacrée au résultat classique en théorie du filtrage non linéaire. Dans la section 3, nous démontrons le résultat central de cet article. Enfin dans la dernière section, nous montrons comment employer ces résultats pour donner un développement asymptotique de

$$J(\epsilon)=\mathbb{E}\left\{\chi(X^\epsilon)\exp-\frac{\theta(X^\epsilon)}{\epsilon^2}|Y^\epsilon=\omega\right\}.$$

1 Décomposition de solutions d'E.D.S et principe de grandes déviations dans le cas où $\Gamma = 0$.

Dans cette section, nous supposons que $\Gamma = 0$ et de plus l'hypothèse **H1** est vérifiée.

Hypothèse H1 : Nous supposons que les (r+l+1)-champs sur $\mathbb{R}^n$ $\tilde{\sigma_0}$, $\tilde{\sigma_1}, \ldots, \tilde{\sigma}_r$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ sont de classe C_b^∞.

Considérons x^ϵ, solution de l'équation :

$$x_t^\epsilon = x + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(x_s^\epsilon) \circ dY_s^{\epsilon,j}. \tag{2}$$

Alors il existe une version de $(t,x) \mapsto x_t^\epsilon(x)$ qui est un flot de C^∞-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^n$ i.e. un élément de $\mathbb{D}^n$. Notons Φ^ϵ cette version essentiellement unique de x^ϵ. Alors pour tout $t \in [0,1]$ p.s., nous pouvons définir des champs de vecteurs stochastiques pour $i = 1, \ldots, r$

$$\tilde{\sigma}_i^{\epsilon,*}(x) = \left(\frac{\partial \Phi_t^\epsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1} \times \tilde{\sigma_i}\left(\Phi_t^\epsilon(x)\right). \tag{3}$$

Alors par la formule d'Ito généralisée, la solution X^ϵ du signal s'écrit :

$$X_t^\epsilon = \Phi_t^\epsilon(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \tag{4}$$

où $\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}$ est la solution de l' E.D.S :

$$d\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = \epsilon \sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^{\epsilon,*}(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \circ d\tilde{B}_t^i + \tilde{\sigma_0}^{\epsilon,*}(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon})dt \,;\, \overline{X}_0^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = x. \tag{5}$$

$\mathbb{D}^n$ est muni de la $C^{0,k}$ ou $\tilde{C}^{0,k}$-topologie, définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

- $\Phi^n \xrightarrow{C^{0,k}} \Phi$ si pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{x\in K,\ t\in[0,1],\ |\alpha|\le k} \left|\partial^\alpha \Phi_t^n(x) - \partial^\alpha \Phi_t(x)\right| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

- $\Phi^n \xrightarrow{\tilde{C}^{0,k}} \Phi$ si pour tout compact $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\sup_{x\in K,\ t\in[0,1],\ |\alpha|\le k} \left\{\left|\partial^\alpha \Phi_t^n(x) - \partial^\alpha \Phi_t(x)\right| + \left|\partial^\alpha (\Phi_t^n)^{-1}(x) - \partial^\alpha (\Phi_t)^{-1}(x)\right|\right\} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

Dans toute la suite, si u est un entier, Ω_x^u désignera l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^u$, issues de x à l'instant 0 muni de la topologie de la convergence uniforme et H_x^u le sous-espace de Cameron-Martin associé.

$$H^u = \left\{ \begin{array}{c} \text{h} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^u, \text{ absolument continue par rapport à la mesure} \\ \text{de Lebesgue avec h}(0) = 0 \text{ et telle que } \int_0^1 |\dot{\text{h}}_s|^2 ds < +\infty. \end{array} \right\}$$

H^u est un espace d'Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 \dot{u}_s \cdot \dot{v}_s ds.$$

Fixant $\Phi^\epsilon = \Phi$ revient à contrôler $Y^\epsilon = \epsilon B$ par $Y \in \Omega_0^l$. Définissons une application V qui à $\Phi \in \mathbb{D}^n$, associe pour chaque $\tilde{\omega} \in \Omega_0^r$:

$$V(\Phi)(\tilde{\omega}) = \Phi.(\overline{X}_.^{\epsilon,\Phi}) \tag{6}$$

où $\Phi_t(x)$ est la version essentiellement unique de :

$$x_t = x + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(x_s) \circ dY_s^j$$

qui est un flot de C^∞-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^n$ i.e. un élément de $\mathbb{D}^n$ et $\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}$ est solution de :

$$d\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi} = \epsilon \sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^*(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}) \circ d\tilde{B}_t^i + \tilde{\sigma}_0^*(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi})dt,\ \overline{X}_0^{\epsilon,\Phi} = x \tag{5'}$$

avec

$$\tilde{\sigma}_i^*(x) = \left(\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x}\right)^{-1} \times \tilde{\sigma}_i(\Phi_t(x)),\ \ pour\ i = 0, \ldots, r.$$

Sans hypothèse sur Φ, les trajectoires de $\overline{X}^{\epsilon,\Phi}$ peuvent exploser. Donc (5') définit une application de Ω_0^r vers l'espace $(\Omega_x^n)'$, espace des trajectoires explosives.

$$(\Omega_x^n)' = \left\{ \begin{array}{c} f,\ \text{fonction continue de } [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \text{ avec } f(0) = x \text{ vérifiant} \\ f(t_0) = \infty \Rightarrow \text{ pour } t \in [t_0, 1],\ f(t) = \infty. \end{array} \right\}$$

Quand $f \in (\Omega_x^n)'$, on définit le temps d'explosion de f par :

$$\tau(f) = \inf\{s,\ f(s) = \infty\}.$$

On munira $(\Omega_x^n)'$ de la topologie définie par :

$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* $(\Omega_x^n)'$
si et seulement si
f_k *converge uniformément vers* f *sur tous les compacts de* $[0, \tau(f)]$.

$V(\Phi)$ est donc un élément de $\mathrm{L}^\infty(\Omega_0^r, (\Omega_x^n)')$.

Pour chaque $\tilde{\mathrm{h}} \in H^r$ et $\Phi \in \mathbb{D}^n$, définissons un processus $\overline{X}^\Phi(\tilde{\mathrm{h}})$, solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$d\overline{X}_t^\Phi(\tilde{\mathrm{h}}) = \left(\sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^* \left(\overline{X}_t^\Phi(\tilde{\mathrm{h}})\right) \dot{\tilde{\mathrm{h}}}_t^i + \tilde{\sigma}_0^* \left(\overline{X}_t^\Phi(\tilde{\mathrm{h}})\right)\right) dt;\ \overline{X}_0^\Phi(\tilde{\mathrm{h}}) = x \tag{7}$$

où les coefficients sont définis dans (5').

Définissons une application

$$\begin{array}{rcl} F: \quad H^1 & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \mathrm{h} & \longmapsto & \text{flot de difféomorphisme associé à l'équation différentielle ordinaire :} \end{array}$$

$$dX_t^{\mathrm{h}} = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j(X_t^{\mathrm{h}})\dot{\mathrm{h}}_t^j dt; \; X_0^{\mathrm{h}} = x. \tag{8}$$

Nous notons encore F l'extension mesurable de F sur Ω^1, selon l'idée de Bismut [4] :

$$\begin{array}{rcl} F: \quad \Omega^1 & \longrightarrow & \mathbb{D}^n \\ \omega & \longmapsto & F(\omega) = X \text{ la solution de l'E.D.S :} \end{array}$$

$$dX_t = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j(X_t) \circ dY_t^j; \; X_0 = x. \tag{9}$$

Notons $T_0^\epsilon(\Phi, dw)$ la loi du processus $V(\Phi)$ (c'est une mesure de probabilité sur $(\Omega_x^n)'$). Nous énonçons un résultat de Ben Arous et Castell [3] relatif à la famille $\left(T_0^\epsilon(\Phi, dw)\right)_{\epsilon>0}$.

Proposition 1 *Fixons Φ dans $\mathbb{D}^n$; nous définissons une fonctionnelle L_Φ^0 sur $(\Omega_x^n)'$ par la formule :*

$$\textit{Pour tout } z \in (\Omega_x^n)', \; L_\Phi^0 = \inf\left\{\frac{1}{2}||\tilde{\mathrm{h}}||_{H^r}^2 \,|\, \tilde{\mathrm{h}} \in H^r \textit{ vérifiant } z = \Phi.\left(\overline{X}_.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right)\right\} \tag{10}$$

où $\overline{X}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})$ est solution de (7). Avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$.
Alors la famille $\left(T_0^\epsilon(\Phi, dw)\right)_{\epsilon>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action L_Φ^0.

De plus, si $\tau(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}) > 1$, $\tilde{\mathbb{P}}$-p.s. et si $\tau(\overline{X}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})) > 1$, le résultat est valable quand on remplace $(\Omega_x^n)'$ par Ω_x^n.

Nous définissons pour chaque ω $\mathbb{P}$-p.s. :
- la probabilité $N_0^\epsilon(\omega, dw) = T_0^\epsilon(F(\omega), dw)$
- pour tout $\tilde{h} \in H^r$, $\xi\left(\tilde{\mathrm{h}}\right)(\omega) = F(\omega)\left(\overline{X}^{F(\omega)}(\tilde{\mathrm{h}})\right)$
- la fonctionnelle d'action $l_\omega^0 = L_{F(\omega)}^0$

$\xi(\tilde{\mathrm{h}})$ est solution de :

$$\xi_t(\tilde{\mathrm{h}}) = x + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \tilde{\sigma}_i\left(\xi_s(\tilde{\mathrm{h}})\right)\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s^i ds + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j\left(\xi_s(\tilde{\mathrm{h}})\right) \circ dY_s^j + \int_0^t \tilde{\sigma}_0\left(\xi_s(\tilde{\mathrm{h}})\right) ds. \tag{11}$$

Alors nous avons :

Proposition 2 ([3]) *$N_0^\epsilon(\omega, dw)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega_x^n)'$, qui est une version particulière de la loi conditionnelle X^ϵ sachant Y^ϵ.*

La famille $\left(N_0^\epsilon(\omega, dw)\right)_{\epsilon>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action l_ω^0. De plus, nous avons les estimations suivantes, pour tout A borélien de $(\Omega_x^n)'$:

$$-l_\omega^0(\mathring{A}) \le \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \ln N_0^\epsilon(\omega, A) \le \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \ln N_0^\epsilon(\omega, A) \le -l_\omega^0(\overline{A}) \tag{12}$$

où $\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$) désigne l'intérieur (resp. l'adhérence) de A.

2 Filtrage non linéaire

Considérons le couple signal/ observation (X^ϵ, Y^ϵ), solution de (1). Pour chaque $\Pi \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, espace des fonctions de classe C^2 et bornées sur $\mathbb{R}^n$, nous définissons le filtre non normalisé par :

$$\rho_t^\epsilon \Pi = \mathbb{E}_0^{\tilde{B}}\left[\Pi(X_t^\epsilon)\Xi_t^\epsilon\right] \tag{13}$$

où

$$\Xi_t^\epsilon = \exp\frac{\sum_{j=1}^l \int_0^t \Gamma_j(X_s^\epsilon)dY_s^{\epsilon,j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^l \int_0^t \Gamma_j^2(X_s^\epsilon)ds}{\epsilon^2} \tag{14}$$

$\mathbb{P}_0$ est la probabilité définie par la formule :

$$\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}/F_t = \left(\Xi_t^\epsilon\right)^{-1} \tag{15}$$

et $\mathbb{E}_0^{\tilde{B}}$ désigne l'integration par rapport à $\tilde{B}$ sous $\mathbb{P}_0$ et F_t la filtration associée à $(B_t, \tilde{B}_t)$. Sous cette loi, $\frac{Y^\epsilon}{\epsilon}$ est un mouvement brownien standart indépendant de $\tilde{B}$. Il est connu qu'une version mesurable de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Y^ϵ est définie par la formule :

$$\overline{N}_\Gamma^\epsilon(\omega, A) = \frac{\mathbb{E}_0^{\tilde{B}}\left[1_A(X^\epsilon)\Xi_1^\epsilon\right]}{\mathbb{E}_0^{\tilde{B}}[\Xi_1^\epsilon]} \tag{16}$$

et que le filtre non normalisé est solution de l'E.D.P.S (17) au sens de Stratonovich connu sous le nom d'équation de Zakai :

$$d\rho_t^\epsilon \Pi = \rho_t^\epsilon\left(L_0^\epsilon \Pi\right)dt + \sum_{j=1}^l \rho_t^\epsilon\left(L_j^\epsilon \Pi\right) \circ \frac{dY_t^{\epsilon,j}}{\epsilon} \tag{17}$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} L_0^\epsilon = \frac{\epsilon^2}{2}\sum_{i=1}^r \tilde{\sigma}_i^2 + \tilde{\sigma}_0 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^l \sigma_j\Gamma_j - \frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^l(\Gamma_j)^2}{\epsilon^2} \\ L_j^\epsilon = \epsilon\sigma_j + \frac{\Gamma_j}{\epsilon} \end{array}\right\} \tag{18}$$

où

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \sum_{l,k} \tilde{\sigma}_i^l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\tilde{\sigma}_i^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

et $(\Gamma_j)^2$ désigne la multiplication par la fonction $(\Gamma_j)^2$.

Dans la section suivante, nous étudions le comportement asymptotique de $\overline{N}_\Gamma^\epsilon(\omega, dw)$ définie par (16) lorsque ϵ tend vers 0.

3 Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire

On se propose maintenant d'appliquer la théorie des décompositions d'E.D.S à l'étude du comportement asymptotique, lorsque $\epsilon \searrow 0$, de la famille de mesures de probabilités $\left(\overline{N}_\Gamma^\epsilon(\omega, dw)\right)_{\epsilon>0}$ définie dans (16) en utilisant la proposition 3 ci-dessous.

Proposition 3 ([14]) *Supposons que $(\mathbb{P}^\epsilon)_{\epsilon>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action I. Soit θ^ϵ une famille de fonctions bornées qui converge uniformement vers θ lorsque ϵ tend vers 0. Posons :*

$$d\mathbb{Q}^\epsilon = \exp(-\frac{1}{\epsilon^2}\theta^\epsilon) d\mathbb{P}^\epsilon.$$

Alors nous avons les estimations suivantes, pour tout ouvert O et tout fermé F :

$$\left.\begin{array}{lcl} \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \ln \mathbb{Q}^\epsilon(O) & \geq & -\inf\{I(\omega)+\theta(\omega),\ \omega \in O\} \\ \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \ln \mathbb{Q}^\epsilon(F) & \leq & -\inf\{I(\omega)+\theta(\omega),\ \omega \in F\} \end{array}\right\}.$$

Signalons que cette proposition est encore valable même si θ^ϵ n'est pas bornée. Il suffit que :

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \ln \mathbb{E}^\epsilon \left(1_{\{\theta^\epsilon \geq R\}} \exp - \frac{\theta^\epsilon}{\epsilon^2} \right) = -\infty.$$

Dans toute la suite, nous supposons que l'hypothèse **H2** est vérifiée.

Hypothèse H2 : En plus de l'hypothèse **H1**, nous supposons que Γ est une application de classe C_b^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$.

Introduisons quelques notations.

Un élément $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ sera décomposé en

$$\big(p_1(y), p_2(y)\big) = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{19}$$

Considérons le couple

$$C_t^\epsilon = \left(X_t^\epsilon, \int_0^t \Gamma(X_s^\epsilon) dY_s^\epsilon \right) = (C_{1,t}^\epsilon, C_{2,t}^\epsilon). \tag{20}$$

Alors C^ϵ est un processus de diffusion n+1-dimensionnel, solution de l'E.D.S

$$C_t^\epsilon = (x,0) + \epsilon \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \hat{\tilde{\sigma}}_i(C_s^\epsilon) \circ d\tilde{B}_s^i + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \hat{\sigma}_j(C_s^\epsilon) \circ dY_s^{\epsilon,j} + \int_0^t \hat{\tilde{\sigma}}_0^\epsilon(C_s^\epsilon) ds \tag{21}$$

où les coefficients sont définis par

$$\hat{\sigma}_j(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \sigma_j(y_1) \\ \Gamma_j(y_1) \end{pmatrix} \text{pour chaque } j = 1,\dots,l$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_0^\epsilon = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_0(y_1) \\ -\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{j=1}^{l} \sigma_j \Gamma_j(y_1) \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\hat{\tilde{\sigma}}_i(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_i(y_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{pour chaque } j = 1,\dots,r.$$

Par la théorie des décompositions des flots, C^ϵ, solution de (21) s'écrit :

$$C_t^\epsilon = \Phi_t^\epsilon\left(\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right) \tag{23}$$

où Φ_t^ϵ est la version essentiellement unique de :

$$c_t^\epsilon = y + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \hat{\sigma}_j(c_s^\epsilon) \circ dY_s^{\epsilon,j}$$

qui est un flot de C^∞-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^{n+1}$, noté $\mathbb{D}^{n+1}$ et $\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}$ est solution de :

$$d\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = \epsilon \sum_{i=0}^{r} \hat{\tilde{\sigma}}_i^{\epsilon,*}\left(\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right) \circ d\tilde{B}_t^i + \hat{\tilde{\sigma}}_0^{\epsilon,*}\left(\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right) dt\ ;\ \hat{\overline{C}}_0^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = y \tag{24}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\sigma}}_0^{\epsilon,*}(y) = & \left(\frac{\partial \Phi_t^\epsilon(y)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot \hat{\tilde{\sigma}}_0^\epsilon(\Phi_t^\epsilon(y)) \\ \hat{\tilde{\sigma}}_i^{\epsilon,*}(y) = & \left(\frac{\partial \Phi_t^\epsilon(y)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot \hat{\tilde{\sigma}}_i(\Phi_t^\epsilon(y)),\ i = 1,\dots,r. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour chaque $\Phi \in \mathbb{D}^{n+1}$, nous notons $\hat{\overline{C}}^{\epsilon,\Phi}$ le processus dans $(\Omega_x^{n+1})'$, solution de

$$d\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi} = \epsilon \sum_{i=0}^{r} \hat{\tilde{\sigma}}_i^*\left(\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi}\right) \circ d\tilde{B}_t^i + \hat{\tilde{\sigma}}_0^*\left(\hat{\overline{C}}_t^{\epsilon,\Phi}\right) dt\ ;\ \hat{\overline{C}}_0^{\epsilon,\Phi} = (x,0) \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{\sigma}}_0^*(y) = & \left(\frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot \hat{\tilde{\sigma}}_0^1\left(\Phi_t(y)\right) \\ \hat{\tilde{\sigma}}_i^*(y) = & \left(\frac{\partial \Phi_t(y)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot \hat{\tilde{\sigma}}_i\left(\Phi_t(y)\right),\ i = 1,\dots,r. \end{aligned}$$

Définissons une application $\hat{V}$ qui à $\Phi \in \mathbb{D}^{n+1}$, associe pour chaque $\tilde{\omega} \in \Omega_0^r$,

$$\hat{V}(\Phi)(\tilde{\omega}) = \Phi.\left(\hat{\overline{C}}^{\epsilon,\Phi}(\tilde{\omega})\right). \tag{27}$$

Les processus $C_{(1)}^{\epsilon,\Phi} \in (\Omega_x^n)'$ et $C_{(2)}^{\epsilon,\Phi} \in (\Omega_x^1)'$ sont définis par

$$\hat{V}(\Phi) = \left(C_{(1)}^{\epsilon,\Phi}, C_{(2)}^{\epsilon,\Phi}\right). \tag{23'}$$

Nous notons l'application « flot »

$$\begin{array}{llll} \hat{\mathscr{F}}: & \Omega_0^l & \longrightarrow & \mathbb{D}^{n+1} \\ & \omega & \longmapsto & \text{flot stochastique associé à l'E.D.S.} \\ & & & dc_i = \sum_{j=1}^l \hat{\sigma}_j(c_t) \circ dY_t^j. \end{array} \tag{28}$$

Notons $\hat{T}^\epsilon(\Phi, dw)$ la loi du processus $\hat{V}(\Phi)$ ($\hat{T}^\epsilon(\Phi, dw)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega_x^{n+1})'$).
Et nous avons (29), l'équivalent de la proposition 1 pour $\hat{T}^\epsilon(\Phi, dw)$.
$\forall A$ borélien de $(\Omega_x^{n+1})'$

$$-\hat{L}_\Phi(\mathring{A}) \le \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log \hat{T}^\epsilon(\Phi, A) \le \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log \hat{T}^\epsilon(\Phi, A) \le -\hat{L}_\Phi(\overline{A}) \tag{29}$$

où

- $\hat{L}_\Phi$ est définie par la formule

$$\forall C \in (\Omega_0^{n+1})'$$
$$\hat{L}_\Phi(C) = \inf\left\{\frac{1}{2}\|\tilde{h}\|_{H^r}^2 \text{ lorsque } \tilde{\mathrm{h}} \in H^r \text{ vérifiant } C = \Phi.\left(\hat{\overline{C}}_{.}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right)\right\}$$

  avec la convention $\inf\emptyset = \infty$
- $\hat{\overline{C}}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})$ est solution de

$$d\hat{\overline{C}}_t^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}) = \left(\sum_{i=0}^r \hat{\overline{\sigma}}_i^*\left(\hat{\overline{C}}_t^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right)\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_t^i + \hat{\overline{\sigma}}_0^*\left(\hat{\overline{C}}_t^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right)\right)dt\,;\ \hat{\overline{C}}_0^{\Phi} = (x,0) \tag{24'}$$

  avec les coefficients définis dans (26)
- $\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) dans $(\Omega_x^{n+1})'$.

Posons

$$\Lambda_t^\epsilon = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^l \int_0^t \Gamma_j^2(X_s^\epsilon)ds - \sum_{j=1}^l \int_0^t \Gamma_j(X_s^\epsilon)dY_s^{\epsilon,j}.$$

Alors par (23)

$$\Lambda_t^\epsilon = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^l \int_0^t \Gamma_j^2(C_{(1),s}^{\epsilon,\Phi^\epsilon})ds - C_{(2),t}^{\epsilon,\Phi^\epsilon}.$$

Fixons $\Phi \in \mathbb{D}^{n+1}$ et définissons Λ_t par

$$\Lambda_t = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\int_0^t \Gamma_j^2(C^{1,\Phi}_{(1),s})ds - C^{1,\Phi}_{(2),t}$$

et une mesure sur $(\Omega^n_x)'$ par la formule

$$T^\epsilon_\Gamma(\Phi, A) = \mathbb{E}_0^{\epsilon\tilde{B}}\left[1_A(C^{1,\Phi}_{(1)})\cdot \exp - \frac{\Lambda_1}{\epsilon^2}\right]. \tag{30}$$

Alors suivant les notations de (19) et (23')

$$\begin{aligned} T^\epsilon_\Gamma(\Phi, A) &= \mathbb{E}_0^{\epsilon\tilde{B}}\left[1_A\left(p_1\hat{V}(\Phi)\right)\cdot \exp - \frac{\Lambda_1}{\epsilon^2}\right] \\ &= \int\limits_{A\times(\Omega^1_x)'} T^\epsilon(\Phi, dC)\exp - \frac{\Lambda_1(C)}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

où $\hat{T}^\epsilon$ est définie après (28).
Grâce à la proposition 3 et par (29), on a

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log T^\epsilon_\Gamma(\Phi, A) &\geq -\inf\left\{\hat{L}_\Phi(C) + \Lambda_1(C) \text{ lorsque } C \in \overset{\circ}{\widehat{A\times(\Omega^1_x)'}}\right\} \\ &= -\inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_s\right)\right|^2\right)ds\right. \\ &\qquad \left. -p_2\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_1 ;\ \Phi.\left(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right) \in \overset{\circ}{\widehat{A\times(\Omega^1_x)'}}\right\} \\ &\geq -\inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_s\right)\right|^2\right)ds\right. \\ &\qquad \left. -p_2\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_1 ;\ \Phi.\left(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right) \in \mathring{A}\times(\Omega^1_x)'\right\} \end{aligned}$$

du fait que $\mathring{A}\times(\Omega^1_x)' \subset \overset{\circ}{\widehat{A\times(\Omega^1_x)'}}$

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log T^\epsilon_\Gamma(\Phi, A) &\leq -\inf\left\{\hat{L}_\Phi(C) + \Lambda_1(C) \text{ lorsque } C \in \overline{A\times(\Omega^1_x)'}\right\} \\ &= -\inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_s\right)\right|^2\right)ds\right. \\ &\qquad \left. -p_2\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_1 ;\ \Phi.\left(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right) \in \overline{A\times(\Omega^1_x)'}\right\} \\ &\leq -\inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_s\right)\right|^2\right)ds\right. \\ &\qquad \left. -p_2\left(\Phi.(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_1 ;\ \Phi.\left(\overline{\hat{C}}.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right) \in \overline{A}\times(\Omega^1_x)'\right\} \end{aligned}$$

du fait que $\overline{A \times (\Omega_x^1)'} \subset \overline{A} \times (\Omega_x^1)'$ où $\hat{\overline{C}}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})$ est solution de (24').
Nous avons alors obtenu le théoreme 4 :

Théorème 4 *$\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout A borélien de $(\Omega_x^n)'$:*

$$-\hat{L}_{\Phi}^{\Gamma}(\mathring{A}) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log T_{\Gamma}^{\epsilon}(\Phi, A) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log T_{\Gamma}^{\epsilon}(\Phi, A) \leq -\hat{L}_{\Phi}^{\Gamma}(\overline{A}) \tag{31}$$

où

- $\hat{L}_{\Phi}^{\Gamma}(A) = \hat{L}_{\Phi}^{\Gamma}(A \times (\Omega_x^1)')$ *avec*

$$\hat{L}_{\Phi}^{\Gamma}(A \times (\Omega_x^1)') = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(\Phi.(\hat{\overline{C}}_.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_s\right)\right|^2\right) ds - p_2\left(\Phi.(\hat{\overline{C}}_.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}}))\right)_1 ;\ \Phi.\left(\hat{\overline{C}}_.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})\right) \in A \times (\Omega_x^1)'\right\} \tag{32}$$

- $\hat{\overline{C}}_.^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})$ *est solution de* (24')
- *$\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$) désigne l'intérieur (resp. l'adhérence) de A dans $(\Omega_x^n)'$.*

Remarquons que si $\Gamma = 0$, nous obtenons les estimations de la proposition 1. Nous définissons pour chaque ω $\mathbb{P}$-presque sûrement la probabilité :

$$\overline{N}_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, dw) = \frac{N_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, dw)}{N_{\Gamma}^{\epsilon}\left(\omega, (\Omega_x^n)'\right)}$$

où

$$N_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, dw) = T_{\Gamma}^{\epsilon}\left(\hat{\mathscr{F}}(\omega), dw\right) \tag{33}$$

et T_{Γ}^{ϵ} est définie dans (30) et $\hat{\mathscr{F}}$ dans (28).
Nous avons le résultat suivant

Théorème 5 *1. $N_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, dw)$ est une version non normalisée de la loi conditionnelle X^{ϵ} sachant Y^{ϵ}.*
De plus, nous avons les estimations suivantes $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout A borélien de $(\Omega_x^n)'$:

$$-l_{\omega}^{\Gamma}(\mathring{A}) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log N_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, A) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log N_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, A) \leq -l_{\omega}^{\Gamma}(\overline{A}) \tag{34}$$

avec $l_{\omega}^{\Gamma} = \hat{L}_{\hat{\mathscr{F}}(\omega)}^{\Gamma}$ où $\hat{L}_{\hat{\mathscr{F}}(\omega)}^{\Gamma}$ est définie dans le théorème 4.

2. $\overline{N}_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, dw)$ est une version de la loi conditionnelle X^{ϵ} sachant Y^{ϵ}. De plus, nous avons les estimations suivantes $\mathbb{P}$-presque sûrement pour tout A borélien de $(\Omega_x^n)'$

$$-\overline{l}_{\omega}^{\Gamma}(\mathring{A}) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log \overline{N}_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, A) \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log \overline{N}_{\Gamma}^{\epsilon}(\omega, A) \leq -\overline{l}_{\omega}^{\Gamma}(\overline{A}) \tag{35}$$

où l'on a posé

$$\overline{l}_{\omega}^{\Gamma}(z) = l_{\omega}^{\Gamma}(z) - l_{\omega}^{\Gamma}\left((\Omega_x^n)'\right). \tag{36}$$

Le 1) du théorème résulte directement du théorème 4.
Le 2) résulte du 1) et de l'expression (16) en faisant $A = (\Omega_x^n)'$. Par identification, $l_\omega^\Gamma(z)$ a pour expression :

$$l_\omega^\Gamma(z) = \inf_{\mathrm{h}\in H^r} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\dot{\tilde{\mathrm{h}}}|^2 + \left|\Gamma\left(p_1\left(C_s(\tilde{\mathrm{h}})\right)(\omega)\right)\right|^2 \right) ds - p_2\left(C_1(\tilde{\mathrm{h}})\right)(\omega);\ z = p_1\left(C(\tilde{\mathrm{h}})\right)(\omega)\ et\ p_2\left(C(\tilde{\mathrm{h}})\right)(\omega) \in (\Omega_x^1)' \right\}$$

où $C(\tilde{\mathrm{h}})(\omega) = \hat{\mathscr{F}}(\omega)\left(\hat{C}^{\hat{\mathscr{F}}(\omega)}(\tilde{\mathrm{h}})\right)$ est solution de

$$C_t(\tilde{\mathrm{h}}) = (x,0) + \sum_{i=1}^r \int_0^t \hat{\sigma}_i\left(C_s(\tilde{\mathrm{h}})\right)\cdot \dot{\tilde{\mathrm{h}}}_s^i ds + \sum_{j=1}^l \int_0^t \hat{\sigma}_j\left(C_s(\tilde{\mathrm{h}})\right)\circ dY_s^j + \int_0^t \hat{\sigma}_0^1\left(C_s(\tilde{\mathrm{h}})\right) ds.$$

Remarque Signalons le fait que si les σ_j sont tous nuls, nous avons obtenu une autre méthode plus directe pour les traitements des résultats de Hijab [7].

4 Applications

Considérons le couple signal / observation défini par (1). Soient χ et θ deux fonctionnelles de classe C_b^{N+3} et C_b^{N+1} sur Ω_x^n. Supposons aussi que la dérivée $d^{N+3}\theta$ est bornée sur les parties bornée de Ω_x^n.

On veut étudier le comportement asymptotique de

$$J(\epsilon) = \mathbb{E}\left\{\chi(X^\epsilon)\exp - \frac{\theta(X^\epsilon)}{\epsilon^2} | Y^\epsilon = \omega\right\}$$

et préciser les termes du développement comme dans Schilder [13], Azencott [1], Doss [5] et Ben Arous [2]. Plus précisemment, sous la condition de minimum non dégénéré pour la fonctionnelle $\theta + l_\omega^\Gamma$, nous donnons un développement asymptotique du type

$$e^{-\frac{a_\omega}{\epsilon^2}} e^{-\frac{c_\omega}{\epsilon}} \left(\alpha_{0,\omega} + \alpha_{1,\omega}\epsilon + \cdots + \alpha_{N,\omega}\epsilon^N + o(\epsilon^{N+1})\right) \tag{37}$$

pour les intégrales du type

$$J_\omega^\Gamma(\epsilon) = N_\Gamma^\epsilon\left(\omega, \chi(\cdot)\exp - \frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \tag{38}$$

où N_Γ^ϵ et l_ω^Γ sont définies dans le théorème 4.

Comme dans l'étude des grandes déviations, on commence par le cas $\Gamma = 0$. Posons alors

$$J_\Phi(\epsilon) = T_0^\epsilon\left(\Phi, \chi(\cdot)\exp - \frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \tag{39}$$

où $T_0^\epsilon(\Phi, dw)$ est la loi du processus défini par (4) et (5) en remplaçant Φ^ϵ par Φ fixé, i.e. $T_0^\epsilon(\Phi, dw)$ est une version particulière de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Φ^ϵ.

Précisons d'abord la fonctionnelle d'action définie par (10). Pour chaque $\Phi \in \mathbb{D}^n$, notons β_Φ l'application qui à $\tilde{\mathrm{h}} \in H^r$ associe $\overline{X}^{\Phi}(\tilde{\mathrm{h}})$ la solution de l'équation (7). Ainsi

$$\beta_{\Phi,\cdot}(\tilde{\mathrm{h}}) = \overline{X}^{\Phi}_{\cdot}(\tilde{\mathrm{h}}). \tag{40}$$

D'où

$$L^0_\Phi(z) = \inf_{\mathrm{h} \in H^r} \left\{ \frac{1}{2} ||\tilde{\mathrm{h}}||^2_{H_r} \mid z = \Phi_\cdot \left(\beta_{\Phi,\cdot}\right)(\tilde{\mathrm{h}}) \right\}. \tag{41}$$

Pour presque tout $\Phi \in \mathbb{D}^n$, considérons le processus $\overline{X}^{\epsilon,\Phi} = \left(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_t\right)_{t\in[0,1]}$ solution de (5'), alors quand $\Phi \in F(\Omega^l)$ où F est définie dans (9), i.e. $\Phi = F(\omega)$ nous posons $\overline{X}^{\epsilon,\omega} = \left(\overline{X}^{\epsilon,F(\omega)}_t\right)_{t\in[0,1]}$. Nous pouvons alors définir une fonctionnelle d'action $\tilde{L}^0_\Phi(\overline{z})$ pour le processus $\overline{X}^{\epsilon,\omega}$

$$\tilde{L}^0_\Phi(\overline{z}) = \inf_{\mathrm{h} \in H^r} \left\{ \frac{1}{2} ||\tilde{\mathrm{h}}||^2_{H_r} \mid \overline{z} = \beta_{\Phi,\cdot}(\tilde{\mathrm{h}}) \right\} \tag{42}$$

voir Doss [6] pour le cas abélien et Rabeherimanana [9] pour le cas nilpotent. Comme les écritures $X_t = \Phi_t\left(\overline{X}^{\epsilon}_t, \omega\right)$ et $\overline{X}^{\epsilon}_t = \Phi_t^{-1}(X_t, \omega)$ sont parfaitement équivalentes, alors

$$\begin{aligned} L^0_\Phi(z) &= \inf_{\tilde{\mathrm{h}} \in H^r} \left\{ \tfrac{1}{2} ||\tilde{\mathrm{h}}||^2_{H_r} \mid \Phi_\cdot \left(\beta_{\Phi,\cdot}\right)(\tilde{\mathrm{h}}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{h}_\Phi \circ \left(\beta_{\Phi,\cdot}\right)(\tilde{\mathrm{h}}) \right\} \\ &= \left\{ \tilde{L}^0_\Phi(\overline{z}) \ lorsque \ z = \Phi(\overline{z}) \right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Nous avons la propriété suivante :

(P1) : *Si* $\tilde{L}^0_\Phi(\overline{z}) < +\infty$, *alors il existe un unique* $\tilde{\mathrm{h}} \in H^r$ *tel que* $\frac{1}{2}||\tilde{\mathrm{h}}||^2_{H^r} = \tilde{L}^0_\Phi(\overline{z})$.

Il est connu que si χ est non nulle au voisinage des points où $\theta + L^0_\Phi$ atteint son minimum, alors

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^2 \log J_\Phi(\epsilon) = -\inf\{\theta + L^0_\Phi\}. \tag{44}$$

Nous supposons que :

C1 : $\theta + L^0_\Phi$ atteint son minimum en un nombre fini de ponts $z_1, \cdots, z_{n'}$ de $(\Omega^n_x)'$ (ce qui est équivalent à $\theta \circ \mathrm{h}_\Phi + \tilde{L}^0_\Phi$ atteint son minimum en un nombre fini de points $z_1, \cdots, z_{n'}$).

Par la propriété **P1**, nous avons sous la condition **C1**

$$\begin{aligned} a_\Phi &= \inf\left\{\theta + L^0_\Phi(z),\ z \in (\Omega^n_x)'\right\} \\ &= \inf\left\{\theta \circ \mathrm{h}_\Phi + \tilde{L}^0_\Phi(\overline{z}),\ \overline{z} \in \Omega^n_x\right\} \\ &= \inf\left\{\theta \circ \mathrm{h}_\Phi \circ \beta_\Phi(\tilde{\mathrm{h}}) + \tfrac{1}{2}||\tilde{\mathrm{h}}||^2_{H^r},\ \tilde{\mathrm{h}} \in H^r\right\} \end{aligned} \tag{45}$$

et l'infinimum du dernier est atteint en n' points de H^r $\tilde{\mathrm{h}}_1, \cdots, \tilde{\mathrm{h}}_{n'}$ tels que $\mathrm{h}_\Phi \circ \beta_\Phi(\tilde{\mathrm{h}}_i) = z_i$ et $\frac{1}{2}||\tilde{\mathrm{h}}_i||^2_{H^r} = L^0_\Phi(z_i)$.

Nous supposons aussi que

C2 : Pour tout $i \in \{1,\cdots,n'\}$, $\tilde{\mathrm{h}}_i$ est un minimum non dégénéré de $\theta\circ \mathrm{h}_\Phi \circ \beta_\Phi + \frac{1}{2}||\cdot||^2_{H^r}$ i.e.

$$\forall v \neq 0,\ d^2\left(\theta\circ \mathrm{h}_\Phi \circ \beta_\Phi + \frac{1}{2}||\cdot||^2_{H^r}\right)(\tilde{\mathrm{h}})\, v^2 > 0.$$

Sous ces conditions, le développement asymtotique suivant est valable

$$\begin{aligned} J_\Phi(\epsilon) &= T_0^\epsilon\left(\Phi, \chi(\cdot)\exp -\frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \\ &= e^{-\frac{a_\Phi}{\epsilon^2}}\, e^{-\frac{c_\Phi}{\epsilon}}\left(\alpha_{0,\Phi} + \alpha_{1,\Phi}\epsilon + \cdots + \alpha_{N,\Phi}\epsilon^N + o(\epsilon^{n+1})\right) \end{aligned} \tag{46}$$

où a_Φ est défini dans la condition **C1**, c_Φ et $\alpha_{i,\Phi}$ pour $i = 0,\cdots,N$ sont définis dans [2] avec les changements correspondants.

Par identification, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\omega(\epsilon) &= J_{F(\omega)}(\epsilon) \\ &= T_0^\epsilon\left(F(\omega), \chi(\cdot)\exp -\frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \\ &= e^{-\frac{a_{F(\omega)}}{\epsilon^2}}\, e^{-\frac{c_{F(\omega)}}{\epsilon}}\left(\alpha_{0,F(\omega)} + \alpha_{1,F(\omega)}\epsilon + \cdots + \alpha_{N,F(\omega)}\epsilon^N + o(\epsilon^{n+1})\right) \end{aligned}. \tag{47}$$

En effet, tout revient à donner le développement asymptotique pour $\mathbb{E}\left\{\chi_\Phi(\overline{X}^{\epsilon,\Phi})\exp -\frac{\theta_\Phi(\overline{X}^{\epsilon,\Phi})}{\epsilon^2}\right\}$, où les coefficients dépendent continûment de Φ avec les hypothèses de classe annoncées au début. On suit alors les démonstrations de [2] avec les changements appropriés.

Pour le cas où $\Gamma \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{J}_\Phi(\epsilon) &= \hat{T}_0^\epsilon\left(\Phi, \hat{\chi}(\cdot)\exp -\frac{\hat{\theta}(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \\ &= e^{-\frac{\hat{a}_\Phi}{\epsilon^2}}\, e^{-\frac{\hat{c}_\Phi}{\epsilon}}\left(\hat{\alpha}_{0,\Phi} + \hat{\alpha}_{1,\Phi}\epsilon + \cdots + \hat{\alpha}_{N,\Phi)}\epsilon^N + o(\epsilon^{n+1})\right) \end{aligned}. \tag{48}$$

l'analogue de la formule (46) pour le couple C_t^ϵ défini par (20) à (24) et $\hat{T}^\epsilon(\Phi, dw)$ est définie dans (29).

Posons

$$\begin{aligned} J_\phi^\Gamma(\epsilon) &= T_\Gamma^\epsilon\left(\Phi, \chi(\cdot)\exp -\frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right) \\ &= \mathbb{E}_0^{\epsilon\tilde{B}}\left(\chi\left(p_1\hat{V}(\Phi)\right)(\cdot)\exp -\frac{\theta(p_1\hat{V}(\Phi))(\cdot)+\Lambda_1}{\epsilon^2}\right) \end{aligned}. \tag{49}$$

où T_Γ^ϵ est définie dans (30). Comme

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Psi(C_1, C_2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\int_0^1 \Gamma_j^2(C_1(s))\,ds - C_2(1), \end{aligned}$$

alors

$$J_\phi^\Gamma(\epsilon) = T_0^\epsilon\left(\Phi, \chi(\cdot)\exp -\frac{\theta(\cdot)+\Psi\left(\cdot, p_2\left(\Phi\left(\hat{C}^\Phi(\cdot)\right)\right)\right)}{\epsilon^2}\right).$$

On applique alors la formule (46) en remplaçant le $\theta(\cdot)$ de (46) par $\theta(\cdot)+\Psi\left(\cdot, p_2\left(\Phi\left(\hat{\overline{C}}^{\Phi}(\cdot)\right)\right)\right)$ pour avoir le développement asymptotique.

Par identification, nous avons alors le résultat pour

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{\Gamma}_{\omega}(\epsilon) &= J^{\Gamma}_{\hat{F}(\omega)}(\epsilon)\\ &= N^{\epsilon}_{\Gamma}\left(\omega, \chi(\cdot)\exp - \frac{\theta(\cdot)}{\epsilon^2}\right).\end{aligned}$$

Références

[1] R. AZENCOTT. Formule de TAYLOR asymptotique et développement asymptotique. *Séminaire de Probabilités XVI, Springer-Verlag,* pages 237–284, 1980-81.

[2] G. BEN AROUS. Méthodes de laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de WIENER. *Stochastics,* 25 :125–153, 1988.

[3] G. BEN AROUS and F. CASTELL. Flow decompositions and large deviations. *Journal of Functional Analysis,* 140(1), aug 1996.

[4] J. BISMUT. A generalized formula of ITO and some properties of stochastic flows. *Zeitschrift für Warscheinlichkeitstheorie,* 55 :99–125, 1981.

[5] H. DOSS. Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques. *Ann. Instit. Henri Poincaré,* 26(1) :17–28, 1980.

[6] H. DOSS. Un nouveau principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire. *Ann. Instit. Henri Poincaré,* 27(3) :407–423, 1991.

[7] O. HIJAB. Asymptotic bayesian estimation of a first order equation with small diffusion. *The Annals of Probability,* 13(3) :890–902, 1981.

[8] H. KUNITA. On the decomposition of solution of stochastic differential equations. In *Stochastics Integrals, L.M.S Durham Symposium 1980 (Lecture Notes in Mathematics),* volume 851, pages 213–255. Berlin Heidelberg New York :Springer, 1981.

[9] T. RABEHERIMANANA. Principe de grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire et algèbres de LIE nilpotentes. *Ann. Instit. Henri Poincaré,* 30 :331–352, 1994.

[10] T. RABEHERIMANANA. Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse,* XI(2) :201–224, 2002.

[11] T. RABEHERIMANANA and S. SMIRNOV. Petites perturbations de systèmes dynamiques et algèbres de LIE nilpotentes. Une extension des estimations de DOSS et STROOCK. *Séminaire de Probabilités XXVIII in Lecture Notes in Math,* 1583, 1994.

[12] L. RAJAONARISON and T. RABEHERIMANANA. Grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire via la théorie des décompositions des flots. *JMMAFI,* 1 :33–42, 2014.

[13] M. SCHILDER. Some asymptotic formulas for WIENER integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 125 :63–65, 1966.

[14] S. VARADHAN. Asymptotic probabilities and differential equations. *Comm. Pure and Appl. Math XIX*, pages 261–286, 1966.