

Etude numérique de la transition d'un système entre deux états stationnaires de non-équilibre par convection naturelle laminaire bidimensionnelle dans une lunule cylindrique

HERIMIAH RAKOTONDRANJA Stelarijao Eloi¹ – RAKOTOMALALA Minoson²

ANDRIANAIVOARIVELO Jaolalaina³ – RAZAFINJATO Victor Albert⁴

¹Laboratoire de Thermodynamique Thermique et Combustion, Université d'Antananarivo

²Institut pour la Maitrise de l'Energie d'Antananarivo

³Laboratoire de Thermodynamique Thermique et Combustion, Université d'Antananarivo

⁴Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo

Résumé :

Notre travail concerne l'étude numérique de la convection naturelle bidimensionnelle et transitoire entre deux états stationnaires de non-équilibre qui évolue dans un fluide newtonien (air) confiné à l'intérieur d'un espace lunulaire. Il est formé par l'intersection des deux cylindres horizontaux. Les axes des deux cylindres se trouvent dans un même plan vertical, de telle sorte qu'il existe une symétrie par rapport à l'axe Oy. La paroi supérieure est soumise à une densité de flux de chaleur non-uniforme tandis que la paroi inférieure est traversée par une densité de flux uniforme. Une convection naturelle thermique prend naissance au sein du fluide pour établir l'équilibre thermodynamique.

Ce problème physique sera gouverné par les équations adimensionnelles de continuité, de la quantité de mouvement et de la chaleur dans un système de coordonnées bi-cylindriques et leurs conditions aux limites spatiotemporelles.

Nous avons alors transformé les équations de transfert dans le système de coordonnées bi-cylindriques en utilisant le formalisme fonction de courant, vorticité. Et puis, nous intégrons les équations de transfert par la méthode aux différences finies de S.V Patankar avec un schéma implicite. Un programme de calcul est réalisé avec le logiciel Maple V Release Surdent. La discrétisation des équations a fait apparaître les paramètres suivants : le nombre de Prandtl Pr , le nombre de Grashof Gr modifié et le facteur de forme r_2/r_1 . Le nombre de Prandtl est fixé à 0,7.

Les distributions de température sont présentées ainsi que les valeurs locales et moyennes du nombre de Nusselt. De nombreux graphes montrent les variations de température réelle, la vitesse tangentielle adimensionnelle, la vitesse normale adimensionnelle en fonction de l'indice de tranches η et θ ainsi que les variations du nombre de Nusselt moyen.

Mots clés : Convection naturelle, états stationnaires de non-équilibre, régime transitoire, lunule cylindrique, coordonnées bi-cylindriques, régime laminaire.

1- INTRODUCTION

La convection naturelle est un mode de transfert de chaleur qui se produit uniquement au sein des milieux fluides dès qu'il existe un gradient de température entre deux parois, et ce mécanisme est le plus important de transfert de chaleur. Il s'agit de la description du mouvement d'un fluide engendré par les forces d'Archimède dues aux variations de la masse volumique avec la température. Il y a donc couplage de la dynamique et de la thermique. Le champ de vitesse transporte la chaleur et, du fait de la dépendance de la masse volumique avec la température, agit sur la distribution de masse volumique ; en retour, les modifications de masse volumique créent du mouvement par le biais de la poussée d'Archimède.

L'étude des phénomènes de la convection naturelle attire beaucoup de chercheurs du fait de son grand intérêt d'application dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels : refroidissement des composants électroniques et électriques, centrales thermiques, centrales nucléaires, chauffage des locaux, les échangeurs de chaleur, aérospatial, autour de notre corps humain, etc...

Ce type d'écoulement est omniprésent dans la vie quotidienne et dans la quasi-totalité des milieux industriels.

Plusieurs études ont été effectuées sur la convection naturelle, telles que les cylindres dont les parois sont soumises à des flux de densité uniforme [11], ou maintenues à températures constantes [4], [22].

ANDRIAMAHENINA Rolland Aimé [8] a effectué une étude de la convection naturelle laminaire transitoire entre deux états d'équilibre dans un fluide confiné à l'intérieur d'un demi-ellipsoïde aplati dont la paroi est soumise à flux de densité constante.

Toutes les études que nous avons citées utilisent un modèle mathématique qui repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement.

2- **MODELE MATHEMATIQUE DES EQUATIONS DE TRANSFERT ET METHODE NUMERIQUE**

Nous décrivons sur la **figure 1** la section droite d'une lunule cylindrique délimitée par l'intersection de deux cylindres, et sur la **figure 2** la représentation schématique des coordonnées bicylindriques d'après [20].

Nous posons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la paroi inférieure est soumise à une densité de flux de chaleur q_2 uniforme, et la paroi supérieure est traversée par un flux de chaleur variable q [1] :

$$q = \frac{(l_1 - l)N + l}{l_1} q_2 \quad (1)$$

N : indice de tranche

l_1 : longueur totale de l'arc sur lequel le flux de chaleur q est appliqué à la paroi supérieure

l : longueur de l'arc sur lequel le flux de chaleur q est appliqué à la paroi supérieure

- le fluide est un gaz parfait supposé comme un fluide incompressible ;
- la dissipation visqueuse et le rayonnement sont négligeables ;
- les propriétés physiques du fluide sont constantes, hormis sa masse volumique ρ dont les variations sont à l'origine de la convection naturelle ;
- les hypothèses de Boussinesq sur laquelle le flux de chaleur est appliquée sont valables ;
- la convection est laminaire et le régime transitoire.

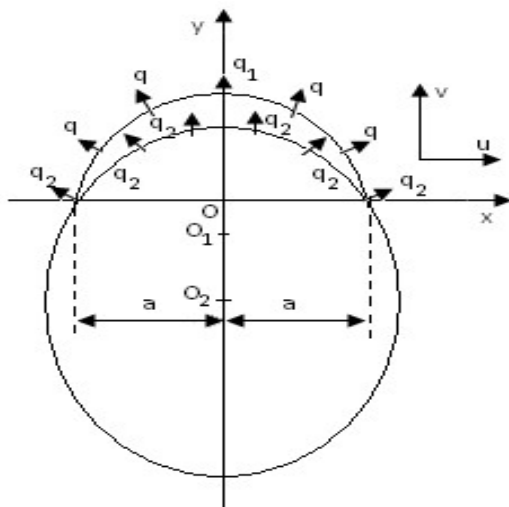


Figure 1

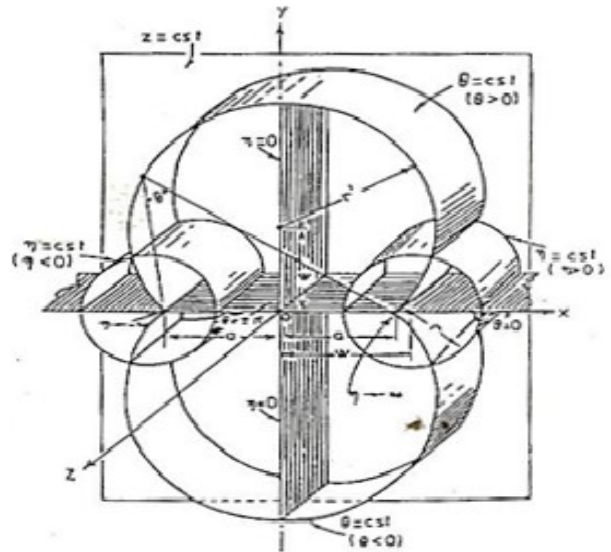


Figure 2

2-1 Mise en équation

En insérant la vorticité et la fonction de courant, les équations de transfert adimensionnelles en coordonnées bi-cylindriques s'écrivent respectivement :

- Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (H V_{\eta}^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (H V_{\theta}^+) = 0 \quad (2)$$

- Equation du mouvement

$$\frac{\partial \omega^+}{\partial t^+} + \frac{V_{\eta}^+}{H} \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}^+}{H} \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = \frac{1}{H} \left[F(\eta, \theta) \frac{\partial T^+}{\partial \theta} + G(\eta, \theta) \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (3)$$

- Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T^+}{\partial t^+} + \frac{V_{\eta}^+}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{V_{\theta}^+}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{1}{Pr H^2} \left[\frac{\partial^2 T^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} \right] \quad (4)$$

2-2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites associées aux équations de transfert sur les deux parois sont les suivantes :

- *Paroi inférieure (paroi d'indice 2)*

Conditions sur les vitesses et le flux :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\theta^+ \Big|_{(\eta, \theta_2, t^+)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_\eta^+ \Big|_{(\eta, \theta_2, t^+)} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} \Big|_{(\eta, \theta_2, t^+)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial \theta} \Big|_{(\eta, \theta_2, t^+)} = -q \frac{Hg\beta D_H^4}{\lambda v^2} \quad (6)$$

- *Paroi supérieure (paroi d'indice 1)*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\theta^+ \Big|_{(\eta, \theta_1, t^+)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_\eta^+ \Big|_{(\eta, \theta_1, t^+)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} \Big|_{(\eta, \theta_1, t^+)} = 0 \quad \mapsto \quad \Psi_{(\eta, \theta_1, t^+)}^+ = \text{constante} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial \theta} \Big|_{(\eta, \theta_1, t^+)} = -q \frac{Hg\beta D_H^4}{\lambda v^2} \quad (9)$$

2-3 Méthode numérique

Nous avons résolu le système d'équations de transfert avec les conditions aux limites associées par la méthode aux « différences finies » qui repose sur des développements en série de TAYLOR approchant les valeurs des dérivées en un point ou dans son voisinage par es différences. Pour discrétiser les équations et les conditions aux limites, nous optons pour la méthode développée par SV Pantakar [5] et par Nogotov [6] .

3- RESULTATS ET DISCUSSION

Dans notre étude, nous avons choisi comme fluide l'air dont les propriétés physiques sont données à la température initiale $T_0 = 293$ K, ce qui correspond à nombre de Prandtl $Pr = 0,7$. Les valeurs des constantes physiques sont fixées :

- distance focale $a = 0,12$ m ;
- densité du flux de chaleur $q_2 = 12$ w.m⁻² qui donne une valeur de $Gr = 10^6$.
- Tous les résultats présentés sont calculés en fonction du temps adimensionnel de pas $3,65 \cdot 10^{-4}$.

La figure 7 représente les variations de la température réelle en fonction de l'indice tranches suivant θ . Nous observons que la température décroît lentement puis atténue entre 30-50%, ce qui se traduit par l'existence d'un régime permanent dans cette zone. Les températures prennent leurs valeurs maximales à l'extrémité de la lunule, dans cette partie les variations de température sont considérables.

La figure 8 donne les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps adimensionnel. Le nombre de Nusselt moyen décroît lorsque le temps adimensionnel augmente, ce qui montre la diminution du gradient de température, autrement dit la température du fluide commence à se rapprocher à celle de parois.

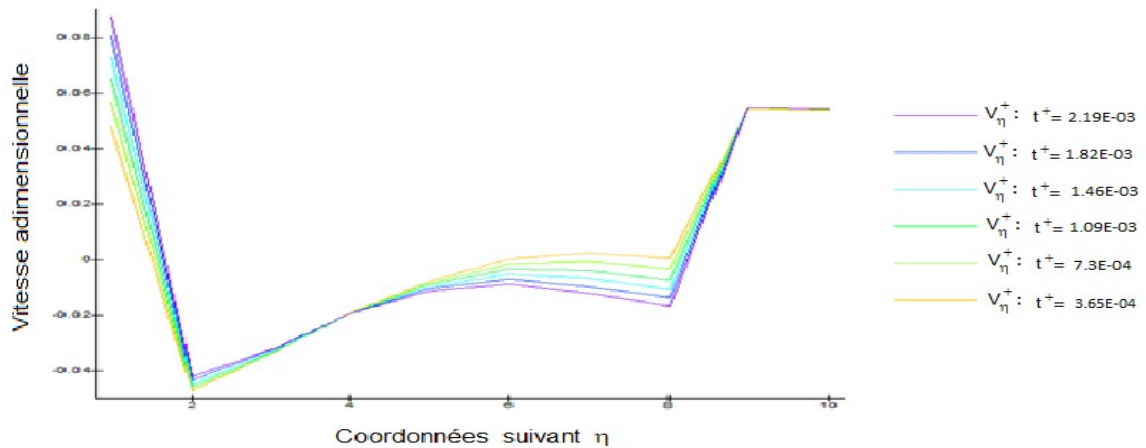


Figure 5

Variations radiales de la vitesse tangentielle adimensionnelle en fonction de l'indice de tranches suivant η au cours du temps adimensionnel

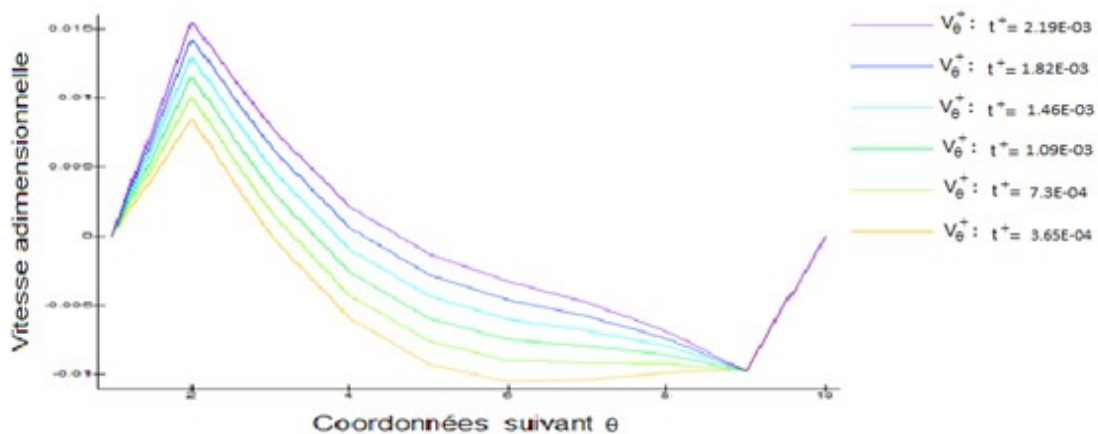


Figure 6

Variations radiales de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de l'indice de tranches suivant θ au cours du temps adimensionnel

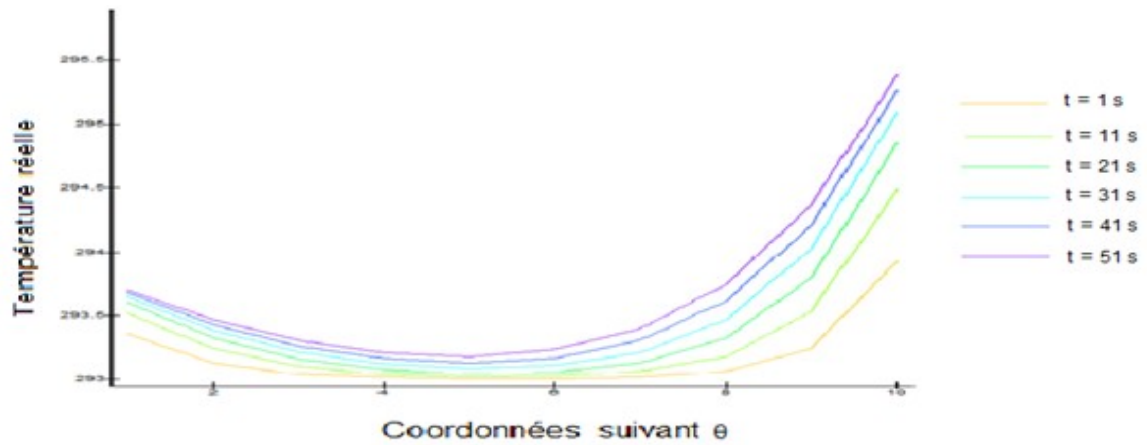


Figure 7

Variation de la température réelle en fonction de l'indice de tranches suivant θ au cours du temps adimensionnel

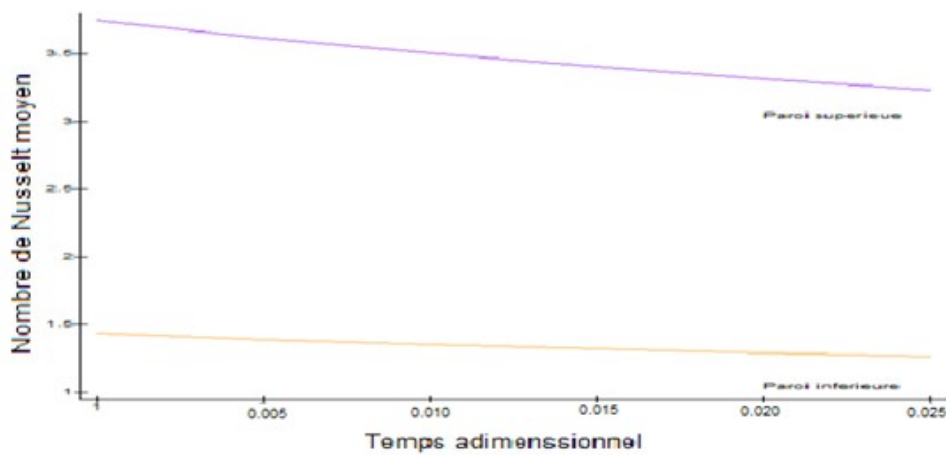


Figure 8

Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps adimensionnel

4- CONCLUSION

Nous avons procédé à une étude numérique de la transition d'un système entre deux états stationnaires de non équilibre par convection naturelle laminaire bidimensionnelle dans une lunule cylindrique. L'utilisation de la méthode aux différences finies de S.V. Patankar [5] permet d'approcher les équations de transfert aux dérivées partielles complexes à des dérivées partielles linéaires. Le choix du système de coordonnées bi-cylindriques est important et convenable à la lunule étant données les propriétés relatives à la forme géométrique du système. A l'aide d'un outil informatique dans lequel on a effectué le programme, nous avons pu avoir des résultats fiables et cohérents aux méthodes adoptées sur les vitesses radiale et tangentielle, la température ainsi que le nombre de Nusselt moyen.

NOMENCLATURE

a	: distance focale	[m]
C_p	: capacité calorifique massique du fluide à pression constante	[J.Kg.K ⁻¹]
D_H	: échelle caractéristique de longueur définie par $D_H = 2(r_2 - r_1)$	[m]
g	: accélération de la pesanteur	[m.s ⁻²]
F, G	: fonctions définies dans l'équation du mouvement	
h	: coefficient métrique du système de coordonnées bi-cylindriques	[m]
H	: valeur adimensionnelle de h	
P	: pression au sein du fluide	[Pa]
q	: densité du flux de chaleur	[W.m ⁻²]
q^+	: densité adimensionnelle du flux de chaleur	
r_1, r_2	: rayons respectifs des cylindres (C_1) et (C_2)	[m]
T	: température du fluide	[K]
T^+	: température adimensionnelle du fluide	
T_1	: température du cylindre inférieur	[K]
T_2	: température du cylindre supérieur	[K]
ΔT	: différence de température définie par $\Delta T = T_2 - T_1$	[K]
T'	: différence de température définie par $T' = T - T_1$	[K]
T_r	: température de référence	[K]
t	: temps	[s]
t^+	: temps adimensionnel	
V_η, V_θ	: composantes de la vitesse suivant η et θ	[m.s ⁻¹]
V_η^+, V_θ^+	: composantes adimensionnelles de la vitesse suivant η et θ	
\vec{V}	: vecteur vitesse de composantes (U,V,W)	[m.s ⁻¹]
X, Y, Z	: coordonnées cartésiennes	[m]
X^+	: valeur adimensionnelle de la coordonnée définie par $X^+ = \frac{X}{D_H}$	
α	: diffusivité thermique du fluide $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}$	[m ² .s ⁻¹]
β	: coefficient d'expansion thermique du fluide à pression constante définie par $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$	K ⁻¹
λ	: conductivité thermique du fluide	[W.m ⁻¹ .K]
ν	: viscosité cinématique du fluide	[m ² .s ⁻¹]
ρ	: masse volumique de l'air	[kg.m ⁻³]
ω	: vorticité	[s ⁻¹]
ω^+	: vorticité adimensionnelle	
η, θ, Z	: composantes en coordonnées bi-cylindriques	
Ψ	: fonction de courant	[m ² .s ⁻¹]

Ψ^+ : fonction de courant adimensionnelle

Indices

paroi supérieure

paroi inférieure

E, W : noeuds est et ouest respectivement

N, S : noeuds nord et sud respectivement

e, w : face est et ouest du volume de contrôle respectivement

n, s : face nord et sud du volume de contrôle respectivement

BIBLIOGRAPHIE

[1] Amadou DOUMBIA.

« Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique dans un fluide newtonien situé dans l'espace d'intersection de deux cylindres horizontaux ».

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université de Perpignan (1992).

[2] Victor A. RAZAFINJATO.

« Contribution à l'étude de la convection mixte entre deux cylindres excentrés horizontaux »

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques, Université d'Antananarivo (1993).

[3] JONG Ho Lee.

« Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique en régime laminaire transitoire dans un récipient cylindrique verticalement rempli de fluide newtonien »

Thèse de doctorat ès Sciences Physiques, Université de Perpignan (1984).

[4] T.H.KUEHN.

« Natural convection heat transfer from a horizontal circular cylinder to surrounding cylindrical enclosure »

Thesis of Minnesota U.S.A July (1976).

[5] S.V.PATANKAR.

« Numerical heat transfer and fluid flow »

Mc Graw Hill book compagny, New York (1980).

[6] E.F.NOOTOV.

Mc Graw Hill book compagny, New York (1976).

[7] C. RANDRIAMANARINA.

« Etude de convection naturelle laminaire à l'intérieure d'un ellipsoïde de révolution d'axe vertical dont la paroi est traversée par un flux de chaleur de densité constante »

Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies d'Energétique, Université d'Antananarivo (1989).

[8] ROLLAND Aimé A.

« Contribution à l'étude de la convection naturelle en régime laminaire transitoire entre deux états d'équilibres à l'intérieur ellipsoïde aplati soumis à un flux de chaleur de densité constante »

Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies d'Energétique, Université d'Antananarivo (1997).

- [9] D. POULIKAKOS and A. BEJAN.
« Natural Convection Experiments in a Triangular Enclosure »
- [10] HARTLEY H.King.
« A Poisson Equation Solver for Rectangular or Annular Region International Journal for Numerical Methodes in Engineering». Vol.10,799-809(1976).
- [11] T. KASSEM.
« Contribution à l'étude de la convection naturelle thermique entre deux cylindres excentrés horizontaux ».
Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne (1989).
- [12] MORSLI Souad.
« Simulation numérique de la convection naturelle et la génération de l'entropie dans les cavités ».
Thèse de Doctorat, Université des Science et de la Technologie d'Oran (2015).
- [13] YOUSIF N.J.
« Contribution à l'étude théorique de la convection naturelle thermique bidimensionnelle en régime laminaire transitoire dans un récipient cylindrique vertical à fond incliné et partiellement rempli ».
Thèse de Doctorat, Université de Poitiers (1986).
- [14] Jorge PEIXINHO.
« Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite ».
Thèse de Doctorat, Université Henry Poincaré – Nancy 1(2004).
- [15] Laurent FOUCHER.
« Convection naturelle laminaire dans une cavité contenant un ou plusieurs plaques ».
Thèse soutenue à l'Ecole Centrale Paris (1999).
- [16] KHELIFI TOUHAMI M.S.
« Simulation numérique de la convection naturelle dans un bec de stockage de GNL ».
Thèse de doctorat, Université M'Hamed Bougara (2012).
- [17] Yiqin LI.
« Approches analytique et expérimentale de la convection naturelle en canal vertical. Application aux double-façades photovoltaïques ».
Thèse de Doctorat, INSA Lyon (2016).
- [18] D. KALACHE.
« Contribution à l'étude de la convection naturelle en cavité trapézoïdale chauffée par dessous ».
Thèse de Doctorat, Université de Poitiers (1987).
- [19] Damien DAVID. « Etude expérimentale de la convection naturelle aux abords de parois contenant des matériaux à changement de phase ».
Thèse de Doctorat, INSA Lyon (2010).
- [20] P.MOON and D.E.SPENSER, Field Theory Engineers, D.VAN. Nostrand Company, LTD, TORONTO, Canada (1961).