Journal de Mathématiques,
Mathématiques & Applications
Fondamentales et Informatique
JMMAFI 2014, Vol.**1**,pp 33-42

Grandes déviations en théorie du filtrage non linéaire via la théorie des décompositions des flots

L.I. RAJAONARISON[1], T.J. RABEHERIMANANA[2]

[1]ESPA. Dépatement d'électronique.

[2]Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique ; BP 906, Ankatso, 101 Antananarivo, Madagascar

[1]*lilirabe@voila.fr*, [2]*rabeherimanana.toussaint@gmx.fr*

Résumé : Le but de cet article est de montrer que la théorie des décompositions des flots d'E.D.S voir Kunita [4] et Bismut [2] permet d'étendre dans le cas corrélé les résultats de grandes déviations de Hijab [3] en théorie du filtrage non linéaire, quand les variances des bruits tendent ves 0.
Mots-clefs : Décompositions des flots d'E.D.S, principe de grandes déviations, filtrage non linéaire.
Abstract : In this paper, we use the decomposition theorem for flows of S.D.E (see Kunita [4] and Bismut [2]) for proving a large deviations principle in non linear filtering theory in the correlated case extending Hijab's result [3] when the noise variances go to 0.
Keywords : Decomposition theorem for flows of S.D.E, large deviations principle, non linear filtering.

Introduction

Considérons le couple signal/ observation, interprété au sens de Stratonovich

$$\begin{cases} X_t^\epsilon &= x + \epsilon \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \widetilde{\sigma}_i(X_s^\epsilon) \circ d\widetilde{B}_s^i + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(X_s^\epsilon) \circ dY_s^{\epsilon,j} + \int_0^t \widetilde{\sigma}_0(X_s^\epsilon) ds \\ Y_t^\epsilon &= \int_0^t \Gamma(X_s^\epsilon) ds + \epsilon B_t; \; X_0^\epsilon = x \in \mathbb{R}^n, \; Y_0^\epsilon = 0 \in \mathbb{R}^l \end{cases} \tag{1}$$

Ici, les $\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1, ..., \widetilde{\sigma}_r, \sigma_1, ..., \sigma_l$ sont $(n + l + 1)$ champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, Γ est une application régulière de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$. $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t^i)_{i \in \{1,\cdots,r\}}$ et $B = (B_t^j)_{j \in \{1,\cdots,l\}}$ sont 2 mouvements browniens indépendants issus de 0 à l'instant 0. Nous noterons P (resp. $\widetilde{P}$) la mesure de Wiener associée à B (resp. $\widetilde{B}$).

Le but de cet article est de démontrer un principe de grandes déviations relatif à une version de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Y^ϵ. A cet effet, nous utilisons un théorème de décompositions de solutions d'E.D.S. pour le signal. Plus précisément, X^ϵ solution de (1) s'écrit

$$X_t^\epsilon = \Phi_t^\epsilon(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \tag{2}$$

où $\Phi_t^\epsilon(x)$ est la version essentiellement unique de

$$X_t^\epsilon = x + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(X_s^\epsilon) \circ dY_s^{\epsilon,j} \tag{3}$$

qui est un flot $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^n$, noté $\mathbb{D}^n$ et $\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}$ est solution d'une E.D.S. dont les coefficients dépendent continûment de Φ^ϵ.

Dans un premier temps, fixant le flot Φ, nous donnons une estimation asymptotique pour la famille $(T_\Gamma^\epsilon(\Phi, dw))_{\epsilon>0}$ une version non normalisée de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Φ^ϵ en introduisant une condition pour éliminer l'intégration en dY dans l'exponentielle de Girsanov. Et par identification, nous obtenons notre résultat central (le théorème 5).

Cet article comporte trois sections.
Dans la section 1, nous décomposons le signal suivant les idées de Kunita [4] et Bismut [2] et énonçons les résultats de grandes déviations de Ben Arous et Castell [1], voir aussi Rabeherimanana [5] et [6], relatifs à la famile $(N_0^\epsilon(\omega, dw))_{\epsilon>0}$ où $N_0^\epsilon(\omega, dw)$ désigne une version de la loi conditionnelle de X^ϵ sachant Y^ϵ (cas où $\Gamma = 0$).
La section 2 est consacrée au résultat classique en théorie du filtrage non linéaire.
Dans la section 3, nous démontrons le résultat central de cet article (le théorème 5).

1- DECOMPOSITIONS DE SOLUTIONS D'E.D.S. ET PRINCIPE DE GRANDES DEVIATIONS DANS LE CAS OU $\Gamma = 0$

Dans cette section, nous supposons que $\Gamma = 0$ et de plus l'hypothèse H1 est vérifiée.
Hypothèse H1. Nous supposons que les $(r + l + 1)$-champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ $\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\sigma}_1, ..., \widetilde{\sigma}_r, \sigma_1, ...\sigma_l$ sont de classe $\mathcal{C}_b^\infty$.

Considérons X_t^ϵ solution de (3). Alors il existe une version de $(t, x) \to X_t^\epsilon(x)$ qui est un flot de $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^n$ i.e. un élément de $\mathbb{D}^n$. Notons $\Phi_t^\epsilon(x)$ cette version essentiellement unique de $X_t^\epsilon(x)$. alors presque sûrement $\forall t \in [0, 1]$, nous pouvons définir des champs de vecteurs stochastiques pour chaque $i \in [0, r]$

$$\widetilde{\sigma}_i^{\epsilon,*}(x) = \left(\frac{\partial \Phi_t^\epsilon(x)}{\partial x}\right)^{-1} \widetilde{\sigma}_i(\Phi_t^\epsilon(x)) \tag{4}$$

Alors par la formule d'Ito généralisée, X^ϵ solution du signal s'écrit

$X_t^\epsilon = \Phi_t^\epsilon\left(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right)$, où $\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}$ est solution de l'E.D.S.

$$d\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = \epsilon \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}_i^{\epsilon,*}\left(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right) \circ d\widetilde{B}_t^i + \widetilde{\sigma}_0^{\epsilon,*}\left(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}\right) dt; \qquad \overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon} = x \tag{5}$$

$\mathbb{D}^n$ est muni de la $\mathcal{C}^{0,k}$ ou $\widetilde{\mathcal{C}}^{0,k}$-topologie, définie $\forall k \in \mathbb{N}$ par

- $\Phi^n \xrightarrow{\mathcal{C}^{0,k}} \Phi$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, on a $\sup_{x\in K, t\in[0,1], |\alpha|\leqslant k} |\partial^\alpha \Phi^n_t(x) - \partial^\alpha \Phi_t(x)| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$
- $\Phi^n \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{C}}^{0,k}} \Phi$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, on a $\sup_{x\in K, t\in[0,1], |\alpha|\leqslant k} \|\partial^\alpha \Phi^n_t(x) - \partial^\alpha \Phi_t(x)\| + \|\partial^\alpha (\Phi^n_t)^{-1}(x) - \partial^\alpha (\Phi_t)^{-1}(x)\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Dans toute la suite, si u est un entier, Ω^u_x désignera l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^u$, issues de x à l'instant 0 muni de la topologie de la convergence uniforme et H^u_x le sous-espace de Cameron-Martin associé.

$$H^u = \left\{ \begin{array}{l} h : [0,1] \to \mathbb{R}^u, h(0) = 0, h \text{ absolument par rapport à la mesure de} \\ \text{Lebesgue avec une dérivée de carrée intégrable telle que} \\ \int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds < +\infty \end{array} \right\}$$

H^u est un espace d'Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^1 \dot{u}_s.\dot{v}_s \, ds$$

Fixant $\Phi^\epsilon = \Phi$ revient à contrôler $Y^\epsilon = \epsilon B$ par $Y \in \Omega^l_0$.
Définissons une application V qui à $\Phi \in \mathbb{D}^n$, associe pour chaque $\widetilde{\omega} \in \Omega^r_0$

$$V(\Phi)(\widetilde{\omega}) = \Phi_\bullet(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_\bullet) \tag{6}$$

où $\Phi_t(x)$ est la version essentiellement unique de

$$x_t = x + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(x_s) \circ dY^j_s$$

qui est un flot de $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme dans $\mathbb{R}^n$ i.e. un élément de $\mathbb{D}^n$ et $\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_t$ est solution de (5')

$$(5') \qquad d\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_t = \epsilon \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}^*_i(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_t) \circ d\widetilde{B}^i_t + \widetilde{\sigma}^*_0(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}_t) dt; \ \overline{X}^{\epsilon,\Phi}_0 = x$$

avec $\widetilde{\sigma}^*_i(x) = \left(\dfrac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x}\right)^{-1} \widetilde{\sigma}_i(\Phi_t(x))$ pour chaque $i \in [0, r]$.

Sans hypothèse sur Φ, les trajectoires de $\overline{X}^{\epsilon,\Phi}$ peuvent exploser. donc (5') définit une application de Ω^r_0 vers l'espace $\Omega^{n'}_x$, espace des trajectoires explosives

$$\Omega^{n'}_x = \left\{ \begin{array}{l} f, \text{ fonction continue de } [0,1] \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \text{ avec } f(0) = x \text{ vérifiant} \\ f(t_0) = \infty \Rightarrow \forall t \in [t_0, 1], \ f(t) = \infty \end{array} \right\}$$

Quand $f \in \Omega^{n'}_x$, on définit le temps d'explosion de f par

$$\tau(f) = \inf\{s, f(s) = \infty\}$$

On munira $\Omega^{n'}_x$ de la topologie définie par

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\Omega_x^{n'}$
si est seulement si,
f_n converge uniformément vers f sur tous les compacts de $[0, \tau(f)[$
$V(\Phi)$ est donc un élément de $L^\infty(\Omega_0^r, \Omega_x^{n'})$.

Pour chaque $\tilde{h} \in H^r$ et $\Phi \in \mathbb{D}^n$, définissons un processus $\overline{X}^\Phi(\tilde{h})$, solution de l'équation différentielle ordinaire

$$d\overline{X}_t^\Phi(\tilde{h}) = \left(\sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^{*}(\overline{X}_t^\Phi(\tilde{h}))\dot{\tilde{h}}_t^i + \tilde{\sigma}_0^*(\overline{X}_t^\Phi(\tilde{h}))\right) dt;\ \overline{X}_t^\Phi(\tilde{h}) = x \tag{7}$$

où les coefficients sont définis dans (5')
Définissons une application
$F: \ H^l \ \to \mathbb{D}^n$
$\quad h \ \to$ flot de difféomorphisme associé à l'équation différentielle ordinaire

$$dX_t^h = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j(X_t^h)\dot{h}_t^j dt;\ \ X_0^h = x \tag{8}$$

Nous notons encore F l'extension mesurable de f sur Ω^l, selon les idées de Bismut [2] :
$F: \ \Omega^l \ \to \mathbb{D}^n$
$\quad \omega \ \to F(\omega) = X$ si X est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \sum_{j=1}^{l} \sigma_j(X_t) \circ dY_t^j;\ \ X_0^h = x \tag{9}$$

Notons $T_0^\epsilon(\Phi, dw)$ la loi du processus $\mathcal{V}(\Phi)$ ($T_0^\epsilon(\Phi, dw)$ est une mesure de probabilités sur $\Omega_x^{n'}$). Nous énonçons un résultat de grandes déviations de Ben Arous et Castell [1] relatif à la famille $(T_0^\epsilon(\Phi, dw))_{\epsilon>0}$

Proposition 1 . *Fixons Φ dans $\mathbb{D}^n$, nous définissons une fonctionnelle L_Φ^0 sur $\Omega_x^{n'}$ par la formule*
$\forall z \in \Omega_x^{n'}, L_\Phi^0(z) = \inf \left\{ \frac{1}{2}\|\tilde{h}\|_{H^r}^2 \text{ lorsque } \tilde{h} \in H^r \text{ vérifie } z = \Phi_\bullet(\overline{X}_\bullet^\Phi(\tilde{h})) \right\}$
avec la convention $\inf\{\emptyset\}=+\infty$
où $\overline{X}^\Phi(\tilde{h})$ est solution de (7). Alors, la famille $(T_0^\epsilon(\Phi, dw))_{\epsilon>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action L_Φ^0.

De plus si $\tau(\overline{X}^{\epsilon,\Phi}) > 1$, $\tilde{P}$-p.s. et si $\tau(\overline{X}^\Phi(\tilde{h})) > 1$, le résultat est valable quand on remplace $\Omega_x^{n'}$ par Ω_x^n.

Nous définissons pour chaque $\omega - P$ presque sûrement
- la probabilité $N_0^\epsilon(\omega, dw) = T_0^\epsilon(F(\omega), dw)$
- $\forall \tilde{h} \in H^r, \xi(\tilde{h})(\omega) = F(\omega)(\overline{X}^{F(\omega)}(\tilde{h}))$

- la fonctionnelle d'action $l^0_\omega = L^0_{F(\omega)}$

$\xi(\widetilde{h})$ est solution de

$$\xi_t(\widetilde{h}) = x + \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \widetilde{\sigma}_i(\xi_s(\widetilde{h}))\dot{\widetilde{h}}^i_s ds + \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \sigma_j(\xi_s(\widetilde{h})) \circ dY^j_s + \int_0^t \widetilde{\sigma}(\xi_s(\widetilde{h}))ds \quad (10)$$

Alors nous avons

Proposition 2 *[1].* $N^\epsilon_0(\omega, dw)$ *est une mesure de probabilité sur* Ω^n_x*, qui est une version de la loi conditionnelle* X^ϵ *sachant* Y^ϵ*.*
La famille $(N^\epsilon_0(\omega, dw))_{\epsilon>0}$ *admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d' action* l^0_ω*. De plus, nous avons les estimations suivantes* $\forall A \subset \Omega^n_x$

$$-l^0_\omega(A^\circ) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\inf \epsilon^2 \ln N^\epsilon_0(\omega, A) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\sup \epsilon^2 \ln N^\epsilon_0(\omega, A) \leqslant -l^0_\omega(A^-) \quad (11)$$

où A° *(resp.* A^-*) désigne l'intérieur de* A *(resp. l'adhérence de* A*).*

2- FILTRAGE NON LINEAIRE

Considérons le couple signal/observation, solution de (1). Pour chaque $\Pi \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et bornées sur $\mathbb{R}^n$, nous définissons le filtre non normalisé par

$$\rho^\epsilon_t \Pi = E^{\widetilde{B}}_0 \left[\Pi(X^\epsilon_t)\Xi^\epsilon_t\right] \quad (12)$$

où

$$\Xi^\epsilon_t = \exp \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma_j(X^\epsilon_s) dY^{\epsilon,j}_s - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma^2_j(X^\epsilon_s)ds}{\epsilon^2} \quad (13)$$

P_0 est la probabilité définie par la formule

$$\frac{dP_0}{dP}/F_t = (\Xi^\epsilon_t)^{-1} \quad (14)$$

et $E^{\widetilde{B}}_0$ désigne l'intégration par rapport à $\widetilde{B}$ sous P_0 et F_t la filtration associée à $(B_t, \widetilde{B}_t)$. Sous cette loi, $\frac{Y^\epsilon}{\epsilon}$ est un mouvement brownien indépendant de $\widetilde{B}$. Il est connu qu'une version mesurable de la loi conditionnelle de Ξ^ϵ sachant Y^ϵ est définie par la formule

$$\overline{N}^\epsilon_\Gamma(\omega, A) = \frac{E^{\widetilde{B}}_0[1_A(X^\epsilon)\Xi^\epsilon_1]}{E^{\widetilde{B}}_0[\,\Xi^\epsilon_1]} \quad (15)$$

et que le filtre non normalisé est solution de l'E.D.P.S. (16) au sens de Stratonovich connu sous le nom d'équation de Zakai

$$d\rho_t^\epsilon \Pi = \rho_t^\epsilon (L_0^\epsilon \Pi) dt + \sum_{j=1}^{l} \rho_t^\epsilon (L_j^\epsilon \Pi) \circ \frac{dY_t^{\epsilon,j}}{\epsilon} \tag{16}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} L_o^\epsilon &= \tfrac{\epsilon^2}{2} \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}_i^2 + \widetilde{\sigma}_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \sigma_j \Gamma^j - \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=1}^{l} (\Gamma_j)^2}{\epsilon^2} \\ L_j^\epsilon &= \epsilon \sigma_j + \tfrac{\Gamma_j}{\epsilon} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$\widetilde{\sigma}_i^2 = \sum_{l,k} \widetilde{\sigma}_i^l \frac{\partial}{\partial x_l} (\widetilde{\sigma}_l^k \frac{\partial}{\partial x_k})$ et $(\Gamma_j)^2$ désigne le carré de la fonction Γ_j

Dans la section suivante, nous étudions le comportement asymptotique de $\overline{N}_\Gamma^\epsilon(\omega, dw)$ définie par (15) lorsque ϵ tend vers 0.

3- PRINCIPE DE GRANDES DEVIATIONS EN THEORIE DU FILTRAGE NON LINEAIRE

Dans toute la suite, nous supposons vérifiée l'hypothèse H2

Hypothèse H2. En plus de l'hypothèse H1, nous supposons que :

$H_{21}\bullet$ Γ est une application de classe $\mathcal{C}_b^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^l$

$H_{22}\bullet$ il existe une application $\mathcal{W}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour chaque $j \in \{1, \cdots, l\}$ $\quad \sigma_j \mathcal{W} = \Gamma_j$.

Posons

$$\Lambda_t^\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma_j^2(X_s^\epsilon) ds - \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma_j(X_s^\epsilon) dY_s^{\epsilon,j}$$

Par le (5) et la formule d'Ito

$$\Lambda_t^\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \int_0^t (\epsilon^2 \sigma_j + \Gamma_j) \Gamma_j \Phi_s^\epsilon (\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) ds - \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma_j \left(\Phi_s^\epsilon (\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \right) \circ dY_s^{\epsilon,j} \tag{18}$$

Sous l'hypothèse H2 et par la formule d'Ito généralisée, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\left(\Phi_t^\epsilon (\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \right) &= \sum_{j=1}^{l} \int_0^t \Gamma_j \left(\Phi_s^\epsilon (\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi^\epsilon}) \right) \circ dY_s^{\epsilon,j} \\ &+ \epsilon \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \widetilde{\sigma}_i^{\epsilon,*} (\mathcal{W} \circ \Phi_s^\epsilon) \left(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi^\epsilon} \right) \circ d\widetilde{B}_s^i \\ &+ \int_0^t \widetilde{\sigma}_0^{\epsilon,*} (\mathcal{W} \circ \Phi_s^\epsilon) \left(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi^\epsilon} \right) ds \end{aligned} \tag{19}$$

Fixons Φ dans $\mathbb{D}^n$. Définissons une mesure sur Ω_x^n par la formule

$$T_\Gamma^\epsilon(\Phi, A) = E_0^{\widetilde{B}}\left[1_A\left(\Phi(\overline{X}^{\epsilon,\Phi})\right)\exp -\frac{\Lambda_1^\epsilon}{\epsilon^2}\right] \tag{20}$$

Alors nous avons

Théorème 3. P*-presque sûrement* $\forall A \subset \Omega_x^n$

$$-L_\Phi^\Gamma(A^\circ) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\inf \epsilon^2 \ln T_\Gamma^\epsilon(\Phi, A) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0}\sup \epsilon^2 \ln T_\Gamma^\epsilon(\Phi, A) \leqslant -L_\Phi^\Gamma(A^-) \tag{21}$$

où L_Φ^Γ *est définie par la formule (22) et* A° *(resp.* A^- *désigne l'intérieur de* A *(resp. l'adhérence de A).*

$$L_\Phi^\Gamma(A) = \inf \left\{\frac{1}{2}\int_0^1\left(\left|\dot{\widetilde{h}}_s\right|^2 + \left|\Gamma\left(\Phi\left(\overline{X}_s^\Phi(\widetilde{h})\right)\right)\right|^2 ds\right) - \int_0^1\sum_{j=1}^l \Gamma_j\left(\Phi\left(\overline{X}_s^\Phi(\widetilde{h})\right)\right) dY_s^j \right. \\ \left. \text{lorsque } \widetilde{h} \in H^r \text{ et } \Phi\left(\overline{X}_s^\Phi(\widetilde{h})\right) \in A\right\} \tag{22}$$

où $\overline{X}^\Phi(\widetilde{h})$ *est défini par (7).*

Remarquons que si $\Gamma = 0$, nous obtenons les estimations de la proposition 1. Considérons Λ_t^ϵ définie par (18).

Comme il a été mentionné dans [3], la démonstration du théorème 3 fait appel aux résultats de la proposition 4 ci-dessous voir [7], utilisant la formule (15). Mais ces résultats ne s'appliquent pas directement à cause du fait que Λ_t^ϵ n'est pas une fonctionnelle continue sur Ω^n pour chaque Y dans Ω^l. Nous devons faire un léger détour pour éliminer l'intégration en dY.

Proposition 4. *Supposons que* (P^ϵ) $\epsilon > 0$ *admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action* I. *Soit* (θ^ϵ) *une famille de fonctions bornées qui converge uniformément vers* θ *lorsque* ϵ *tend vers 0. Posons :*
$dQ^\epsilon = \exp(-\frac{1}{2}\theta^\epsilon)dP^\epsilon$
Alors nous avons les estimations suivantes pour tout ouvert O *et tout fermé* F *:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\epsilon\to 0}\inf \epsilon^2 \ln Q^\epsilon \geqslant -\inf\{I(\omega) + \theta(\omega),\ \omega \in O\} \\ \lim\limits_{\epsilon\to 0}\sup \epsilon^2 \ln Q^\epsilon \leqslant -\inf\{I(\omega) + \theta(\omega),\ \omega \in F\} \end{array}\right\} \tag{23}$$

Signalons que cette proposition est encore valable même si θ^ϵ n'est pas bornée. Il suffit que

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\sup \epsilon^2 \ln E^\epsilon\left(1_{[\theta^\epsilon \geqslant R]}\exp -\frac{\theta^\epsilon}{\epsilon^2}\right) = -\infty$$

Revenons à la démonstration du théorème 3.

Sous l'hypothèse H2 et grâce à (19), nous avons

$$
\begin{aligned}
\Lambda_t^\epsilon(\Phi) &= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\int_0^t (\sigma_j+\Gamma_j)\Gamma_j\Phi_s\left(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi}\right)ds \\
&\quad -\mathcal{W}\left(\Phi_t(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi})\right)+\epsilon\sum_{i=1}^{r}\int_0^t \widetilde{\sigma}_i^*(\mathcal{W}\circ\Phi_s)(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi})\circ d\widetilde{B}_s^i \\
&\quad +\int_0^t \widetilde{\sigma}_0^*(\mathcal{W}\circ\Phi_s)(\overline{X}_s^{\epsilon,\Phi})ds
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
\Psi^\epsilon(w,\Phi) &= \Psi^\epsilon\left(\Phi(w)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\int_0^1 (\sigma_j+\Gamma_j)\Gamma_j\Phi_\epsilon(w)ds \\
&\quad -\mathcal{W}\left(\Phi_1(w)\right)+\epsilon\int_0^1 \widetilde{V}^{\epsilon,*}(\mathcal{W}\circ\Phi_s)(w_s)ds \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\int_0^1\left[\widetilde{\sigma}_i^*(\mathcal{W}\circ\Phi_s)(w_s)\right]^2ds
\end{aligned}
\tag{24}
$$

où $\widetilde{V}^{\epsilon,*}$ est défini par

$$
\widetilde{V}^{\epsilon,*}=\frac{\epsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma^*}_i^2+\widetilde{\sigma}_0^* \tag{25}
$$

Il est clair que Ψ^ϵ converge uniformément vers Ψ^0 lorsque ϵ tend vers 0, pour chaque $\Phi\in\mathbb{D}^n$

Définissons une mesure :

$$
P^\epsilon_{\Phi(\overline{X}^\Phi:\Phi)}(dw)=\exp\frac{\Psi^\epsilon}{\epsilon^2}.T^\epsilon_\Gamma(\Phi,dw) \tag{26}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
P^\epsilon_{\Phi(\overline{X}^\Phi:\Phi)}(dw) &= E_0^{\epsilon\widetilde{B}}1_{dw}\left(\Phi(\overline{X}^\Phi:\Phi)\right).\exp\frac{\Psi^\epsilon-\Lambda_1^\epsilon}{\epsilon^2} \\
&= \int_{\Phi(\overline{X}^{\epsilon,\Phi})\in dw}\exp-\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{\sigma}_i^*(\mathcal{W}\circ\Phi_u)(\overline{X}_u^{\epsilon,\Phi})\right)^2du\right. \\
&\quad \left.+\epsilon\int_0^1\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma}_i^*(\mathcal{W}\circ\Phi_u)(\overline{X}_u^{\epsilon,\Phi})d\widetilde{B}_u^i\right)
\end{aligned}
$$

Par le théorème de Girsanov, $\overline{X}^{\epsilon,\Phi}:\Phi$ est solution de

$$
\begin{aligned}
d\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}:\Phi &= \epsilon\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma}_i^*(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}:\Phi)\circ d\widetilde{B}_t^i+\widetilde{\sigma}_0^*(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}:\Phi)dt \\
&\quad -\sum_{i=1}^{r}\widetilde{\sigma}_i^*(\overline{X}_t^{\epsilon,\Phi}:\Phi)dt \qquad ; \\
\overline{X}_0^{\epsilon,\Phi}:\Phi &= x
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Vu notre hypothèse, les résultats de la proposition 1 s'appliquent à $P^{\epsilon}_{\Phi(\overline{X}^{\Phi}:\Phi)}(dw)$. Plus précisément, la famille $(P^{\epsilon}_{\Phi(\overline{X}^{\Phi}:\Phi)}(dw))_{\epsilon>0}$ admet un principe de grandes déviations avec la fonctionnelle d'action

$$\forall z \in \Omega^n_x, L^0_{\Phi} : (z) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|\widetilde{h}\|^2_{H^r} \text{ lorsque } \widetilde{h} \in H^r \text{ vérifie } z = \Phi_{\bullet} \left(\overline{X}^{\Phi}_{\bullet}(\widetilde{h}) : \Phi \right) \right\}$$

où $\overline{X}^{\Phi}(\widetilde{h}) : \Phi$ est solution de

$$\begin{aligned} d\overline{X}^{\Phi}_t(\widetilde{h}) : \Phi &= \left(\sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}^*_i(\overline{X}^{\Phi}_t : \Phi) \dot{\widetilde{h}}^i_t + \widetilde{\sigma}^*_0 \left(\overline{X}^{\Phi}_t(\widetilde{h}) : \Phi \right) \right. \\ &\qquad \left. - \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\sigma}^*_i(\overline{X}^{\Phi}_t : \Phi) \right) dt; \\ \overline{X}^{\Phi}_0(\widetilde{h}) : \Phi &= x \end{aligned} \tag{28}$$

Grâce à la proposition 4 et par (26), on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \inf \epsilon^2 \ln T^{\epsilon}_{\Gamma}(\phi, A) \geqslant -\inf \left\{ L^0_{\Phi}(z) + \psi^0(z) \text{ lorsque } z \in A^{\circ} \right\}$$
$$\lim_{\epsilon\to 0} \sup \epsilon^2 \ln T^{\epsilon}_{\Gamma}(\phi, A) \leqslant -\inf \left\{ L^0_{\Phi}(z) + \psi^0(z) \text{ lorsque } z \in A^{-} \right\}$$

Notons que si $\overline{X}^{\Phi}(\widetilde{u}) : \Phi = \overline{X}^{\Phi}(\widetilde{v})$, alors $\dot{\widetilde{v}}^i = \dot{\widetilde{u}}^i - \widetilde{\sigma}^*_i(\mathcal{W} \circ \Phi)(\overline{X}^{\Phi}(\widetilde{v}))$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\widetilde{u}}_s|^2 ds + \Psi\left(\Phi(\overline{X}^{\Phi}(\widetilde{u}) : \Phi) \right) = \; & \frac{1}{2}\int_0^1 \left(|\dot{\widetilde{v}}_s|^2 + \left| \Gamma\left(\Phi(\overline{X}^{\Phi}_s(\widetilde{v})) \right) \right|^2 ds \right) \\ & - \int_0^1 \sum_{j=1}^{l} \Gamma_j \left(\Phi(\overline{X}^{\Phi}_s(\widetilde{h})) \right) dY^j_s \end{aligned}$$

Ainsi donc les estimations du théorème 3 s'en suivent.

Nous définissons pour chaque $\omega - P$ presque sûrement

- la probabilité $\overline{N}^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, dw) = \dfrac{N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, dw)}{N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, \Omega^n_x)}$ où

$$N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, dw) = T^{\epsilon}_{\Gamma}\left(F(\omega), dw\right) \tag{29}$$

Alors nous avons le résultat suivant

Théorème 5.

1) $N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, dw)$ *est une version non normalisée de la loi conditionnelle* X^{ϵ} *sachant* Y^{ϵ}. *De plus, nous avons les estimations suivantes* P*-presque sûrement* $\forall A \subset \Omega^n_x$

$$-l^{\Gamma}_{\omega}(A^{\circ}) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0} \inf \epsilon^2 \ln N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, A) \leqslant \lim_{\epsilon\to 0} \sup \epsilon^2 \ln N^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, A) \leqslant -l^{\Gamma}_{\omega}(A^{-}) \tag{30}$$

avec $l^{\Gamma}_{\omega} = L^{\Gamma}_{F(\omega)}$ *où* $L^{\Gamma}_{F(\omega)}$ *est définie dans le théorème 3.*

2) $\overline{N}^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, dw)$ *est une version de la loi conditionnelle* X^{ϵ} *sachant* Y^{ϵ}. *De plus , nous avons les estimations suivantes* P*-presque sûrement* $\forall A \subset \Omega^n_x$

$$-\bar{l}^{\Gamma}_{\omega}(A^{\circ}) \leqslant \lim_{\epsilon \to 0} \inf \epsilon^2 \ln \overline{N}^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, A) \leqslant \lim_{\epsilon \to 0} \sup \epsilon^2 \ln \overline{N}^{\epsilon}_{\Gamma}(\omega, A) \leqslant -\bar{l}^{\Gamma}_{\omega}(A^{-}) \quad (31)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \bar{l}^{\Gamma}_{\omega}(z) = l^{\Gamma}_{\omega}(z) - \inf_{\tilde{h} \in H^r} & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|\dot{\tilde{h}}_s|^2 + \left| \Gamma \left(F(\omega)_s \left(\overline{X}^{F(\omega)}_s (\tilde{h}) \right) \right) \right|^2 ds \right) \right. \\ & \left. - \int_0^1 \sum_{j=1}^{l} \Gamma_j \left(F(\omega)_s \left(\overline{X}^{F(\omega)}_s (\tilde{h}) \right) \right) dY^j_s \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Le 1) du théorème résulte directement du théorème 3.
Le 2) résulte du 1) et de l'expression (15) en faisant $A = \Omega^n_x$.

Remarque :
R$_1$. Signalons le fait que si les σ_j sont tous nuls on retrouve les résultats de Hijab [3].
R$_2$. On peut enlever l'hypothèse H2 en considérant le couple

$$\begin{aligned} C^{\epsilon}_t &= \left(X^{\epsilon}_t, \int_0^t \Gamma(X^{\epsilon}_s) dY^{\epsilon}_s \right) \\ &= \left(C^{\epsilon}_{1,s}, C^{\epsilon}_{2,t} \right) \end{aligned}$$

via la théorie des décompositions de flots. Alors l'intégration en dY dans l'exponentielle de Girsanov est éliminée.

REFERENCES

[1] G. Ben Arous & F. Castell, Flow Decompositions and Large Deviations. *J. Funct.Analysis*,**140**,(1996),23-67.
[2] J.M. Bismut, A Generalized Formula of Ito and Some Properties of Stochastic Flows. *Zeitschrift fûr Warscheinlichkeitstheorie*, vol. **55**, (1981), 99-125.
[3] O. Hijab, Asymptotic Bayesian Estimation of a First Order Equation with Small Diffusion. *The Annals of Probability*, vol **12**, n° 3,(1984), 890-902.
[4] H. Kunita, On the Decomposition of Solutions of Stochastic Differential Equations. Stochastics Integrals, Proceeding, L.M.S. Durham Symposium 1980 *Lecture Notes in Mathematics*, vol. **851**,(1981), 213-255. Berlin Heidelberg New York : Springer.
[5] T.J. RABEHERIMANANA, Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires,*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. **XI**,(2002), n° 2, pp 201-224.
[6] T.J. RABEHERIMANANA, Contribution à l'étude de chaînes de différences absolues et grandes déviations. Habilitation à diriger des recherches, Université d'Antananarivo.(2007)
[7] S.R.S. Varadhan, Asymptotic Probabilities and Differential Equations. *Comm. Pure and Appl. Math XIX*,(1966), 261-286.