Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées réfléchies

Toussaint Joseph RABEHERIMANANA,
Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences, B.P. 906, Ankatso
101, Antananarivo, MADAGASCAR
E-mail : rabeherimanana.toussaint@yahoo.fr

Résumé : Dans cet article, nous démontrons une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour le processus de diffusions perturbées réfléchies similaires à celle de Strassen [17] pour le mouvement brownien et de Baldi [3] pour les processus de diffusion, solution d'EDS par les grandes déviations. La clef est de démontrer une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées.

Mots-clefs : Grandes déviations, processus de diffusions perturbées réfléchies, loi fonctionnelle du logarithme itéré.

Abstract : In this paper, we prove a functional iterated logarithm law for perturbed reflected diffusion processes similar to that of Strassen [17] for the brownian motion and Baldi [3] for classic diffusion, solution of SDE using large deviations principle. The key is to prove the result for perturbed diffusion processes.

Keywords : Large deviations, reflected perturbed diffusion processes, functional iterated logarithm law.

1 Introduction

Dans cet article, nous prouvons une loi fonctionnelle du logarithme itéré similaire à celle de Strassen [17] pour le mouvement brownien et de Baldi [3] pour les processus de diffusion, solution d'EDS.

Nos résultats (théorèmes 3.2, 4.2 et 4.4) sont prouvés essentiellement en utilisant les résultats de grandes déviations pour les processus de diffusion ayant un coefficient de diffusion petit.

La relation entre grandes déviations et loi du logarithme itéré n'est pas surprenante, voir Donsker & Varadhan [9], Mogulski [12], Mueller [13], Stroock [18], Deuschell & Stroock [7], Baldi [3], Caramellino [5], nous-même [14], pour les mouvements browniens et les diffusions, Ait Ouahra & Mellouk [1] pour les équations de Voltera stochastiques, Chenal & Millet [6] pour les équations aux différentielles partielles stochastiques (EDPS) et de nous-même [15] pour les équations d'évolutions aléatoires.

Dans la section 2, nous rappelons les résultats de grandes déviations concernant les processus de diffusions perturbées réfléchies. Ces résultats sont utilisés dans les sections 3 et 4 pour démontrer une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées et de diffusions perturbées réfléchies.

2 PGD pour les processus de diffusions perturbées et de diffusions perturbées réfléchies

Pour $\varepsilon > 0$, considérons $\{X_t^\varepsilon, t \in [0,1]\}$ et $\{Y_t^\varepsilon, t \in [0,1]\}$, solution des équations de diffusions perturbées et de diffusions perturbées réfléchies

$$X_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t \sigma_\varepsilon(X_s^\varepsilon)dB_s + \int_0^t b_\varepsilon(X_s^\varepsilon)ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s^\varepsilon, \quad t \in [0,1] \tag{2.1}$$

et

$$Y_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t a_\varepsilon(Y_s^\varepsilon)dB_s + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} Y_s^\varepsilon + L_t^\varepsilon, \quad t \in [0,1] \tag{2.2}$$

où $\alpha \in (0,1)$, b_ε, $\sigma_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lipschitziennes continues et bornées convergeant uniformément vers b, σ, a sur les compacts, $\{L_t^\varepsilon, t \in [0,1]\}$ est croissant avec

$$\begin{aligned} &L_0^\varepsilon = 0 \\ \text{et } &\int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s^\varepsilon = 0\}} dL_s^\varepsilon = L_t^\varepsilon,\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

$\{L_t^\varepsilon,\ t \in [0,1]\}$ est le temps local de la semi-martingale $\{Y_t^\varepsilon,\ t \in [0,1]\}$ au point zéro. $\{B_t,\ t \in [0,1]\}$ est un mouvement brownien standard unidimensionnel sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$. L'existence et l'unicité de solution de (1.1) et (1.2) sont prouvées dans Doney et Zhang [8].

Notons $\mathscr{H} = \mathscr{H}([0,1],\mathbb{R})$, l'espace des fonctions absolument continues avec une dérivée de carré intégrable vérifiant $h(0) = 0$ $\left(\dot{h}(t) = \dfrac{dh(t)}{dt}\right)$. Pour $h \in \mathscr{H}$, nous posons

$$\|h\|_{\mathscr{H}} = \left(\int_0^1 |\dot{h}(s)|^2\ ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Notons $\{\nu_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ la mesure de probabilité induite par celle de X^ε sur $C_0([0,1],\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, muni de la norme sup de la topologie de la convergence uniforme. Pour $h \in C_0([0,1],\mathbb{R})$, définissons $J : C_0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow [0,+\infty]$ par

$$J(h) = \begin{cases} \frac{1}{2}\|h\|^2_{\mathscr{H}} & \text{si } h \in \mathscr{H} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le théorème de Schilder, cf. [16] affirme que la loi μ_ε de $\{\sqrt{\varepsilon}\, B_t,\ t \in [0,1]\}$ satisfait un PGD sur $C_0([0,1],\mathbb{R})$ avec la fonctionnelle d'action $J(.)$, i.e.

(a) J est semi-continue inférieurement, i.e. pour toute fonction f_n convergeant vers f, on a

$$J(f) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(f_n).$$

(b) Si $A \subset C_0([0,1],\mathbb{R})$, on a

$$-J(\mathring{A}) \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P\{\sqrt{\varepsilon}\ B \in A\} \leqslant \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P\{\sqrt{\varepsilon}\ B \in A\} \leqslant -J(\bar{A}),$$

où l'on a posé pour $C \subset C_0([0,1],\mathbb{R})$

$$J(C) = \inf\{J(x),\ x \in C\}$$

avec la convention

$$\inf\{\varnothing\} = +\infty$$

et $\mathring{A}$ (resp. $\bar{A}$) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A).

Pour $h \in \mathscr{H}$, notons $F(h)$ l'unique solution de l'équation perturbée déterministe suivante :

$$\begin{aligned} F(h)(t) &= \int_0^t \sigma\Big(F(h)(s)\Big)\dot{h}(s)\ ds + \int_0^t b\Big(F(h)(s)\Big)\ ds \\ &\quad +\alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} F(h)(s), \qquad h \in \mathscr{H},\ t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

L'existence et l'unicité de (2.4) résultent du théorème 2.1 dans Doney & Zhang [8]. Nous avons les résultats de G.D. suivants :

Théorème 2.1. *Si $\alpha \in (0,1)$, alors pour tout R, δ, $\bar{a} > 0$, il existe $\rho > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in C_0([0,1],\mathbb{R})$ satisfaisant $J(h) \leqslant \bar{a}$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,*

$$\varepsilon \log P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |X^\varepsilon_t - F(h)(t)| \geqslant \delta, \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\sqrt{\varepsilon}\ B_t - h(t)| \leqslant \rho\Big) \leqslant -R \tag{2.5}$$

Théorème 2.2. *Si $\alpha \in (0,1)$, alors la famille $\{\nu_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ satisfait un PGD avec la fonctionnelle d'action*

$$I_0(g) = \inf_{\{h\in\mathscr{H}; F(h)=g\}} J(h), \ \textit{pour } g \in C_0([0,1],\mathbb{R}), \tag{2.6}$$

avec la convention $\inf\{\varnothing\} = +\infty$.

Maintenant, nous allons donner les résultats de G.D. concernant Y^ε solution de (2.2).
Pour $f \in C_0([0,1],\mathbb{R})$, définissons deux opérateurs $\Gamma : C_0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C_0([0,1],\mathbb{R}_+)$ et $\Xi : C_0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C_0([0,1],\mathbb{R}^+)$ par

$$\Gamma f = f + \widetilde{f} \text{ et } \Xi f = \widetilde{f}, \text{ où } \widetilde{f} = -\inf_{s\leqslant t}\Big(f(s)\wedge 0\Big), t \in [0,1].$$

Par le principe de réflexion, cf. Anderson & Orey [2] et Doss & Priouret [10], la solution Y^ε de (2.2) est donnée par

$$Y_t^\varepsilon = (\Gamma\widetilde{Y}^\varepsilon)(t) \text{ et } L_t^\varepsilon = (\Xi\widetilde{Y}^\varepsilon)(t)$$

où $\widetilde{Y}^\varepsilon$ est une solution de l'équation stochastique suivante :

$$\widetilde{Y}_t^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\int_0^t a\Big((\Gamma\widetilde{Y}^\varepsilon)(s)\Big)dB_s + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t}(\Gamma\widetilde{Y}^\varepsilon)(s), \quad t\in[0,1] \tag{2.7}$$

Pour $h \in \mathscr{H}$, soit $G(h)$ l'unique solution de l'équation suivante

$$G(h)(t) = \int_a^t a\Big(G(h)(s)\big)\dot{h}_s ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} G(h)(s) + \eta_t, \quad t\in[0,1] \tag{2.8}$$

où $G(h)$ est continue, positive et η est une fonction croissante continue vérifiant $\eta_t = \displaystyle\int_0^t \mathbb{1}_{G(h)(s)=0}d\eta_s$. L'existence et la solution de (2.8) résultent des théorèmes 3.1, 4.2 et 4.3 dans Doney & Zhang [8].
De plus, on a

$$G(h)(t) = \Big(\Gamma\widetilde{G}(h)\Big)(t) \text{ et } \eta_t = \Big(\Xi\widetilde{G}(h)\Big)(t), \quad t\in[0,1] \tag{2.9}$$

où

$$\widetilde{G}(h)(t) = \int_0^t a\left(\Gamma\widetilde{G}(h)(s)\right)\dot{h}_s ds + \alpha \sup_{0\leq s\leq t}\left(\Gamma\widetilde{G}(h)(s)\right), \quad t\in[0,1].$$

Notons ν_ε^1, la loi de Y^ε solution de (2.2) sur $C_0([0,1],\mathbb{R}_+)$ et $\widetilde{\nu}_\varepsilon^1$ celle de $\widetilde{Y}^\varepsilon$, solution de (2.7). Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 2.3. *Si $\alpha \in \Big(0,\dfrac{1}{2}\Big)$, alors pour tout R, δ, $\bar{a} > 0$, il existe $\rho > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in C_0([0,1],\mathbb{R})$ satisfaisant $J(h) \leqslant \bar{a}$ et $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,*

$$\varepsilon \log P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\widetilde{Y}_t^\varepsilon - \widetilde{G}(h)(t)| \geqslant \delta, \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\sqrt{\varepsilon}\ B_t - h(t)| \leqslant \rho\Big) \leqslant -R \tag{2.10}$$

Théorème 2.4. *Si $\alpha \in \Big(0,\dfrac{1}{2}\Big)$, alors la famille $\{\bar{\nu}_\varepsilon^1, \varepsilon > 0\}$ satisfait un PGD avec la fonctionnelle d'action*

$$\widetilde{I}_0(g) = \inf_{\{h\in\mathscr{H};G(h)=g\}} J(h), \ \text{pour } g \in C_0([0,1],\mathbb{R}), \tag{2.11}$$

avec la convention $\inf\{\varnothing\} = +\infty$.

Vu le caractère lipschitzien de Γ et Ξ, on en déduit

Théorème 2.5. *Si* $\alpha \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$, *alors pour tout* R, δ, $\bar{a} > 0$, *il existe* $\rho > 0$ *et* $\varepsilon_0 > 0$ *tels que, pour tout* $h \in C_0([0,1], \mathbb{R})$ *satisfaisant* $J(h) \leqslant \bar{a}$ *et* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,
(2.12)
$$\varepsilon \log P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |Y_t^\varepsilon - G(h)(t)| + \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |L_t^\varepsilon - \eta_t| \geqslant \delta, \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\sqrt{\varepsilon}\ B_t - h(t)| \leqslant \rho \Big) \leqslant -R$$

Théorème 2.6. *Si* $\alpha \in \Big(0, \dfrac{1}{2}\Big)$, *alors la famille* $\{\nu_\varepsilon^1, \varepsilon > 0\}$ *satisfait un PGD avec la fonctionnelle d'action*

$$I_0^+(g^+) = \inf_{\{g^+ = \Gamma g\}} \widetilde{I}_0(g), \ \ pour\ g^+ \in C_0([0,1], \mathbb{R}^+), \tag{2.13}$$

avec la convention $\inf\{\varnothing\} = +\infty$.

Les preuves de ces assertions peuvent être trouvées dans Bo et Zhang [4]. Dans cet article, il est supposé que $\sigma_\varepsilon = \sigma$, $b_\varepsilon = b$ et $a_\varepsilon = a$. Cependant, les mêmes preuves sont valables dans notre contexte.

3 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées.

3.1 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées pour les grandes valeurs du paramètre

Considérons le processus de diffusion perturbée

$$x_t = \int_0^t \widetilde{\sigma}(x_s)\ dB_s + \int_0^t \widetilde{b}(x_s)\ ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} x_s \tag{3.1}$$

où $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes continues et bornées.

Pour $u > e$ et $\widetilde{\alpha} > 0$, posons $\phi_{\widetilde{\alpha}}(u) = u^{\widetilde{\alpha}} \sqrt{\log\log u}$ et

$$X_u(t) = \frac{x_{u} t}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \tag{3.2}$$

alors un changement de variables implique

$$\begin{aligned}
X_u(t) &= \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \left(\int_0^{ut} \widetilde{\sigma}(x_s)\ dB_s + \int_0^{ut} \widetilde{b}(x_s)\ ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant ut} x_s \right) \\
&= \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \left(\int_0^{t} \widetilde{\sigma}(x_{us})\ dB_{us} + u\int_0^{t} \widetilde{b}(x_{us})\ ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} x_{us} \right) \\
&= \int_0^t \frac{\sqrt{u}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \widetilde{\sigma}\Big(\phi_{\widetilde{\alpha}}(u) X_u(s)\Big)\ dB_s^{(u)} + \int_0^t \frac{u}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \widetilde{b}(X_u(s))\ ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_u(s) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\log\log u}} \int_0^t \widetilde{\sigma_u}\Big(X_u(s)\Big)\ dB_s^{(u)} + \int_0^t \widetilde{b}_u(X_u(s))\ ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_u(s)
\end{aligned}$$

où $B_t^{(u)} = \dfrac{B_{ut}}{\sqrt{u}}$ est un mouvement brownien et

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{b}_u(x) &= \frac{u}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\,\widetilde{b}\Big(\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)x\Big) \\ \widetilde{\sigma}_u(x) &= u^{\frac{1}{2}-\widetilde{\alpha}}\,\widetilde{\sigma}\Big(\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)x\Big) \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Nous dirons que $(\widetilde{b}_u, \widetilde{\sigma}_u)$ satisfait l'hypothèse (K) si pour tout $u > e$, il existe deux fonctions lipschitziennes continues et bornées $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \lim\limits_{u\to+\infty} \widetilde{b}_u(x) &= \widetilde{b}(x) \\ \lim\limits_{u\to+\infty} \widetilde{\sigma}_u(x) &= \widetilde{\sigma}(x) \end{cases}$$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.1. Sous l'hypothèse (K), si $b_\varepsilon = \widetilde{b}_{1/\varepsilon}$ $\sigma_\varepsilon = \widetilde{\sigma}_{1/\varepsilon}$, alors par le théorème 2.2, nous avons

(3.4)
$$-I_0(\overset{\circ}{A}) \leqslant \varliminf_{u\to+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P\{X_u \in A\} \leqslant \varlimsup_{u\to+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P\{X_u \in A\} \leqslant -I_0(\bar{A}),$$

pour tout $A \subset C_0([0,1],\mathbb{R})$, où $\overset{\circ}{A}$ (resp. $\bar{A}$) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) pour la norme uniforme sur $C_0([0,1],\mathbb{R})$ et $I_0(C) = \inf\limits_{x\in C} I_0(x)$.

Théorème 3.2. *Choisissons $\widetilde{\alpha} > 0$ tel que l'hypothèse (K) soit satisfaite. Alors si $\alpha \in (0,1)$, la famille $\{X_u\}_{u>e}$ est relativement compacte ; de plus, $C = \{g; I_0(g) \leqslant 1\}$ est l'ensemble limité de $\{X_u\}_{u\to+\infty}$ p.s..*

Posons $d(g,A) = \inf\limits_{\theta\in A} \sup\limits_{t\in[0,1]} |g(t) - \theta(t)|$, pour tout $g \in C_0([0,1],\mathbb{R})$.

Le théorème 3.2 résultera des propositions 3.5 et 3.7 ci-dessous. Nous suivons la preuve introduite dans Baldi [3].

Lemme 3.3. *Pour tout $c > 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p.s. un entier positif $j_0 = j_0(\omega)$ tel que, pour tout $j \geqslant j_0$*

$$d(X_{c^j}, C) < \varepsilon.$$

Preuve. Posons $C'_\varepsilon = \{g;\ d(g,C) \geqslant \varepsilon\}$. Par la proposition 2.2, il existe $\delta > 0$ tel que $I_0(C'_\varepsilon) > 1 + 2\delta$. La formule (3.4) implique alors

$$\varlimsup_{u\to+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P(X_u \in C'_\varepsilon) \leqslant 1 + 2\delta,$$

donc pour j assez grand

$$P\{X_{c^j \in C'_\varepsilon}\} \leqslant \exp[-(1+\delta)\log\log c^j] = \frac{constante}{j^{1+\delta}}$$

et le membre de droite étant sommable, le lemme de Borel - Cantelli nous permet de conclure. $\square$

Pour tout entier positif j et $c > 1$, posons

$$\mathcal{X}_j = \sup_{\substack{c^{j-1} \leqslant u \leqslant c^j \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} \left| X_u(t) - \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \, X_{c^j}(t) \right| \tag{3.5}$$
$$= \sup_{\substack{c^{j-1} \leqslant u \leqslant c^j \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} \left| \frac{x_u(t) - x_{c^j}(t)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \right|$$

Lemme 3.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $c_\varepsilon > 1$ tel que si $1 < c < c_\varepsilon$*

$$P\{\textit{il existe } j_0 = j_0(\omega) \textit{ tel que } \mathcal{X}_j < \varepsilon \textit{ dès que } j > j_0\} = 1$$

Preuve. Nous devons prouver que $P\left(\overline{\lim}_{j \to +\infty} \{\mathcal{X}_j \geqslant \varepsilon\} \right) = 0$.
Par le lemme 3.3, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que pour presque tout ω il existe un entier $j_0(\omega)$ tel que $\sup_{t \in [0,1]} |X_{c^j}(t)| \leqslant K_1$ pour tout $j > j_0(\omega)$. Il reste à prouver que

$$P\left(\overline{\lim}_{j \to +\infty} \{\mathcal{X}_j \geqslant \varepsilon, \sup_{t \in [0,1]} |X_{c^j}(t)| \leqslant K_1\} \right) = 0$$

Mais $\{\mathcal{X}_j \geqslant \varepsilon\}$

$$= \left\{ \sup_{\substack{c^{j-1} \leqslant u \leqslant c^j \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} \left| \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \, x_{us} - \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \, x_{c^j s} \right| \geqslant \varepsilon, \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |X_{c^j}(s)| \leqslant K_1 \right\}$$
$$\subset \left\{ \sup_{\substack{c^{j-1} \leqslant u \leqslant c^j \\ 0 \leqslant s \leqslant 1}} \left| \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \, x_{us} - \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \, x_{c^j s} \right| \geqslant \varepsilon, \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |X_{c^j}(s)| \leqslant K_1 \right\}$$
$$\subset \left\{ \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \frac{s}{c} \leqslant t \leqslant s}} \left| \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \, x_{c^j t} - \frac{1}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \, x_{c^j s} \right| \geqslant \varepsilon, \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |X_{c^j}(s)| \leqslant K_1 \right\}$$
$$\subset \left\{ \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \frac{s}{c} \leqslant t \leqslant s}} \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \, |X_{c^j}(t) - X_{c^j}(s)| \geqslant \varepsilon, \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |X_{c^j}(s)| \leqslant K_1 \right\}$$

Mais pour tout $\delta > 0$ et j assez grand

$$\frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} = c^{\widetilde{\alpha}} \left(\frac{\log\log(c^j)}{\log\log(c^{j-1})} \right)^{1/2} \leqslant c^{\widetilde{\alpha}}(1 + \delta),$$

en posant

$$\Theta_\varepsilon = \left\{ g \in C_0([0,1], \mathbb{R}) / \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \frac{s}{C} \leqslant t \leqslant s}} |g_t - g_s| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}, \tag{3.6}$$

alors pour $c^{\widetilde{\alpha}}(1 + \delta) \leqslant 2$,

$$P\left\{ \mathcal{X}_j \geqslant \varepsilon, \sup_{t \in [0,1]} |X_{c^j}(t) \leqslant K_1| \right\} \leqslant P\left\{ \mathcal{X}_j \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \sup_{t \in [0,1]} |X_{c^j}(t) \leqslant K_1| \right\}.$$

Soit g une trajectoire dans Θ_ε et $h \in \mathscr{H}$ telles que

$$g_t = \int_0^t \sigma(g_u)\dot{h}_u\, du + \int_0^t b(g_u)\, du + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} g_s.$$

Alors, il existe $s, t \in [0,1]$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$, $\dfrac{s}{c} \leqslant t \leqslant s$ tels que

$$(3.7)\quad \frac{\varepsilon}{4} = |g(t) - g(s)| \leqslant \int_t^s |b(g_v)|\, dv + \int_t^s |\sigma(g_v)\dot{h}_v|\, dv + \alpha\Big|\sup_{0\leqslant v\leqslant t} g(v) - \sup_{0\leqslant u\leqslant s} g(u)\Big|$$

Puisque σ et b sont bornées, si nous supposons $c \geqslant 2$, par l'inégalité de Hölder

$$\frac{\varepsilon}{4} = K_2|t-s| + K_3|t-s|^{1/2}\ \|h\|_{\mathscr{H}} + 2\alpha K_1$$

qui implique

$$(3.8)\qquad \|h\|_{\mathscr{H}} \geqslant \frac{|t-s|^{-1/2}}{K_3}\Big(\frac{\varepsilon}{4} - K_2|t-s| - 2\alpha K_1\Big)$$

Ceci implique qu'il existe $c_\varepsilon > 1$ tels que, si $1 < c < c_\varepsilon$, $\dfrac{1}{2}\|h\|_{\mathscr{H}} > 2$ de sorte que $I_0(\Theta_\varepsilon \geqslant 2)$ et pour j assez grand par (3.4)

$$(3.9)\qquad P\Big\{\mathcal{X}_j \geqslant \varepsilon, \sup_{t\in[0,1]} |X_{c^j}(t) \leqslant K_1|\Big\} \leqslant \exp\Big\{-\frac{3}{2}\log\log c^j\Big\} = \frac{constante}{j^{3/2}}$$

et on applique le lemme de Borel - Cantelli. □

Proposition 3.5. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p.s. un réel positif $u_0 = u_0(\omega)$ tel que pour tout $u > u_0$,*

$$(3.10)\qquad d(X_u(\omega), C) \leqslant \varepsilon.$$

Preuve. Si $c > 1$, alors par l'inégalité du triangle

$$d(X_u, C) \leqslant d\Big(X_u, \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\Big) + d\Big(\frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\ X_{c^j}, X_{c^j}\Big) + d(X_{c^j}, C) = I_1 + I_2 + I_3$$

où j est tel que $c^{j-1} \leqslant u \leqslant c^j$. Par le lemme 3.3 il existe j_0 tel que pour $j > j_0$, $I_3 < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Comme pour I_2, puisque pour tout $\delta > 0$ et j assez grand,

$$1 \leqslant \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \leqslant \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})} \leqslant c^{\widetilde{\alpha}}(1+\delta)$$

et $\sup_{t\in[0,1]} |X_{c^j}(t)|$ est borné en j par le lemme 3.3, si $c > 1$ est dans un voisinage de 1 et j assez grand $I_2 < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Aussi, si $c > 1$ est dans un voisinage de 1 et j assez grand $I_1 < \dfrac{\varepsilon}{3}$ par le lemme 3.4 qui complète la preuve. □

Le théorème 2.2 et la proposition 3.5 impliquent que la famille $\{X_u\}_{u>0}$ est relativement compacte p.s..

Lemme 3.6. *Soit $g \in C$ telle que $I_0(g) \leq 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon > 1$ tel que pour tout $c > c_\varepsilon$*

$$P\{d(X_{c^j}, g) < \varepsilon \text{ infiniment souvent}\} = 1.$$

Preuve. Soient $g \in C_0([0,1], \mathbb{R})$ avec $I_0(g) \leq 1$ et $h \in \mathscr{H}$ tel que $F(h) = g$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, j assez grand et β petit, par le théorème 2.1

$$(3.11)\quad P\left(\sup_{t\in[0,1]} |X_{c^j}(t) - g(t)| \geqslant \varepsilon,\ \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{B^{(c^j)}(t)}{\sqrt{\log\log c^j}} - h(t)\right| \leqslant \beta\right) \leqslant \exp(-2\log\log c^j) = \frac{c}{j^2}$$

Par la loi de Strassen,

$$(3.12)\qquad P\left\{\sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{B^{(c^j)}(t)}{\sqrt{\log\log c^j}} - h(t)\right| \leqslant \beta \text{ infiniment souvent}\right\} = 1$$

Comme le membre de droite de (3.11) est sommable, le lemme de Borell - Cantelli et (3.11) permettent de conclure. □

Proposition 3.7. *Tout élément $g \in C$ est un point-limite de la suite $\{X_k\}$ pour $k \to +\infty$, p.s..*

Corollaire 3.8. *Soit E un espace topologique et $\mathcal{G} : C_0([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow E$ une application continue. Alors p.s. la famille $\{\mathcal{G}(X_u)_{u>0}\}$ est relativement compacte dans E et a $\mathcal{G}(C)$ comme ensemble-limite pour $u \longrightarrow +\infty$, p.s..*

3.2 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées pour les petites valeurs du paramètre.

Pour tout $u < e^{-1}$, $\widetilde{\alpha} > 0$, posons

$$\widetilde{G}(u) = \log\log(u^{-1}), \psi_{\widetilde{\alpha}}(u) = u^{\widetilde{\alpha}}\sqrt{\widetilde{G}(u)}$$

et pour $t \in [0,1]$,

$$\widetilde{X}_u(t) = \frac{x_{ut}}{\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)}$$

où le processus $\{x_t, t \in [0,1]\}$ est défini par (3.1).
Nous avons alors

$$\widetilde{X}_u(t) = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{G}(u)}} \int_0^t \widetilde{\sigma}_u(\widetilde{X}_u(s))\, dB_s^{(u)} + \int_0^t \widetilde{b}_u(\widetilde{X}_u(s))\, ds + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \widetilde{X}_u(s)$$

avec $\widetilde{b}_u(x) = \dfrac{u}{\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\ \widetilde{b}\Big(\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)(x)\Big)$

$\widetilde{\sigma}_u(x) = u^{\frac{1}{2}-\widetilde{\alpha}}\ \widetilde{\sigma}\Big(\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)(x)\Big)$

Nous supposons que $(\widetilde{b}_u, \widetilde{\sigma}_u)$ satisfait (K') si pour tout $u < e^{-1}$, il existe deux fonctions lipschitziennes continues et bornées $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{u\to 0^+} \widetilde{b}_u(x) = \widetilde{b}(x)$

$\lim\limits_{u\to 0^+} \widetilde{\sigma}_u(x) = \widetilde{\sigma}(x)$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

On peut appliquer des techniques semblables pour prouver une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les petites valeurs du paramètre avec des modifications convenables et nous avons

Théorème 3.9. *Choisissons $\widetilde{\alpha} > 0$ tel que l'hypothèse (K') soit satisfaite. Alors si $\alpha \in (0,1)$, la famille $\{\widetilde{X}_u\}$ est relativement compacte et l'ensemble $C = \{g, I_0(g) \leqslant 1\}$ est l'ensemble-limite de $\{\widetilde{X}_u\}_{0<u<e^{-1}}$ quand $u \to 0^+$ p.s..*

4 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées réfléchies.

4.1 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées réfléchies pour les grandes valeurs du paramètre.

Considérons le processus de diffusion perturbée réfléchie $\{y_t, t \in [0,1]\}$

$$y_t = \int_0^t \widetilde{a}(y_s)\ dB_s + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} y_s + L_t, \qquad L_0 = 0 \text{ et } L_t = \int_0^t \mathbf{1}_{(y_s=0)} dL_s, \tag{4.1}$$

où $\widetilde{a} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne continue et bornée.

Pour $u > e$ et $\widetilde{\alpha} > 0$, posons

$$Y_u(t) = \frac{y_{ut}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\ , \quad L_u(t) = \frac{L_{ut}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \quad \text{et } B^{(u)}(t) = \frac{B_{ut}}{\sqrt{u}}\ . \tag{4.2}$$

En appliquant le même raisonnement qu'au début de la section 3,

$$Y_u(t) = \frac{1}{\sqrt{\log\log u}} \int_0^t \widetilde{a}_u\Big(Y_u(s)\Big)\ dB_s^{(u)} + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} Y_u(s) + L_u(t) \tag{4.3}$$

avec $L_u(t) = \displaystyle\int_0^t \mathbf{1}_{Y_u(s)=0}\ dL_u(s)$, où $\widetilde{a}_u(x) = u^{\frac{1}{2}-\widetilde{\alpha}}\widetilde{a}\Big(\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)x\Big)$.

Par le principe des réflexions, cf Anderson & orey [2] et Doss & Priouret [10] Y_u solution de (4.3) est définie par

$$Y_u = \Gamma\widetilde{Y}_u,$$

où $\widetilde{Y}_u$ est solution de

$$\widetilde{Y}_u(t) = \frac{1}{\sqrt{\log\log u}} \int_0^t \widetilde{a}_u\Big(\Gamma\widetilde{Y}_u(s)\Big)\, dB_s^{(u)} + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Gamma\widetilde{Y}_u(s) \tag{4.4}$$

Nous dirons que $\widetilde{a}_u$ satisfait l'hypothèse $(\widetilde{K})$ si pour tout $u > e$, il existe une fonction lipschitzienne continue et bornée $\widetilde{a} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{u\to+\infty} \widetilde{a}_u(x) = \widetilde{a}(x)$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.

Remarque 4.1. Sous l'hypothèse $(\widetilde{K})$, si $a_\varepsilon = \widetilde{a}_{1/\varepsilon}$, alors par les théorèmes 2.4 et 2.6, nous avons

$$\begin{aligned} -\widetilde{I}_0(\mathring{A}) &\leq \varliminf_{u\mapsto+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P(\widetilde{Y}_u \in A) \leq \varlimsup_{u\mapsto+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P(\widetilde{Y}_u \in A) \\ &\leq -\widetilde{I}_0(\overline{A}) \end{aligned}$$

pour tout $A \subset C_0([0,1],\mathbb{R})$, où $\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) pour la norme uniforme sur $C_0([0,1],\mathbb{R})$.

$$-I_0^+(\overset{\circ}{A}) \leqslant \varliminf_{u\to+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P\{Y_u \in A\} \leqslant \varlimsup_{u\to+\infty} \frac{1}{\log\log u} \log P\{Y_u \in A\} \leqslant -I_0^+(\bar{A})$$

pour tout $A \subset C_0([0,1],\mathbb{R}_+)$, où $\overset{\circ}{A}$ (resp. $\bar{A}$) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence de A) pour la norme uniforme sur $C_0([0,1],\mathbb{R}_+)$.

Théorème 4.2. *Choisissons $\widetilde{\alpha} > 0$ tel que l'hypothèse $(\widetilde{K})$ soit satisfaite. Alors si $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, la famille $\{Y_u\}_{u>0}$ est relativement compacte ; de plus $C^+ = \{g; I_0^+(g) \leqslant 1\}$ est l'ensemble-limite de $\{Y_0\}$ pour $u \to +\infty$ p.s..*

Preuve. On modifiera la preuve introduite dans nous-même [15].
Pour $g \in C_0([0,1],\mathbb{R})$, posons

$$\Gamma_t g = (\Gamma g)(t) \quad \text{et} \quad \Xi_t g = (\Xi g)(t).$$

Par le principe des réflexions,

$$Y_u(t) = \Gamma_t \widetilde{Y}_u,$$

où $\widetilde{Y}_u$ est solution de (4.4).
D'autre part, considérons y_t solution de (4.1) alors $y_t = \Gamma_t \widetilde{y}$ avec

$$\widetilde{y}_t = \int_0^t \widetilde{a}(\Gamma_s\, \widetilde{y})\, dB_s + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Gamma_s\, \widetilde{y}. \tag{4.5}$$

Posons $\widetilde{y}_u(t) = \dfrac{\widetilde{y}_{ut}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}$, $B_t^{(u)} = \dfrac{B_{ut}}{\sqrt{u}}$. Alors du fait que

$$\begin{aligned} \Gamma_{ut}\widetilde{y} &= \widetilde{y}_{ut} - \inf_{0\leqslant s\leqslant ut} (\widetilde{y}_s \wedge 0) \\ &= \phi_{\widetilde{\alpha}}(u)\Big(\widetilde{y}_u(t) - \inf_{0\leqslant s\leqslant t} (\widetilde{y}_u(s) \wedge 0)\Big) \end{aligned} \tag{4.6}$$

$\widetilde{y}_u$ est solution de

$$\widetilde{y}_u(t) = \frac{1}{\log\log u}\int_0^t u^{\frac{1}{2}-\alpha}\widetilde{a}\Big(\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)\ \Gamma_s\ \widetilde{y}_u\Big)\ dB_s^{(u)} + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Gamma_s\ \widetilde{y}_u. \tag{4.7}$$

(4.4) et (4.7) impliquent

$$\widetilde{y}_u = \widetilde{Y}_u \qquad \text{p.s..}$$

□

Remarque 4.3. Sous l'hypothèse $(\widetilde{K})$, si $a_\varepsilon = \widetilde{a}_{1/\varepsilon}$, alors par le théorème 2.4, nous avons

$$-\widetilde{I}_0(\mathring{A}) \leqslant \varliminf_{u\to+\infty}\frac{1}{\log\log u}\log P\{\widetilde{Y}_u\in A\} \leqslant \varlimsup_{u\to+\infty}\frac{1}{\log\log u}\log P\{\widetilde{Y}_u\in A\} \leqslant -\widetilde{I}_0(\bar{A})$$

pour tout $A\subset C_0([0,1],\mathbb{R})$, où $\mathring{A}$ (resp. A) désigne l'intérieur de A (resp. l'adhérence) pour la norme uniforme sur $C_0([0,1],\mathbb{R})$ et $\widetilde{I}_0(C) = \inf_{x\in C} I_0(x)$.

Le théorème 4.2 résultera alors du théorème 4.4.

Théorème 4.4. *Choisissons $\widetilde{\alpha}>0$ tel que l'hypothèse $(\widetilde{K})$ soit satisfaite. Alors si $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, la famille $(\widetilde{Y}_u)$ est relativement compacte ; de plus $\widetilde{C} = \{g; \widetilde{I}_0(g)\leqslant 1\}$ est l'ensemble limite pour $u\to+\infty$ p.s..*

Preuve. La preuve du théorème 4.4 est similaire à celle du théorème 3.2. Nous écrivons seulement la différence. Il résultera des propositions 4.7 et 4.9 ci-dessous. □

Lemme 4.5. *Pour tout $c>1$ et pour tout $\varepsilon>0$, il existe p.s. un entier positif $j_0 = j_0(\omega)$ tel que, pour tout $j\geqslant j_0$*

$$d(\widetilde{Y}_{c^j},\widetilde{C}) < \varepsilon.$$

Pour tout entier positif j et $c>1$, posons

$$\begin{aligned}\widetilde{\chi}_j &= \sup_{\substack{c^{j-1}\leqslant u\leqslant c^j\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}\left|\widetilde{Y}_u(t) - \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\ \widetilde{Y}_{c^j}(t)\right|\\ &= \sup_{\substack{c^{j-1}\leqslant u\leqslant c^j\\ 0\leqslant t\leqslant 1}}\left|\frac{\widetilde{y}_{ut}-\widetilde{y}_{c^jt}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)}\right|\end{aligned} \tag{4.8}$$

Lemme 4.6. *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un nombre réel $c_\varepsilon>1$ tel que si $1<c<c_\varepsilon$*

$$P\{\textit{il existe } j_0 = j_0(\omega) \textit{ tel que } \widetilde{\mathcal{X}}_j < \varepsilon \textit{ dès que } j > j_0\} = 1.$$

Preuve. Nous devons prouver que

$$P\Big(\overline{\lim_{j\to+\infty}}\{\widetilde{\mathcal{X}}_j > \varepsilon\}\Big) = 0$$

Par le lemme 4.5, il existe une constante $\widetilde{K}_1 > 0$ telles que pour presque tout ω, il existe un entier $j_0(\omega)$ tel que $\sup_{t\in[0,1]}\Big|\widetilde{Y}_{c^j}(t)\Big| \le \widetilde{K}_1$ pour tout $j > j_0(\omega)$. Il reste à prouver que

$$P\Big(\overline{\lim_{\delta\to+\infty}}\{\widetilde{\mathcal{X}}_j \geqslant \varepsilon, \sup_{t\in[0,1]} |\widetilde{Y}_{c^j}(t)| \leqslant \widetilde{K}_1\}\Big) = 0$$

Mais

$$\begin{aligned}\{\widetilde{\mathcal{X}}_j \geqslant \varepsilon\} &= \left\{ \sup_{\substack{c^{j-1}\leqslant u\leqslant c^j \\ 0\leqslant t\leqslant 1}} \frac{\widetilde{y}_{us} - \widetilde{y}_{c^j s}}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \geqslant \varepsilon, \sup_{0\leqslant s\leqslant 1} |\widetilde{Y}_{c^j}(s)| \leqslant \widetilde{K}_1 \right\} \\ &\subset \left\{ \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1 \\ s/c\leqslant t\leqslant s}} \frac{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^j)}{\phi_{\widetilde{\alpha}}(c^{j-1})}\Big|\widetilde{Y}_{c^j}(t) - \widetilde{Y}_{c^j}(s)\Big| \geqslant \varepsilon, \sup_{0\leqslant s\leqslant 1} |\widetilde{Y}_{c^j}(s)| \leqslant \widetilde{K}_1 \right\}\end{aligned}$$

Posons

$$\widetilde{\Theta}_\varepsilon = \left\{ g \in C_0([0,1], \mathbb{R}) / \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1 \\ s/c\leqslant t\leqslant s}} |g_t - g_s| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\} \tag{4.9}$$

alors pour $c^\alpha(1+\delta) \leqslant 2$

$$P\Big\{\widetilde{\mathcal{X}}_j \geqslant \varepsilon, \sup_{t\in[0,1]} |\widetilde{Y}_{c^j}(t)| \leqslant \widetilde{K}_1\Big\} \leqslant P\Big\{\widetilde{\mathcal{X}}_j \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \sup_{t\in[0,1]} |\widetilde{Y}_{c^j}(t)| \leqslant \widetilde{K}_1\Big\}$$

Soit g une trajectoire dans $\widetilde{\Theta}_\varepsilon$ et $h \in \mathscr{H}$ telles que

$$g_t = \int_0^t a(\Gamma_u\ g)\dot{h}_u\ du + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Gamma_u\ g$$

Alors il existe $s, t \in [0,1]$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$, $s/c \leqslant t \leqslant s$ tels que

$$\frac{\varepsilon}{4} = |g(t) - g(s)| \leqslant \int_t^s |a(\Gamma_u\ g)|\dot{h}_u\ du + \alpha\Big| \sup_{0\leqslant v\leqslant t} \Gamma_v\ g - \sup_{0\leqslant u\leqslant s} \Gamma_u\ g\Big| \tag{4.10}$$

Puisque a est bornée, si nous supposons $c \leqslant 2$, par l'inégalité de Hölder

$$\frac{\varepsilon}{4} \leqslant \widetilde{K}_2 |t-s|^{1/2} \|h\|_{\mathscr{H}} + 4\alpha\widetilde{K}_1$$

qui implique

$$\|h\|_{\mathscr{H}} \geqslant \frac{|t-s|^{-1/2}}{\widetilde{K}_2}\Big(\frac{\varepsilon}{4} - 4\alpha\widetilde{K}_1\Big)$$

On termine comme dans la preuve du lemme 3.4. □

Proposition 4.7. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p.s. un réel positif $u_0 = u_0(\omega)$ tel que pour tout $u > u_0$*

$$d\Big(\widetilde{Y}_u(\omega), \widetilde{C}\Big) \leqslant \varepsilon. \tag{4.11}$$

Le théorème 2.4 et la proposition 4.7 impliquent que la famille $\widetilde{Y}_u$ est relativement compacte p.s..

Lemme 4.8. *Soit $g \in \widetilde{C}$ telle que $\widetilde{I}_0(g) < 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 1$ tel que pour tout $c > c_\varepsilon$*

$$P\Big\{d\Big(\widetilde{Y}_{c^j}, g\Big) < \varepsilon \text{ infiniment souvent}\Big\} = 1.$$

Proposition 4.9. *Tout élément $g \in \widetilde{C}$ est un point-limite de la suite $\{\widetilde{Y}_k\}$ pour $k \to +\infty$.* □

Remarque 4.10. Comme Γ est lipschitzienne continue, alors $C^+ = \Gamma\widetilde{C}$.

4.2 Loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions perturbées réfléchies pour les petites valeurs du paramètre.

Considérons le processus de diffusion perturbée réfléchie $\{y_t, t \in [0,1]\}$, solution de (4.1).

Pour $u < e^{-1}$, $\widetilde{\alpha} > 0$, posons

$$\bar{Y}_u(t) = \frac{y_{ut}}{\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)}, \quad \bar{L}_u(t) = \frac{L_{ut}}{\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)} \quad \text{et } B_t^{(u)} = \frac{B_{ut}}{\sqrt{u}} \tag{4.12}$$

où $\psi_{\widetilde{\alpha}}(u) = u^{\widetilde{\alpha}}\sqrt{\log\log u^{-1}}$.
Nous avons alors

$$\bar{Y}_u(t) = \frac{1}{\sqrt{\log\log u^{-1}}} \int_0^1 \widetilde{a}_u\Big(\bar{Y}_u(s)\Big)\, dB_s^{(u)} + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \bar{Y}_u(s) + \bar{L}_u(t)$$

$$\bar{L}_u(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 1_{\{\bar{Y}_u(s)=0\}} d\bar{L}_u(s) = \bar{L}_u(t)$$

avec $\widetilde{a}_u(x) = u^{\frac{1}{2}-\widetilde{\alpha}}\widetilde{a}\Big(\psi_{\widetilde{\alpha}}(u)x\Big)$.
Par le principe des réflexions,

$$\bar{Y}_u(t) = \Gamma_t\, \widetilde{\bar{Y}}_u,$$

où $\widetilde{\bar{Y}}_u$ est solution de

$$\widetilde{\bar{Y}}_u(t) = \frac{1}{\sqrt{\log\log u^{-1}}} \int_0^1 \widetilde{a}_u\Big(\Gamma_t\, \widetilde{\bar{Y}}_u\Big)\, dB_s^{(u)} + \alpha \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \Gamma_s\, \widetilde{\bar{Y}}_u.$$

Nous supposons que $\widetilde{a}_u$ satisfait $(\widetilde{K'})$ si pour tout $u < e^{-1}$, il existe une fonction lipschitzienne continue et bornée $\widetilde{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{u\to 0^+} \widetilde{a}_u(x) = \widetilde{a}(x)$$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$. Nous avons alors

Théorème 4.11. *Choisissons* $\widetilde{\alpha} > 0$ *tel que l'hypothèse* $(\widetilde{K'})$ *soit satisfaite. Alors si* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, *la famille* $\{\bar{Y}_u\}$ *est relativement compacte et l'ensemble* $C^+ = \{g; I_0^+(g) \leqslant 1\}$ *est l'ensemble-limite pour* $u \to 0^+$ *p.s..*

Théorème 4.12. *Choisissons* $\widetilde{\alpha} > 0$ *tel que l'hypothèse* $(\widetilde{K'})$ *soit satisfaite. Alors si* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, *la famille* $\{\widetilde{\bar{Y}}_u\}$ *est relativement compacte et l'ensemble* $\widetilde{C} = \{g; \widetilde{I}_0(g) \leqslant 1\}$ *est l'ensemble-limite pour* $u \to 0^+$ *p.s..*

Références

[1] M. AIT OUAHRA & M. MELLOUK, Stassen's law of the iterated logarithm for stocahstic Volterra equations and applications, *Stochastics : An international journal of Proba and Stoch. Process*, vol. **77**, n° 2, (2005), p. 191-203.

[2] R. ANDERSON & S. OREY, Small random perturbations of dynamical systems with reflecting boundary, *Nafoya Math. J.* **60** (1976), p. 189-216.

[3] P. BALDI, Large deviations and functional iterated logarithm law for diffusion processes, *Prob. Theory and Related Fields*, **71**, (1986), p. 435-453.

[4] L. BO & T. ZHANG, Large deviations for perturbed reflected diffusion process, *Stochastics and Stochastics Reports*, vol. **81**, (2009), n° 6, p. 531-549.

[5] L. CARAMELLINO, Strassen's law of the iterated logarithm for diffusion processes for small time,*Stochastics Processes and their Appli.*, **74**, (1988), p.1-19.

[6] F. CHENAL & A. MILLET, Law of iterated for parabolic SPDEs, *Seminar in Stoch. Analysis (Asconne 1996)*, p.101-123, Progress in Proba, **45** Birkhuser, Basel, (1999).

[7] D. DEUSCHEL & D. STROOCK, Large deviations, Academic-Press, Inc. (London) L.T.D., 1989.

[8] R.A. DONEY & T. ZHANG, Perturbed Skorohod equations and perturbed reflected diffusion processes, *Annale I.H. Poincaré*, (2005), p. 107-121.

[9] M. D. DONSKER & S.R.S. VARADHAN, On laws of the iterated logarithm for local times, *Commun Pure Appl.*, **30**, (1977), p.707-753.

[10] H. DOSS & P. PRIOURET, Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion, *in Seminar on probability*, XVII, *lecture in Math.*, vol. **986**, Springer, Berlin, (1983), p. 353-370.

[11] D. MARQUEZ-CARRERS & C. ROVIRA, Iterated logarithm law for anticipating stochastic differential equations, *J. Theor. Prob.*, **21**, n° 3, (2008), p.650-659.

[12] A.A. MOGUL'SKII, On the law of the iterated logarithm in Chung's form for functional spaces, *Prob. Theory Appl.*, **24**, (1977), p.707-758.

[13] C. MUELLER, Strassen's law for localtime,*Z. Wahrscheinlichkeistheor. Verw. Geb.* **63**, (1983), p.29-42.

[14] T.J. RABEHERIMANANA, Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus de diffusions avec réflexion, *Annales Math. Blaise Pascal*, **14**, (2007), p.61-76.

[15] T.J. RABEHERIMANANA, Grandes déviations et loi fonctionnelle du logarithme itéré pour les processus aléatoires, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. XI, n° 2, (2002), p.201-224.

[16] M. SCHILDER, Asymptotic formulas for Wiener integrals, *T.A.M.S.*, **125**, (1996),p. 63-85.

[17] V. STRASSEN, An invariance principle for the law of the iterated logarithm, *Z. Wahrscheinlichkeistheor. Verw. Geb.*, **3**, (1965), p.211-226.

[18] D. STROOCK, *An introduction to the theory of large deviations*, Berlin-Heidelberg, New-York, 1984.