

Les équations transformées de la convection naturelle au sein d'une conduite torique dont la paroi externe est soumise à une densité de flux de chaleur constant

Ny Avana Yarivony HERINAVALONA¹, José Denis RAKOTOVAO²,
Dina Arisoa RAKOTOMANANA³, Tahiry Fanantenana RAKOTONINDRINA⁴
Pierre RAKOTOMAMONJY⁵,

Laboratoire de recherche – Génie Mécanique et Thermique Industriel (LR-GMTI)
Ecole Supérieure Polytechnique – Université d'Antananarivo
BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 - Madagascar

¹*navalhr@gmail.com*, ²*josedenirakotovao@gmail.com*,

³*dian_nha@yahoo.fr*, ⁴*fanantenandrakoto@gmail.com*, ⁵*kotomamonjypr@yahoo.fr*

RESUME

Pour la convection naturelle, la configuration torique n'est pas souvent traitée. Pourtant dans la vie courante elle est d'une grande importance ne citant que le cas des pneus qui sont toriques.

Cet article traite le problème de la convection naturelle au sein d'une conduite torique dont la paroi externe est soumise à une densité de flux de chaleur constant.

Les équations de transfert sont écrites en coordonnées toriques.

La méthode vorticité fonction de courant est adoptée pour éliminer la pression des équations de la quantité de mouvement.

Cet article se termine par l'écriture des équations adimensionnelles transformées et l'écriture des conditions aux limites.

La méthode de résolution numérique n'est pas abordée ici.

Mots clés : thermique, convection naturelle, tore

ABSTRACT

Concerning the case of natural convection, the toroidal configuration is often not treated. Yet in everyday life, this has a great importance for the case of tyres which are torics.

This article deals natural convection problem in a torus pipe, the outer wall is subjected to a constant heat flux density.

Transfer equations are written in toroidal coordinates.

The vorticity - stream function method is adopted to eliminate the pressure in the momentum equations.

This article ends with the writing of the transformed adimensional equations and the writing of the boundary conditions.

The numerical method is not discussed here.

Keywords : thermics, natural convection, torus

Nomenclature

Lettres

a : distance focale

c_p : Chaleur massique à pression constante

Gr : nombre de Grashof

h_η , h_θ , h_φ les coefficients métriques

L : longueur de référence

P : pression au sein du fluide

Pe : nombre de Peclet

q : densité de flux de chaleur

R : rayon de référence

(r, φ, z) : coordonnées cylindriques

T_∞ : Température du fluide à l'infini

t : temps

T: température

(x, y, z) : coordonnées cartésiennes

Lettres grecques

β : coefficient volumique d'expansion thermique du fluide

∂ : dérivée partielle

Δ : Opérateur Laplacien

$(\eta; \theta; \varphi)$: coordonnées toriques

λ : conductivité thermique du fluide

∇ : opérateur nabla

ν : viscosité cinématique

ρ : masse volumique du fluide

τ : coefficient de frottement local

ψ : fonction de courant

Exposant

+ : paramètres adimensionnels.

Indice

η : suivant la coordonnée η

θ : suivant la coordonnée θ

φ : suivant la coordonnée φ

Vecteurs

\vec{e} : vecteur unitaire

\vec{g} : accélération de la pesanteur

\vec{V} : vitesse

$\vec{\omega}$: vorticité

1. Introduction

Le transport a pris une place prépondérante dans notre vie quotidienne. L'état des pneus de nos véhicules a des impacts sur notre économie.

L'étude des phénomènes de transfert de chaleur pour les conduites toriques est par conséquent d'une grande importance.

La majorité des travaux sur la convection naturelle concerne des géométries bien connues : rectangulaire, cubique, cylindrique, anneau.

[1], [2], [3] [4].

Cet article par contre, est une contribution à l'étude de la convection naturelle dans une autre géométrie : torique.

2. Description du problème

Dans notre étude le fluide est newtonien.

Soit une conduite torique verticale.

Le fluide entoure la conduite. La paroi intérieure de la conduite est soumise à une densité de chaleur constante. Les propriétés du fluide sont constantes sauf sa masse volumique qui varie avec la température. La dissipation visqueuse est négligeable. Le problème est permanent, laminaire et admet une symétrie autour de l'axe de la conduite.

La figure 1 représente une vue dans l'espace du système étudié et celle de la figure 2 une vue en coupe.

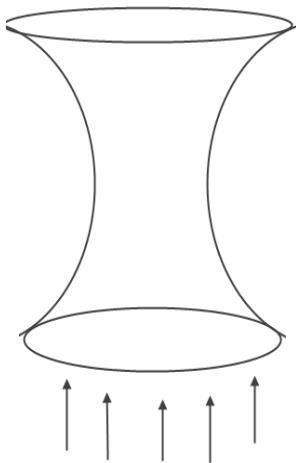


Figure 1 : vue dans l'espace du système étudié

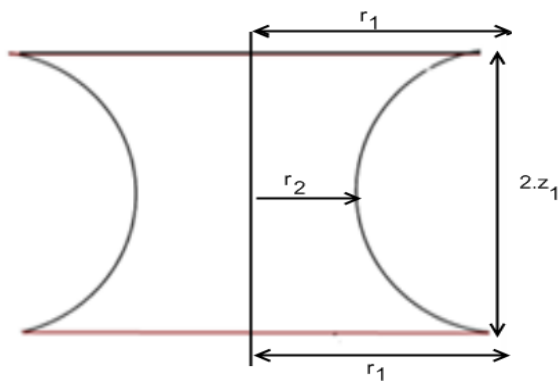


Figure 2 : Vue en coupe du système étudié

2.1 Représentation du système en coordonnées toriques

Dans un même plan (P), soit une droite (D) et soit un cercle (C). Quand on fait tourner (C) de 2π autour de (D) on a un tore.

Le tore est la surface engendrée par la révolution d'un cercle (C) autour d'une droite (D); c'est donc un tube de diamètre constant.

Soit (x, y, z) les coordonnées cartésiennes.

Les coordonnées toriques [5] sont définies par:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\operatorname{sh} \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta} \\ y &= a \frac{\operatorname{sh} \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta} \\ z &= a \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\eta \in [0; +\infty[$; $\theta \in [-\pi; +\pi]$; $\varphi \in [0; 2\pi]$

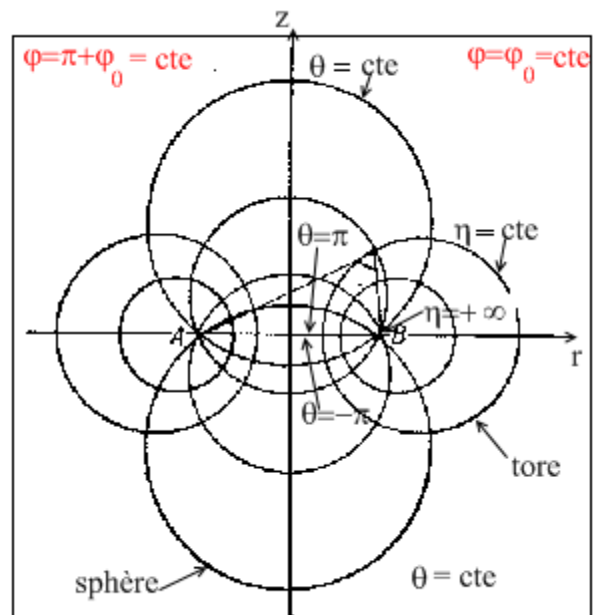


Figure 3 : Système de coordonnées toriques

Posons

$$r = a \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \theta} \quad (2)$$

« a » est la distance focale.

Les coefficients métriques sont :

$$h_\eta = h_\theta = h = \frac{a}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (3)$$

$$h_\varphi = r = a \frac{\text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (4)$$

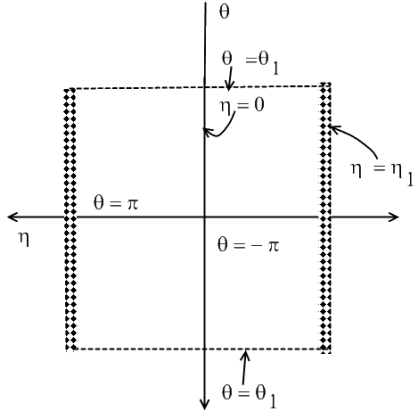


Figure 3 : Représentation du système en coordonnées toriques

η_1 , θ_1 et a sont calculés à partir de :

$$r_1 = a \frac{\text{sh } \eta_1}{\text{ch } \eta_1 - \cos \theta_1}, \quad r_2 = a \frac{\text{sh } \eta_1}{\text{ch } \eta_1 + 1}$$

$$z_1 = a \frac{\sin \theta_1}{\text{ch } \eta_1 - \cos \theta_1} \quad (5)$$

3. Formulation vectorielle du problème

Les équations dites de Navier Stokes ou équations de transfert [6], [7] ont été écrites en tenant compte de l'approximation de Bousinesq. Les trois vecteurs $(\vec{e}_\eta; \vec{e}_\theta; \vec{e}_\varphi)$ sont les vecteurs unitaires du système de coordonnées toriques.

On a :

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\eta) = \frac{\partial z}{h \partial \eta} = -G$$

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) = \frac{\partial z}{h \partial \theta} = -F \quad (6)$$

Avec

$$G = \frac{\sin \theta \cdot \text{sh } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta}$$

$$F = \frac{1 - \cos \theta \cdot \text{ch } \eta}{\text{ch } \eta - \cos \theta} \quad (7)$$

3.1 La méthode fonction de courant – vorticité

Souvent les conditions aux limites pour la pression sont difficile à poser. On adopte la formule vorticité- fonction de courant $(\psi - \omega)$ pour éviter ce problème. Pour faire disparaître les termes de pression dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, on fait une dérivation de l'équation de mouvement. On introduit ensuite la vorticité et la fonction de courant ce qui élimine la pression.

Le problème est bidimensionnel, on introduit donc la fonction de courant Ψ .

La vorticité est donnée par :

$$\omega = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h \cdot V_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (h \cdot V_\eta) \right] \quad (8)$$

3.2 Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial (r \cdot h \cdot V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial (r \cdot h \cdot V_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

3.3 Equation de mouvement

L'équation de mouvement est donné par :

$$\frac{r V_\eta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{r V_\theta}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = \frac{\beta g}{h} \left[G \frac{\partial T}{\partial \theta} - F \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] +$$

$$\frac{\nu}{r \cdot h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \frac{h^2}{r} \omega \right] \quad (10)$$

3.4 Equation de la chaleur

Par raison de symétrie on a $T = T(\eta ; \theta)$

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{V_\eta}{h} \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{V_\theta}{h} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{r.h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(r. \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r. \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \quad (11)$$

3.5 Vorticité

L'équation de continuité est satisfaite en introduisant la fonction de courant Ψ tel que :

$$\begin{aligned} V_\eta &= \frac{1}{r.h} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ V_\theta &= -\frac{1}{r.h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (12)$$

La vorticité est alors donnée par :

$$\omega = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \quad (13)$$

4. Adimensionnalisation

4.1 Adimensionnalisation des équations

Nous choisissons respectivement la longueur, la vitesse et la température de référence par

$$L, \frac{\nu Gr^{*(2/5)}}{L}, \frac{qL}{\lambda Gr^{*(1/5)}}$$

Les variables adimensionnelles sont donc:

$$R = \frac{r}{L}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Gr^* = \frac{\beta.g.q.L^4}{\lambda.\nu^2}$$

$$V_\eta^+ = \frac{V_\eta}{\nu Gr^{*(2/5)}}, \quad V_\theta^+ = \frac{V_\theta}{\nu Gr^{*(2/5)}}$$

$$T^+ = \frac{\lambda}{qL} (T - T_\infty).Gr^{*(1/5)}, \quad \omega^+ = \frac{L^2 \omega}{\nu.Gr^{*(2/5)}}$$

$$\Psi^+ = \frac{\Psi}{\nu.L.Gr^{*(2/5)}}$$

L'adimensionnalisation nous donne :

$$R_1 = \frac{r_1}{L}, \quad R_2 = \frac{r_2}{L}, \quad Z_1 = \frac{z_1}{L} \quad (14)$$

En portant ces variables dans les équations (10) , (11) , (12), on a les équations de transfert adimensionnalisées suivantes :

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (RHV_\eta^+) + \frac{\partial}{\partial \theta} (RHV_\theta^+) = 0 \quad (15)$$

Equation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{V_\eta^+}{H} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + \frac{V_\theta^+}{h} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \\ \frac{1}{R.H^2 \zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(R. \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R. \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\zeta = Pr.Gr^{*(2/5)}$$

Equation de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{R}{H} V_\eta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{R}{H} V_\theta^+ \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} = \\ \frac{1}{R.H^2 Gr^{*(2/5)}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} - \frac{H^2}{R} \omega^+ \right] \\ + \frac{1}{H} \left[G \frac{\partial T^+}{\partial \theta} - F \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Les composantes adimensionnelles de la vitesse

$$V_\eta^+ = \frac{1}{RH} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta}, \quad V_\theta^+ = \frac{1}{RH} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta}$$

Vorticité adimensionnelle

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \right] \quad (18)$$

5. Transformation des équations

Pour passer à la méthode de résolution numérique, ces équations doivent être transformées [8].

5.1 Equation de la chaleur

En multipliant l'équation (16) par RH^2 nous avons :

$$V_{\eta}^+ RH \frac{\partial T^+}{\partial \eta} + V_{\theta}^+ RH \frac{\partial T^+}{\partial \theta} = \frac{1}{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (R \cdot \frac{\partial T^+}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R \cdot \frac{\partial T^+}{\partial \theta}) \right] \quad (19)$$

En tenant compte de l'équation de continuité on a :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[R \cdot HV_{\eta}^+ T^+ - \frac{R}{\zeta} \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[R \cdot HV_{\theta}^+ T^+ - \frac{R}{\zeta} \frac{\partial T^+}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (20)$$

5.2 Equation de mouvement

Multiplions les deux membres de (17) par RH^2 .

$$V_{\eta}^+ RHR \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} \frac{1}{R} + V_{\theta}^+ RHR \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} \frac{1}{R} = RH \left[G \frac{\partial T^+}{\partial \theta} - F \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{Gr^{*(2/5)}} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} - \frac{H^2}{R} \omega^+ \right] \quad (21)$$

En tenant compte de l'équation de continuité, nous trouvons pour équation de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[RHV_{\eta}^+ \omega^+ - \frac{R}{Gr^{*(2/5)}} \frac{\partial \omega^+}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[RHV_{\theta}^+ \omega^+ - \frac{R}{Gr^{*(2/5)}} \frac{\partial \omega^+}{\partial \theta} \right] = RH \left[G \frac{\partial T^+}{\partial \theta} - F \frac{\partial T^+}{\partial \eta} \right] + H^2 \left[FV_{\eta}^+ - GV_{\theta}^+ - \frac{1}{RGr^{*(2/5)}} \right] \omega^+ \quad (22)$$

5.3 Equation de la fonction de courant

D'après (18) nous avons :

$$\omega^+ = -\frac{1}{H^2} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \right] \quad (23)$$

Le développement du second membre nous donne :

$$\omega^+ = -\frac{1}{RH^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{RH^2} \left[G \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} - F \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \right] \quad (24)$$

6. Conditions aux limites

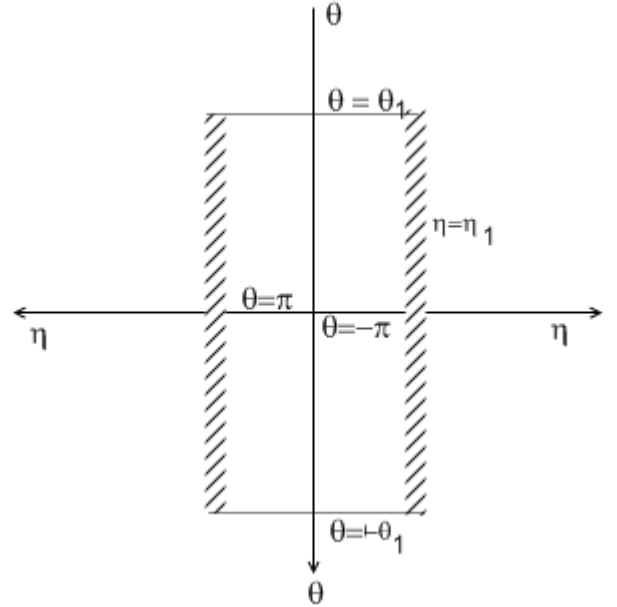


Figure 5 : Représentation du système en coordonnées toriques (η ; θ ; φ)

6.1 Axe de révolution ($\eta = 0$)

On a un axe de symétrie, nous déduisons alors :

$$\begin{aligned} V_{\eta}^+ &= 0 & \frac{\partial V_{\theta}^+}{\partial \eta} &= 0 & \frac{\partial T^+}{\partial \eta} &= 0 \\ \Psi^+ &= 0 & \omega^+ &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

6.2 Entrée $\theta = -\theta_1$

Nous imposons à l'entrée des profils de vitesse variable. La vorticité est déterminée à l'aide de l'équation (24).

$$\begin{aligned} V_\eta^+ &= 0 & V_\theta^+ &= f(\eta) & T^+ &= 0 \\ \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} &= -(\text{R.H})_{\theta=-\theta_1} \cdot f(\eta) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \omega^+ &= - \left[\frac{1}{\text{R.H}^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \theta^2} \right) \right]_{\theta=-\theta_1} \\ &+ \left(\frac{\text{F}}{\text{R}} \right)_{\theta=-\theta_1} \cdot f(\eta) \end{aligned}$$

La fonction $f(\eta)$ précise le profil de la vitesse à l'entrée.

$$f(\eta) = \begin{cases} V_m^+ = \frac{V_m L}{\nu \cdot \text{Gr}^{*(2/5)}} = c^{te} = \text{profil carrée} \\ V_m^+ \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^2 \right], \text{profil parabolique} \end{cases} \quad (27)$$

6.3 Paroi intérieure $\eta = \eta_1$

La vorticité est calculée à l'aide de (24), de plus, toutes les dérivées de Ψ^+ suivant θ s'annulent.

Nous trouvons :

$$\begin{aligned} V_\eta^+ &= 0 & V_\theta^+ &= 0 \\ \frac{\partial T^+}{\partial \eta} &= \text{H}_{\eta=\eta_1} \cdot \text{Gr}^{*(1/5)} \\ \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} &= 0 & \omega^+ &= - \left[\frac{1}{\text{R.H}^2} \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=\eta_1} \end{aligned} \quad (28)$$

6.4 Sortie $\theta = \theta_1$

La vorticité est calculée à l'aide de (24).

Les valeurs de T^+ ou Ψ^+ sont déterminées par extrapolation.

$$\begin{aligned} V_\eta^+ &= \left[\frac{1}{\text{RH}} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_1} & V_\theta^+ &= \left[\frac{1}{\text{RH}} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \eta} \right]_{\theta=\theta_1} \\ \frac{\partial T^+}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial^2 T^+}{\partial \theta^2} &= 0 \\ \omega^+ &= - \left[\frac{1}{\text{R.H}^2} \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta^2} \right]_{\theta=\theta_1} + \\ & \left[\frac{1}{\text{R.H}^2} \left(\text{G} \frac{\partial \Psi^+}{\partial \theta} - \text{F} \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial \eta} \right) \right]_{\theta=\theta_1} \end{aligned} \quad (29)$$

6.5 Condition de continuité

($\theta = \pm\pi$)

$$\begin{aligned} T_{\theta=\pi}^+ &= T_{\theta=-\pi}^+ & \Psi_{\theta=\pi}^+ &= \Psi_{\theta=-\pi}^+ \\ \omega_{\theta=\pi}^+ &= \omega_{\theta=-\pi}^+ \end{aligned} \quad (30)$$

7. Conclusion

La configuration du système est torique, les auteurs ont écrits les équations de continuité, de la chaleur, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans le système de coordonnées toriques.

Les équations de la convection naturelle sont des équations aux dérivées partielles qu'on peut résoudre par des méthodes numériques.

Parmi ces méthodes on peut citer la méthode de différences finies, la méthode d'éléments finis, ou la méthode de volumes finis.

Dans le domaine de la convection, la méthode de volumes finis est un des techniques les plus utilisées. Les auteurs ont pu transformer les équations de transfert de la convection naturelle. Ces équations peuvent être par la suite résolues par une méthode de volume fini en tenant compte des conditions aux limites.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] Hung Y; H, Shiau W.M, Local steady-state natural convection heat transfer in vertical parallel plates with a two-dimensional rectangular rib. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 31, No, 6, pp. 1219-1288, 1988.
- [2] Ahmed F. Alfahaid¹, R.Y. Sakri, M. I. Ahmed², Natural convection heat transfer in concentric horizontal annuli containing a saturated porous media, 1- Department of Mechanical Technology, Riyadh College of Technology, Saudi Arabia. P.O. Box 91471 Riyadh 11633, Saudi Arabia, 2- Department of Mechanical Engineering, International Islamic University Malaysia, IIUM Engineering Journal, Vol. 6, No. 1, 2005
- [3] T. H. Kuehn, R. J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal cylinders, *J. Fluid Mech.*, vol. 74, pp. 695-719, 1976.
- [4] U. Projahn. H. Reiger, H. Beer, Numerical analysis of laminar convection between concentric and eccentric cylinders, *Numer. Heat Transfer*, vol. 4. pp. 131- 146, 1981.
- [5] George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chapter 2, Academic Press, 2nd ed, 1970
- [6] Yves JANNOT, *transferts thermiques*, cours 2ème année, Ecole des Mines Nancy, 2012
- [7] J. Brau, *Convection*, Cours, INSA LYON, Département de génie civil et urbanisme, 2006
- [8] .S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and fluid flow*, McGraw-Hill book company, New-York, 1980