Représentation formelle des mesures non archimédiennes

Randimbindrainibe F.[1]**, Andriamanohisoa Hery Zo**[2]**, Randriamitantsoa P.A.**[3]
Laboratoire Informatique appliquée Image Signal Télécommunication (LIISTA)
Département Télécommunication - ESPA
Université d'Antananarivo
[1] falirandimby@yahoo.fr, [2] aherizo@yahoo.fr, [3] rpa@freenet.mg

Résumé

Cet article généralise la représentation par des séries formelles à coefficients bornés toute mesure définie sur le groupe compact des entiers p-adiques Z_p à valeurs dans un corps K ($\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$), où K est une extension de $\mathbb{Q}_p$ complet par rapport à la valeur absolue prolongeant la valeur absolue p-adique $|\ |_p$, avec $p \neq 2$, [5, 6].

On considère un groupe G commutatif, compact par rapport à la topologie définie par une distance ultramétrique. Pour une base orthonormée (b.o.n) $\Delta = (e_n(z))_{n\geq 0}$ et une mesure $\mu \in M(G)$, on pose $\rho_n(\Delta,\mu) = \int_G e_n(z).d\mu(z)$, $\rho(\Delta,\mu) = (\rho_n(\Delta,\mu))_{n\geq 0}$. L'ensemble $M(G,\Delta) = \{\rho(\Delta,\mu); \mu \in M(G)\}$ est un espace (une algèbre) de Banach par rapport aux opérations et à la norme définies à partir des opérations et de la norme sur $M(G)$. L'application $\rho_\Delta : M(G) \to M(G,\Delta)$, $\rho_\Delta(\mu) = \rho(\Delta,\mu)$ est une isométrie. Ensuite on construit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$, que l'on appellera « alphabet », et une application de $M(G)$ vers $K\langle a_n \rangle$, que l'on appellera la représentation formelle ou la formalisation de la mesure μ .

Mots clés

p-adique, ultramétrique, non archimédien, formalisation, suite (système) triangulaire multipliable, convolutive, décomposable, compact, complet, ouvert fermé (clopen)

Abstract

This paper generalizes the representation by means of formal series with borned coefficients of all measure defined on the compact group of $p-$adic integers Z_p taking values in the IK field ($\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$), where IK is an extension of $\mathbb{Q}_p$, complete with regard to the absolute value extending the $p-$adic absolute value $|\ |_p$, with $p \neq 2$, [5,6].

We consider a commutative group G, compact with regard to the topology defined by an ultrametric distance. For an orthonormal base (o.n.b) $\Delta = (e_n(z))_{n\geq 0}$ and an measure $\mu \in M(G)$, we put $\rho_n(\Delta,\mu) = \int_G e_n(z).d\mu(z)$, $\rho(\Delta,\mu) = (\rho_n(\Delta,\mu))_{n\geq 0}$. The set $M(G,\Delta) = \{\rho(\Delta,\mu); \mu \in M(G)\}$ is a Banach space (an algebra) with regard to the operations and to the norm defined from operations and the norm on $M(G)$.

The application $\rho_\Delta : M(G) \to M(G,\Delta)$, $\rho_\Delta(\mu) = \rho(\Delta,\mu)$ is an isometry. We then construct a sequence $(a_n)_{n\geq 0}$, which we will call alphabet and an application from $M(G)$ to $K\langle a_n \rangle$, which we will call the formal representation or formalization of the μ measure.

Key words

$p-$adic, ultrametric, non archimedean, formalization, triangular sequence (system), multipliable, convolutive, decomposable, compact, complete, clopen.

1. Introduction

1.1 Notations

Comme notations dans cet article on désigne respectivement par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $F_p = \mathbb{Z}/(p)$ (avec $(p) = p.\mathbb{Z}$), $\mathbb{R}$, l'ensemble des entiers naturels ou nul, l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres rationnels, le corps résiduel des nombres congrus modulo p, le corps des nombres réels, ensuite par k un corps commutatif quelconque de caractéristique 0 (sauf mention du contraire) contenant $\mathbb{Q}$, par $K \supset \mathbb{Q}_p$ une extension de $\mathbb{Q}_p$ complet par rapport à la valeur absolue $| \ |$ prolongeant la valeur absolue p-adique $| \ |_p$, où p est un nombre premier ($p \neq 2$), par $\overline{Q}_p$ la clôture algébrique du corps Q_p de degré d'extension $\left[\overline{Q}_p : Q_p\right] = +\infty$. De plus si K est un corps complet non archimédien, l'ensemble $A = \{z \in K / |z| \leq 1\}$ est appelé l'anneau de normalisation, $\mathfrak{I} = \{z \in K / |z| < 1\}$ est un idéal maximal de A et est appelé l'idéal de normalisation, $\overline{K} = A/\mathfrak{I}$ est le corps résiduel de K. Le symbole ♣ marque le début d'une démonstration et ♦ la fin. On désigne par $[r]$ la partie entière de $r \in \mathbb{R}$. Enfin on désigne par $k[[X]]$ l'espace vectoriel des séries entières formelles sur k et par $K\langle X \rangle$ l'espace des séries entières formelles à cœfficients bornés. On désigne par m l'ensemble des suites bornées $(a_n)_{n \geq 0} \in K^{\infty}$.

1.2 Quelques sous ensembles particuliers de l'anneau Z_p

1.2.1 L'anneau Z_p a un unique idéal maximal pZ_p et le corps résiduel $\dfrac{Z_p}{pZ_p}$ est le corps des p éléments $F_p = \mathbb{Z}/(p)$, où $(p) = p.\mathbb{Z}$. Dans Q_p les autres disques de centre 0 sont $p^m Z_p = \{z = a_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \cdots\}$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

1.2.2 L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau Z_p est $Z_p^* = Z_p - pZ_p = \{z ; |z|_p = 1\}$

1.2.3 Il y a $p-1$ nombres dans Z_p^* qui jouent un rôle très important, les $(p-1)$ racines de l'unité. Pour chaque $a_0 \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ il existe une unique racine de l'unité telle que le premier coefficient de développement est égal à a_0. La représentation de cette racine est appelée « *représentation de Techmüller* ».[6,10,11]

1.3. Intégration sur Z_p.

Toute mesure sur Z_p est définie par leurs valeurs sur les disques $t + p^m Z_p = \{z \in Z_p / |z - t| < p^m\}$, où $0 \leq t < p^m$, $m \geq 0$. Pour vérifier si une mesure est bornée il suffit de la faire sur ces disques. Pour l'additivité d'une mesure μ il suffit que l'on a

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mu\left(t + p^m j + p^{m+1} Z_p\right) = \mu\left(t + p^m Z_p\right) \tag{1}$$

L'intégrale d'une fonction continue est définie comme la limite

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{Z_p} f(z).d\mu(z) = \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{p^m-1} f(j).\mu\left(j + p^m Z_p\right) \tag{2}$$

1.3.1 *Exemples de mesure sur* Z_p .[9]

- *Mesure définie par les polynômes de Bernoulli*

On sait que les polynômes de Bernoulli $B_n(T)$ et les nombres de Bernoulli B_n sont respectivement définis par leurs fonctions génératrices

$$\frac{X.e^{TX}}{e^X - 1} = \sum_{n\geq 0} B_n(T)\frac{X^n}{n!} \ , \ \frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{X^n}{n!} \tag{3}$$

La distribution de Bernoulli est appelée la fonction d'ensembles sur Z_p définie par

$$\mu_{B_\nu}\left(t + p^m Z_p\right) = p^{m(\nu-1)} B_\nu\left(\frac{t}{p^m}\right) \tag{4}$$

Soit r un entier naturel premier avec p . « La régularisation » de l'expression (4) donne la mesure

$$\mu_{B_\nu,r}(U) = \mu_{B_\nu}(U) - r^\nu.\mu_{B_\nu}\left(r^{-1}U\right) \tag{5}$$

La mesure de Bernoulli Mazur est la mesure $\mu_{B,r} = \mu_{B_1,r}$. Le *théorème*5 [10] montre que :

$$d\mu_{B_\nu,r}(z) = \nu z^{\nu-1} d\mu_{B,r}(z) ,$$

donc

$$\int_{Z_p} z^n d\mu_{B,r}(z) = \left(1 - r^{n+1}\right)\frac{B_{n+1}}{n+1} ,$$

par suite,

$$\int_{Z_p} z^n d\mu_{B_\nu,r}(z) = \nu\left(1 - r^{n+\nu}\right)\frac{B_{n+\nu}}{n+\nu}$$

- *Mesures* μ_ξ *et* $\mu_{D_\nu^\xi}$

Soit μ_ξ la mesure définie par :

$$\mu_\xi\left(t + p^m Z_p\right) = \frac{\xi^t}{1 - \xi^{p^m}} , \ \ \xi \in K , \ |\xi - 1| > 1 \tag{6}$$

On construit ensuite les mesures $\mu_{D_\nu^\xi}$. Pour cela on introduit les polynômes $D_n^{(\xi)}(T)$ et les nombres $D_n^{(\xi)}$, où $\xi \in K$, $|\xi - 1| > 1$ définis respectivement par leurs fonctions génératrices :

$$\frac{e^{Tx}}{1 - \xi.e^X} = \sum_{n\geq 0} D_n^{(\xi)}(T)\frac{X^n}{n!} , \ \ \frac{1}{1 - \xi.e^X} = \sum_{n\geq 0} D_n^{(\xi)} \frac{X^n}{n!} . \tag{7}$$

Les nombres $D_n^{(\xi)}$ sont d'une même famille que les nombres d'Euler $H_n(u)$ (*1) et les nombres $G_n(u)$ (*2). Les polynômes $D_n^\xi(T)$ peuvent être représentés par :

$$D_n^\xi(T) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_n^\xi.T^{n-j} \tag{8}$$

Notons quelques propriétés de ces polynômes et de ces nombres spéciaux

$$p^{\nu}\sum_{i=0}^{p-1}\xi^{i}D_{\nu}^{(\xi^{p})}\left(T+\frac{i}{p}\right)=D_{\nu}^{(\xi)}(p.T) \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\xi^{k}k^{n}=D_{n}^{(\xi)}-\xi^{m}D_{n}^{(\xi)}(m) \tag{10}$$

$$D_{n}^{(\xi)}=\sum_{k=0}^{n}s_{2}(n,k)k!\frac{\xi^{k}}{(1-\xi)^{k+1}}, \tag{11}$$

où $s_2(n,k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce.
On définit la mesure $\mu_{D_{\nu}^{(\xi)}}$ par :

$$\mu_{D_{\nu}^{(\xi)}}\left(t+p^{m}Z_{p}\right)=p^{m\nu}.\xi^{t}D_{\nu}^{(\xi^{p^{m}})}\left(\frac{t}{p^{m}}\right) \tag{12}$$

On démontre que

$$\mu_{D_{\nu}^{(\xi)}}\left(t+p^{m}Z_{p}\right)\equiv\frac{\xi^{t}}{1-\xi^{p^{m}}}t^{\nu}\ \left(\operatorname{mod} p^{m}\right),\text{ i.e. } d\mu_{D_{\nu}^{(\xi)}}(z)=z^{\nu}d\mu_{\xi}(z) \tag{13}$$

A l'aide des formules (2) et (11) on démontre

$$\int_{Z_p} z^{n}d\mu_{\xi}(z)=D_{n}^{(\xi)} \tag{14}$$

et, par suite,

$$\int_{Z_p} z^{n}d\mu_{D_{\nu}^{(\xi)}}(z)=D_{n+\nu}^{(\xi)}. \tag{15}$$

- *Mesure* $\mu_{B(a)}$

Pour $z\in Z_p$ soit $\{z\}_m$ le nombre entier tels que $0\le\{z\}_m<p^m$ et $z-\{z\}_m\in p^m.Z_p$. Posons $\left[\frac{z}{p^m}\right]=\frac{z-\{z\}_m}{p^m}$, alors tout $z\in Z_p$ s'écrit sous la forme $z=p^m\left[\frac{z}{p^m}\right]+\{z\}_m$. Notons quelques propriétés d'une telle fonction

$$\left[\frac{z+u.p^{m}}{p^{m}}\right]=u+\left[\frac{z}{p^{m}}\right]\ \left(u\in Z_{p}\right),\ 1+\left[\frac{-z-1}{p^{m}}\right]=-\left[\frac{z}{p^{m}}\right],\ \left[\frac{\left[\frac{z}{p^{s}}\right]}{p^{m}}\right]=\left[\frac{z}{p^{s+m}}\right] \tag{16}$$

1.3.2 *Lemme2 - On a la relation*

$$\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{z+jp^{m}}{p^{m+1}}\right]=\left[\frac{z}{p^{m}}\right] \tag{17}$$

♣ En effet il est facile de voir que

$$\left[\frac{z+jp^m}{p^{m+1}}\right]=\begin{cases}\left[\dfrac{z}{p^{m+1}}\right] & \left(0\le j<p-\dfrac{\{z\}_{m+1}}{p^m}\right)\\ \left[\dfrac{z}{p^{m+1}}\right]+1 & \left(p-\dfrac{\{z\}_{m+1}}{p^m}\le j\le p-1\right)\end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{z+jp^m}{p^{m+1}}\right]=\left(p+\left[\frac{\{z\}_{m+1}}{p^m}\right]\right)\cdot\left[\frac{z}{p^{m+1}}\right]+\left[\frac{\{z\}_{m+1}}{p^m}\right]\cdot\left(\left[\frac{z}{p^{m+1}}\right]+1\right)=p\cdot\left[\frac{z}{p^{m+1}}\right]+\left[\frac{\{z\}_{m+1}}{p^m}\right]=$$

$$=\left[\frac{p^{m+1}\left[\dfrac{z}{p^{m+1}}\right]+\{z\}_{m+1}}{p^m}\right]=\left[\frac{z}{p^m}\right].$$

♦

Introduisons la mesure $\mu_{B(a)}$ $\left(a\in Z_p\right)$, en posant

$$\mu_{B(a)}\left(z+p^mZ_p\right)=\left[\frac{\{z\}_m-a}{p^m}\right]=\left[\frac{z-a}{p^m}\right]-\left[\frac{z}{p^m}\right],$$

on a $\left\|\mu_{B(a)}\right\|\le 1$ et $\mu_{B(a)}\left(t+p^mZ_p\right)=-\left[\dfrac{a}{p^m}\right]+\left[\dfrac{t-\{a\}_m}{p^m}\right]=-\left[\dfrac{a}{p^m}\right]-\begin{cases}1 & \left(0\le t<\{a\}_m\right)\\ 0 & \left(\{a\}_m\le t<p^m\right)\end{cases}$,

d'où en utilisant ces résultats on obtient

$$\int_{Z_p} z^n d\mu_{B(a)}(z)=\frac{B_{n+1}-B_{n+1}(a)}{n+1} \tag{18}$$

1.4. Algèbre des mesures sur Z_p*.* [9]

Etudions l'algèbre des mesures sur Z_p. Rappelons que le système des polynômes d'interpolation de Newton

$$\binom{z}{n}=\frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)}{n!} \tag{19}$$

forme une base orthonormée de l'espace des fonctions continues $C\left(Z_p\right)$ sur Z_p [1]. Les composantes de toute fonction $f\in C\left(Z_p\right)$ dans cette base

$$f(z)=\sum_{n\ge 0}a_n\binom{z}{n} \tag{20}$$

sont définies par :

$$a_n=\left(\Delta^n f\right)(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k), \tag{21}$$

où Δ est l'opérateur de différence dans $C(Z_p)$: $(\Delta f)(z)=f(z+1)-f(z)$, autrement dit, $\Delta=\tau_1-\mathrm{id}$, où $(\tau_h f)(z)=f(z+h)$, $(\mathrm{id}(f))z)=f(z)$. Par exemple soit $X_{t,s}$ la fonction caractéristique du disque $t+p^sZ_p$ $\left(0\le t<p^s\right)$. Alors

$$X_{t,s}(z) = \frac{1}{p^s}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{p^s-1} \varsigma_s^{-tj}\left(\varsigma_s^j - 1\right)^n\right).\binom{z}{n}, \tag{22}$$

où ς_s est une racine primitive d'ordre p^s dans K. Notons que $|\varsigma_s - 1| = |p|^{\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}} < 1$. De plus d'après la définition de la base orthonormée

$$\| f\|_{C(Z_p)} = \sup_{n\geq 0}\{|a_n|\}$$

Pour une mesure quelconque μ sur Z_p on pose

$$\mu_n = \int_{Z_p}\binom{z}{n} d\mu(z). \tag{23}$$

On désigne par $M(Z_p)$ l'algèbre des mesures sur Z_p.

L'application $M(Z_p) \to K\langle X\rangle$ (voir dans le paragraphe §.2 qui suit la définition de cette dernière algèbre), qui fait correspondre à une mesure μ la série entière

$$\mu(X) = \sum_{n\geq 0}\mu_n X^n, \tag{24}$$

est un isomorphisme isométrique d'algèbres. Dans toute la suite toute mesure sur Z_p peut être identifiée à une série entière formelle $\sum_{n\geq 0}\mu_n X^n \in K\langle X\rangle$.

Pour toute série de la forme (23) et pour tout $\alpha \in D(0,1[= \{z \in K; |\alpha| < 1\}$, la valeur $\mu(\alpha) = \sum_{n\geq 0}\mu_n \alpha^n$ est bien définie. Notons que $\mu(0) = \mu_0 = \mu(Z_p)$.

Des égalités (20) et (24) il résulte la relation

$$\langle \mu, f\rangle = \int_{Z_p} f(z).d\mu(z) = \sum_{n\geq 0}\mu_n.a_n = (\mu(\Delta)f)(0), \tag{25}$$

d'où la formule définissant la mesure μ comme fonction d'ensembles à l'aide de la série (24)

$$\mu(t + p^s Z_p) = \int_{Z_p} X_{t,s}(z).d\mu(z) = \frac{1}{p^s}\sum_{j=0}^{p^s-1}\varsigma_s^{-tj}\mu(\varsigma_s^j - 1), \tag{26}$$

par exemple pour la mesure de Dirac δ_a, on a :

$$\delta_a(X) = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}X^n = (1+X)^a \text{ et } \langle \delta_a, f\rangle = f(a).$$

De même dans [9] on démontre pour la mesure μ_ξ :

$$\mu_\xi(X) = \frac{1}{1-\xi(1+X)}$$

2. Représentations formelles des mesures non archimédiennes

2.1 Système triangulaire

Rappelons qu'un système $A = \left(A_k^{m,n}\right)$ $(m,n,k \geq 0)$ d'éléments de k est dit triangulaire, si $A_k^{m,n} = 0$ lorsque $n + m < k$ ou $k < \max(m,n)$.[14] Tout système de scalaires $A = \left(A_k^{m,n}\right)$

défini pour $m+n \geq k \geq \max(m,n)$ peut être prolongé en un système triangulaire par des éléments nuls.

2.2 Algèbre des suites triangulaires convolutives

2.2.1 Soit $K^{\infty} = \{\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}; \xi_n \in K\}$ l'espace vectoriel des suites d'éléments du corps K muni des opérations usuelles (addition et multiplication par un scalaire par composantes). Dans cet espace on définit une fonctionnelle $\| \ \| : K^{\infty} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ par

$$\|\xi\| = \sup\{|\xi_n|; n \geq 0\} \tag{27}$$

2.2.2 On extrait de cet espace le sous espace

$$L = \{\xi = (\xi_n)_{n\geq 0} \in K^{\infty}, \|\xi\| < +\infty\} \tag{28}$$

2.2.3 *Lemme3 – La restriction de la fonctionnelle* (27) *au sous espace* (28) *est une norme non archimédienne, d'où muni de cette norme,* L *est un espace normé non archimédien, noté* $(L, \| \ \|_{\sup})$.

2.2.4 Soit $(K^{\infty}; A_k^{n,m})$ l'algèbre des suites triangulaires convolutives des éléments du corps K. [13] . Rappelons que dans cette algèbre le produit est défini pour $\xi = (\xi_n)$ et $\eta = (\eta_n)$ par :

$$\xi \underset{A}{\times} \eta = \left(\sum_{n+m\geq k}^{n,m\leq k} A_k^{n,m}.\xi_n.\eta_m \right)_{k\geq 0} \tag{29}$$

Supposons que $\left|A_k^{n,m}\right| \leq 1$ (Notons que tous les exemples dans [13] vérifient cette condition), alors si $\xi, \eta \in L$

$$\left\| \xi \underset{A}{\times} \eta \right\| \leq \|\xi\| \times \|\eta\| \tag{30}$$

c'est-à-dire $\xi \underset{A}{\times} \eta \in L$, d'où $(L; A_k^{n,m})$ est une sous algèbre de $(K^{\infty}; A_k^{n,m})$.

2.2.5 *Lemme4 -* $(L, \| \ \|_{\sup}, A_k^{n,m})$ *est une algèbre de Banach non archimédienne.*

2.2.6 Comme exemples on peut considérer les algèbres [14]:

$$(L, \| \ \|_{\sup}, \delta_{k,(n+m)}) \ ; \ \left(L, \| \ \|_{\sup}, \binom{k}{n}\delta_{k,(n+m)}\right) \ ; \ \left(L, \| \ \|_{\sup}, \binom{n,m}{k}\right) \ ;$$

$$\left(L, \| \ \|_{\sup}, \binom{n,m}{k}_a\right) \ ; \ \left(L, \| \ \|_{\sup}, \begin{bmatrix} n,m \\ k \end{bmatrix}_a\right).$$

2.3 **Algèbre de Banach non archimédienne des séries formelles triangulaires convolutives**

2.3.1 Considérons l'algèbre des séries formelles triangulaires convolutives par rapport au système non dégénéré $A = (A_k^{n,m})$, $K[[a_n]]$, où $a = (a_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments d'une algèbre $\mathcal{A}$ sur K munie d'une norme non archimédienne, et l'application :

$$\psi : K[[a_n]] \to \mathbb{R}_+ , \ \psi\left(\sum_{n\geq 0} \mu_n.a_n \right) = \sup\{|\mu_n|; n \geq 0\} \tag{31}$$

ψ définit une norme sur l'espace $K[[a_n]]$, on notera

$$\left\| \sum_{n\geq 0} \mu_n.a_n \right\|_{\infty} = \sup\{|\mu_n|; n \geq 0\} \tag{32}$$

On désigne par $K\langle a_n \rangle$ l'espace $K[[a_n]]$ des séries formelles triangulaires convolutives à coefficients dans K munie de la norme (32), i.e. $\sum_{n\geq 0}\mu_n .a_n \in K\langle a_n \rangle$ si, et seulement si, $\left\|\sum_{n\geq 0}\mu_n .a_n\right\|_\infty < +\infty$. On peut l'appeler l'espace des séries formelles triangulaires convolutives à coefficients bornés dans K.

2.3.2 *Théorème7 -* $K\langle a_n \rangle$ *est un espace de Banach non archimédien.*

2.3.3 Si $\left|A_k^{n,m}\right| \leq 1$ (notons que tous les $A_k^{n,m}$ des exemples ci-dessus possèdent cette propriété), (38) définit une norme sur l'algèbre $K[[a_n]]$ et $K\langle a_n \rangle$ devient une algèbre normée.

2.3.4 *Théorème7 -* $\left(K\langle a_n \rangle; A_k^{n,m}\right)$, *où* $\left|A_k^{n,m}\right| \leq 1$, *est une algèbre de Banach non archimédienne.*

2.3.5 En prenant les exemples de [14] on obtient :

$$K\langle X \rangle \cong \left(L, \|\ \|_{sup}, \delta_{k,(n+m)}\right) \ ; \ K\left\langle \frac{X^n}{n!} \right\rangle \cong \left(L, \|\ \|_{sup}, \binom{k}{n}\delta_{k,(n+m)}\right) ;$$

$$K\left\langle \binom{X}{n} \right\rangle \cong \left(L, \|\ \|_{sup}, \binom{n,m}{k}\right) \ ; \ K\left\langle P_n^{(a)}(X) \right\rangle \cong \left(L, \|\ \|_{sup}, \binom{n,m}{k}_a\right) ;$$

$$K\left\langle Q_n^{(\alpha)}(X) \right\rangle \cong \left(L, \|\ \|_{sup}, \begin{bmatrix} n,m \\ k \end{bmatrix}_a\right).$$

2.4 *Mesures non archimédiennes et intégration*

Soit (V,d) un espace compact ultramétrique et soit $\mathfrak{R}$ l'algèbre de ses parties ouvertes fermées.

2.4.1 *Définition1-* Une application $\mu : \mathfrak{R} \to K$ est appelée distribution lorsque est additive, i.e. si $U = \coprod_{i=1}^{n} U_i$, alors $\mu(U) = \sum_{i=1}^{n}\mu(U_i)$. Ici $\coprod$ désigne la réunion disjointe de sous ensembles.

La distribution est appelée mesure, si elle est bornée, i.e.

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(U)|, U \in \mathfrak{R}\} < +\infty \qquad (33)$$

On sait que tout sous ensemble ouvert fermé de l'espace V est une réunion finie de disques disjoints deux à deux. Ainsi chaque mesure est définie par ses valeurs sur les disques.

2.4.2 *Défintion2 –* L'intégrale d'une fonction continue $f : V \to K$ par la mesure μ est définie d'une manière standarde à l'aide de l'approximation d'une combinaison linéaire des fonctions caractéristiques des disques.

2.4.3 *Exemple –* Le plus simple exemple est la mesure de Dirac δ_a $(a \in V)$, définie pour toute fonction continue $f : V \to K$ par $\delta_a(f) = f(a)$.

2.5 *Algèbre des mesures non archimédiennes.*

L'ensemble des mesures $M(V)$ sur V muni des opérations usuelles est un espace vectoriel sur K, de plus muni de la norme ultramétrique [17] est un espace de Banach ultramétrique.

2.5.1 *Toute mesure définit une fonctionnelle linéaire sur l'espace des fonctions continues sur* V, *noté* $C(V)$, *selon la règle* :

$$\langle \mu, f \rangle = \int_V f(x).d\mu(x) \tag{34}$$

et telle que $\left| \int_V f(x).d\mu(x) \right| \leq \| f \| . \| \mu \|$ [16]

2.5.2 On sait que l'application $\mu \to \langle \mu, \bullet \rangle$ est un isomorphisme isométrique des espaces $M(V) \to (C(V))^*$ (espace dual topologique de l'espace de fonctions continues sur V, $C(V)$)[17]

2.5.3 Soit $\Delta = (e_n(z))_{n \geq 0}$ une base orthonormée de l'espace $C(V)$ et considérons les moments des fonctions de la base orthonormée par rapport à la mesure μ

$$\rho_n(\Delta, \mu) = \int_V e_n(z).d\mu(z) \quad (n \geq 0) \tag{35}$$

La fonctionnelle (40) peut être écrite sous la forme

$$\langle \mu, f \rangle = \sum_{n \geq 0} f_n . \rho_n(\Delta, \mu), \tag{36}$$

où f_n sont les coefficients du développement de f dans la base Δ [13]

2.5.4 On forme la suite des moments de la base

$$\rho(\Delta, \mu) = (\rho_n(\Delta, \mu))_{n \geq 0} \tag{37}$$

Il est évident que, $\rho(\Delta, \mu) = \rho(\Delta, \alpha_1.\mu_1 + \alpha_2.\mu_2) = \alpha_1.\rho(\Delta, \mu_1) + \alpha_2.\rho(\Delta, \mu_2)$, où les opérations usuelles (addition et multiplication par un scalaire) s'effectuent par composantes.

2.5.5 Considérons l'ensemble des suites de moments de la base $\Delta = (e_n(z))_{n \geq 0}$

$$M(V, \Delta) = \{\rho(\Delta, \mu) : \mu \in M(V)\} \tag{38}$$

muni des opérations induites de l'espace K^∞. On introduit une norme dans $M(V, \Delta)$ en transposant la norme de l'algèbre $M(V)$:

$$\| \rho(\Delta, \mu) \| = \| \mu \| = \sup\{ | \rho_n(\Delta, \mu) | ; n \geq 0 \} = \| \rho(\Delta, \mu) \|_{sup} \tag{39}$$

2.5.6 *Lemme3 – Les espaces de Banach* $M(V, \Delta)$ *et* $(L; \| \|_{sup})$ *coïncident.*

2.54.7 Considérons l'application

$$\rho_\Delta : M(V \to L), \ \rho_\Delta(\mu) = \rho(\Delta, \mu) \tag{40}$$

2.5.8 *Lemme 4 -* ρ_Δ *est un isomorphisme isométrique d'espaces.*

2.6 Algèbre des mesures sur un groupe compacte ultramétrique.

Dans ce paragraphe on considère un groupe multiplicatif G, commutatif, compact par rapport à une topologie définie par une ultramétrique.

2.6.1 On sait que l'espace $M(G)$ devient une algèbre par rapport aux opérations linéaires habituelles et au produit de convolution des mesures [17]

$$\int_G f(z) d\mu_1 * \mu_2(z) = \iint_{G \times G} f(z_1 z_2) d\mu_1(z_1) d\mu_2(z_2) \tag{41}$$

Avec cela on a

$$\| \mu_1 * \mu_2 \| \leq \| \mu_1 \| . \| \mu_2 \| \tag{42}$$

2.6.2 On introduit dans $M(G, \Delta)$ (42) une structure d'algèbre de Banach. Pour cela on définit dans l'espace de Banach $M(G, \Delta)$ le produit de convolution des suites, en le transposant de $M(G)$ par :

$$\rho(\Delta, \mu_1) . \rho(\Delta, \mu_2) = \rho(\Delta, \mu_1 * \mu_2) \tag{43}$$

Ainsi $M(G,\Delta)$ est transformée en une algèbre associative et commutative. La norme (37) sur $M(G,\Delta)$, en vertu de (40), est sous multiplicative, c'est-à-dire

$$\|\rho(\Delta,\mu_1).\rho(\Delta,\mu_2)\| \le \|\rho(\Delta,\mu_1)\|.\|\rho(\Delta,\mu_2)\| \ .$$

Comme résultat $M(G,\Delta)$ est transformée en une algèbre de Banach, appelée « *algèbre des suites des moments de la base* ».

2.6.3 *Lemme 5 – L'application ρ_Δ est un isomorphisme isométrique d'algèbres.*

♣ La démonstration résulte du lemme 4 et de la formule (42).♦

Dans la suite supposons que la base orthonormée $\Delta = (e_n(z))_{n\ge 0}$ de l'espace $C(V)$ satisfait à la condition suivante :

2.6.4 La base orthonormée $\Delta = (e_n(z))_{n\ge 0}$ est « *triangulaire décomposable* » par rapport au système triangulaire $A = \left(A_k^{m,n}\right)$ [14]

$$e_k(z_1 z_2) = \sum_{n+m\ge k}^{n,m\le k} A_k^{n,m}.e_n(z_1).e_m(z_2) \tag{44}$$

2.6.5 D'après la définition des moments de la base et du produit de convolution des mesures (36), il résulte de la formule (37)

$$\rho_k(\Delta,\mu_1 * \mu_2) = \sum_{n+m\ge k}^{n,m\le k} A_k^{n,m}\rho_n(\Delta,\mu_1).\rho_m(\Delta,\mu_2) \tag{45}$$

D'après la définition du produit de convolution des suites triangulaires convolutives [14] on obtient la forme explicite de la multiplication dans $M(G,\Delta)$:

$$\rho(\Delta,\mu_1).\rho(\Delta,\mu_2) = \rho(\Delta,\mu_1) \underset{A}{\times} \rho(\Delta,\mu_2) \tag{46}$$

Ainsi $M(G,\Delta)$ devient une sous algèbre de l'algèbre des suites triangulaires convolutives $\left(K^\infty ; A\right)$ [14].

2.6.6 Notons que, $\left|A_k^{n,m}\right| \le 1$, car le système de fonctions

$$(e_n \otimes e_m)(z_1, z_2) = e_n(z_1).e_m(z_2)$$

forme une base orthonormée de $C(G\times G)$. Ce qui nous permet de définir l'algèbre de Banach $\left(L\ ,\|\ \|_{\sup}, A_k^{n,m}\right)$.

2.6.7 *Proposition1- Les espaces de Banach $M(G,\Delta)$ et $\left(L\ ,\|\ \|_{\sup}, A_k^{n,m}\right)$ coïncident.*

♣ La démonstration résulte du lemme3 et de (39). ♦

2.7 Formalisation des espaces des mesures

2.7.1 Soit $a = (a_n)_{n\ge 0}$ un alphabet arbitraire, i.e. une suite arbitraire de symboles. On définit la $a-$ formalisation des moments de la base Δ par :

$$M(V,\Delta)[\![a_n]\!] = \left\{ \sum_{n\ge 0} \rho_n(\Delta,\mu).a_n\ ,(\rho_n(\Delta,\mu))_{n\ge 0} \in M(V,\Delta) \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{n\ge 0} \rho_n(\Delta,\mu).a_n\ ,\ \mu \in M(V) \right\} \tag{47}$$

et l'application $a-$ formalisation diagonale correspondante i_M^a par

$$i_M^a : M(V,\Delta) \to M(V,\Delta)[[a_n]],\ i_M^a(\rho(\Delta,\mu)) = \sum_{n\geq 0} \rho_n(\Delta,\mu).a_n \tag{48}$$

2.7.2 L'espace $M(V,\Delta)[[a_n]]$ est appelé $(\Delta,a)-$ formalisation de l'espace des mesures $M(V)$, tandis que l'application

$$\rho_\Delta^a : M(V,\Delta) \to M(V,\Delta)[[a_n]],\ \rho_\Delta^a(\mu) = \sum_{n\geq 0} \rho_n(\Delta,\mu).a_n \tag{49}$$

est appelée $a-$ formalisation diagonale.

Il résulte de la définition que

$$\rho_\Delta^a = i_M^a \circ \rho_\Delta \tag{50}$$

2.7.3 *Proposition2 -* $M(V,\Delta)[[a_n]] = K\langle a_n \rangle$ [14]

♣ Résulte du *lemme 3* (alinéa ***2.4.6***). ♦

2.7.4 L'application (46) peut maintenant s'écrire sous la forme

$$i_M^a : M(V,\Delta) \to K\langle a_n \rangle \tag{51}$$

2.7.5 *Proposition3 -* $\rho_\Delta^a : M(V,\Delta) \to K\langle a_n \rangle$ *est un isomorphisme isométrique d'espaces.*

♣ D'après le *lemme4* (alinéa ***2.4.8***).♦

2.8 Formalisation des algèbres de mesures

Considérons l'algèbre de Banach des suites de moments de la base orthonormée $\Delta = (e_n(z))_{n\geq 0}$ $M(G,\Delta)$ et l'algèbre de Banach des mesures $M(G)$ sur le groupe compact ultramétrique G du §**2.6.**

2.8.1 Supposons que la base orthonormée Δ soit triangulaire décomposable par rapport au système $A = \left(A_k^{m,n}\right)$. [13]

2.8.2 Définissons d'abord la formalisation de l'algèbre $M(G,\Delta)$. D'après la *proposition1* $M(G,\Delta)$ coïncide avec $\left(L, \|\ \|_{sup}, A_k^{n,m}\right)$. Comme alphabet on fixe une suite arbitraire $a = (a_n)_{n\geq 0}$, triangulaire convolutive par rapport à $A = \left(A_k^{m,n}\right)$. L'algèbre de Banach $K\langle a_n \rangle$ représente une formalisation de l'algèbre $\left(L, \|\ \|_{sup}, A_k^{n,m}\right) = M(G,\Delta)$ à l'aide de la $a-$ formalisation diagonale (47).

2.8.3 On considère maintenant l'application ρ_Δ^a (50) comme une application entre algèbres, alors :

2.8.4 *Proposition4 – L'application*

$$\rho_\Delta^a : M(V,\Delta) \to K\langle a_n \rangle,\ \rho_\Delta^a(\mu) = \sum_{n\geq 0} \rho_n(\Delta,\mu).a_n$$

est un isomorphisme isométrique d'algèbres et établit une formalisation d'algèbres de mesures.

2.8.5 L'algèbre $K\langle a_n \rangle$ est appelée $(\Delta,a)-$ formalisation de l'algèbre des mesures $M(G)$.

2.8.6 On concrétise la *proposition4* par une formalisation polynomiale.

Théorème1 - *Supposons que la base orthonormée* $\Delta = (e_n(z))_{n\geq 0}$ *soit triangulaire décomposable par rapport au système* $A = \left(A_k^{m,n}\right)$. *Soit* $P = \left(P_n^{(A)}(X)\right)_{n\geq 0}$ *la suite de polynômes définie par la formule* (27) *(alinéa **6.8**) de* [14]. *Alors l'isomorphisme isométrique* $\rho_\Delta^P : M(G) \to K\left\langle P_n^A(X) \right\rangle$ *établit la formalisation polynomiale de l'algèbre des mesures* $M(G)$.

La proposition 4 et le théorème1 sont des généralisations du théorème de Van Der Put [19]

3. Exemples de représentations formelles des mesures non archimédiennes

3.1. Algèbre des mesures sur le groupe additif Z_p

3.1.1 Les mesures sur le compact Z_p ont été étudiées dans les travaux [7 ; 18]. Un grand intérêt représente la mesure μ_ξ définie par :

$$\mu_\xi\left(t+p^m Z_p\right)=\frac{\xi^t}{1-\xi p^m}\quad\left(0<t<p^m, \xi\in K, |\xi|\le|1-\xi|\right) \tag{52}$$

Le calcul montre que [9] :

$$\int_{Z_p}\binom{z}{n}d\mu_\xi(z)=\frac{\xi^n}{(1-\xi)^{n+1}},$$

par suite,

$$\int_{Z_p}\beta^{nz}d\mu_\xi(z)=\frac{1}{1-\xi.\beta^n}\quad\text{et}\quad\int_{Z_p}\binom{z}{n}_\beta d\mu_\xi(z)=\frac{1}{\xi.P_{n+1}^{(\beta)}\left(\xi^{-1}\right)}$$

3.1.2 Décrivons la formalisation polynomiale de $M\left(Z_p\right)$ en utilisant la base orthonormée $\Delta_0=\left(\binom{z}{n}\right)_{n\ge 0}$, qui est une suite additive triangulaire décomposable par rapport à $A=\left(\delta_{k,n+m}\right)$ [13] .

D'après la *proposition1* $M\left(Z_p,\Delta_0\right)=\left(L, \|\ \|_{sup}, (\delta_{k,n+m})\right)$. Or cette dernière algèbre admet la formalisation polynomiale $K\langle X\rangle$ avec l'alphabet $P=\left(X^n\right)_{n\ge 0}$. [14]

L'algèbre des mesures $M\left(Z_p\right)$ *est représentée par* $\left(\Delta_0,\left(X^n\right)_{n\ge 0}\right)$– *formalisation*

$$\rho_{\Delta_0}^P : M\left(Z_p\right)\to K\langle X\rangle,\ \rho_{\Delta_0}^P(\mu)=\sum_{n\ge 0}\rho_n(\Delta_0,\mu).X^n$$

C'est le théorème de Van Der Put [19].

En particulier, pour la mesure de Dirac δ_a, $\left(a\in Z_p\right)$, on a :

$$\rho_{\Delta_0}^P(\delta_a)=\sum_{n\ge 0}\binom{a}{n}.X^n=(1+X)^a \tag{53}$$

Pour la mesure μ_ξ, (51), on a :

$$\rho_{\Delta_0}^P(\mu_\xi)=\sum_{n\ge 0}\frac{\xi^n}{(1-\xi)^{n+1}}X^n=\frac{1}{1-\xi(1+X)} \tag{54}$$

De même dans [9] pour la mesure $\mu_{D_\nu^{(\xi)}}$ on a démontré que

$$\rho_{\Delta_0}^P(\mu_{D_\nu^{(\xi)}})=D^\nu\left(\frac{1}{1-\xi(1+X)}\right), \tag{55}$$

où D - l'opérateur de dérivation dans l'ensemble des séries formelles $K[[X]]$. Notons qu'il en résulte:

$$\mu_{D_\nu^{(\xi)}} = \sum_{k=1}^{\nu+1}(-1)^{\nu+1-k} s_2(\nu+1,k).(k-1)!.(\mu_\xi)^k \quad (\nu \geq 0), \tag{56}$$

où $s_2(n,k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce. [1].

3.1.3 Décrivons la formalisation polynomiale de $M(Z_p)$ en utilisant la base orthonormée

$\Delta_\beta = \left(\binom{z}{n}_\beta\right)_{n\geq 0}$, qui est une suite additive triangulaire décomposable par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}_\beta\right)$ [14], alors d'après la *proposition1* $M(Z_p, \Delta_\beta) = \left(L, \|\ \|_{\sup}, \left(\binom{n,m}{k}_\beta\right)\right)$.

Cette dernière algèbre admet la formalisation polynomiale $K\langle p_n^{(\beta)}(X)\rangle$ avec l'alphabet $P = \left(p_n^{(\beta)}(X)\right)_{n\geq 0}$. [14]

L'algèbre des mesures $M(Z_p)$ *est représentée par* $\left(\Delta_\beta, \left(p_n^{(\beta)}(X)\right)_{n\geq 0}\right)-$ *formalisation*

$$\rho_{\Delta_\beta}^P : M(Z_p) \to K\langle p_n^{(\beta)}(X)\rangle,\ \rho_{\Delta_\beta}^P(\mu) = \sum_{n\geq 0}\rho_n(\Delta_\beta,\mu).p_n^{(\beta)}(X) \tag{57}$$

En particulier pour la mesure de Dirac, en vertu de la décomposition [14] la représentation (63) prend la forme

$$\rho_{\Delta_\beta}^P(\delta_a) = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}_\beta .p_n^{(\beta)}(X) = \sum_{n\geq 0}Q_n^{(\beta)}(\beta^a).p_n^{(\beta)}(X) = \Phi^{(\beta)}(X,\beta^a) \qquad (58)(56)$$

Pour la mesure μ_ξ, d'après sa décomposition [14], la représentation (63) prend la forme

$$\rho_{\Delta_\beta}^P(\mu_\xi) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\xi.p_{n+1}^{(\beta)}(\xi^{-1})}.p_n^{(\beta)}(X) = \frac{1}{1-\xi X} \tag{59}$$

3.1.4 De la décomposition d'une fonction $f \in C(Z_p, IK)$ dans la base orthonormée Δ_β [13] de la formule (63) il résulte

$$\int_{Z_p} f(z).d\mu(z) = \sum_{n\geq 0}\rho_n(\Delta_\beta,\mu).f_n^{(\beta)},$$

d'où en tenant compte de la décomposition de la fonction caractéristique de la boule $B\left(t, |p|^s\right[= t + p^s Z_p$, $\left(0 \leq t < p^s\right)$, on obtient la formule qui rétablit la mesure μ comme fonction d'ensembles

$$\mu\left(t + p^s Z_p\right) = \frac{1}{p^s}\sum_{j=0}^{p^s-1}\zeta_s^{-tj}\rho_{\Delta_\beta}^P(\mu)\left(\zeta_s^j\right) \tag{60}$$

3.2. Algèbre des mesures sur le groupe multiplicatif $G(\alpha)$

Rappelons que l'on désigne par $G(\alpha)$ la fermeture du semi groupe $\{\alpha^n; n \geq 0\}$ dans l'espace ultramétrique K .[13] $G(\alpha)$ est aussi un espace ultramétrique. On a démontré dans [12, 14, 15], que $G(\alpha)$ est un groupe compact. Une base orthonormée standard de l'espace $C(G(\alpha), K)$

est la suite de fonctions continues $\Pi_\alpha = \left(Q_n^{(\alpha)}\right)_{n\geq 0}$. [9]. Les coefficients du développement $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n^{(\alpha)}.Q_n^{(\alpha)}(z)$ sont donnés par la formule :

$$f_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \alpha^{\binom{n-i}{2}} \binom{n}{i}_\alpha f(\alpha^i). \tag{61}$$

C'est un *analogue du théorème de Mahler*. De plus dans [9] on a démontré que

$$Q_k^{(\alpha)}(z_1.z_2) = \sum_{n+m\geq k}^{n,m\leq k} \binom{n,m}{k}_\alpha Q_n^{(\alpha)}(z_1).Q_m^{(\alpha)}(z_2), \tag{62}$$

c'est-à-dire Π_α est une suite multiplicative triangulaire décomposable par rapport à $A = \left(\binom{n,m}{k}_\alpha\right)_{n,m,k\geq 0}$.

3.2.1 Les mesures sur le groupe $G(\alpha)$ ont été étudiées dans l'article [9]. On y a introduit la mesure σ_ξ, $\xi^{-1} \notin U(\alpha)$, où $U(\alpha) = \{\alpha^n ; n \geq 0\}$, pour laquelle

$$\int_{G(\alpha)} z^n d\sigma_\xi(z) = \frac{1}{1-\xi.\alpha^n} \quad (n \geq 0).$$

Les calculs montrent que

$$\int_{G(\alpha)} Q_n^{(\alpha)}(z) d\sigma_\xi(z) = \frac{1}{\xi.P_n^{(\alpha)}\left(\xi^{-1}\right)} \; ; \; \int_{G(\alpha)} L_n^{(\alpha,\varsigma)}(z) d\sigma_\xi(z) = \frac{1}{\xi.P_n^{(\varsigma)}\left(\xi^{-1}\right)}$$

3.2.2 Décrivons la formalisation polynomiale de $M(G(\alpha))$, en utilisant la base orthonormée $\Pi_\alpha = \left(Q_n^{(\alpha)}\right)_{n\geq 0}$. D'après la *proposition1* $M(G(\alpha), \Pi_\alpha) = \left(L, \| \|_{sup}, \left(\binom{n,m}{k}_\alpha\right)\right)$.

Cette dernière algèbre admet la formalisation polynomiale $K\left\langle p_n^{(\alpha)}(X)\right\rangle$ avec l'alphabet $P = \left(p_n^{(\alpha)}(X)\right)_{n\geq 0}$. [14]

L'algèbre des mesures $M(Z_p)$ *est représentée par* $\left(\Pi_\alpha, \left(p_n^{(\alpha)}(X)\right)_{n\geq 0}\right)-$ *formalisation*

$$\rho_{\Pi_\alpha}^P : M(G(\alpha)) \to K\left\langle p_n^{(\alpha)}(X)\right\rangle, \; \rho_{\Pi_\alpha}^P(\mu) = \sum_{n\geq 0} \rho_n(\Pi_\alpha, \mu).p_n^{(\alpha)}(X) \tag{63}$$

En particulier pour la mesure de Dirac δ_a ($a \in G(\alpha)$), la représentation (69) prend la forme

$$\rho_{\Pi_\alpha}^P(\delta_a) = \sum_{n\geq 0} Q_n^{(\alpha)}(a).p_n^{(\alpha)}(X) = \Phi^{(\alpha)}(X, a) \tag{64}$$

Pour la mesure σ_ξ on a

$$\rho_{\Pi_\alpha}^P(\sigma_\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\xi.p_{n+1}^{(\alpha)}\left(\xi^{-1}\right)}.p_n^{(\alpha)}(X) = \frac{1}{1-\xi X} \tag{65}$$

3.2.3 Dans [13] on a démontré que $\Delta_{\alpha,\varsigma} = \left(L_n^{(\alpha,\varsigma)}(z)\right)_{n\geq 0}$ est une base orthonormée de $C(G(\alpha),K)$, de plus on a démontré que

$$L_n^{(\alpha,\zeta)}(z_1 z_2) = \sum_{i+j\geq n}^{i,j\leq n} \binom{i,j}{n}_{\zeta} L_i^{(\alpha,\zeta)}(z_1).L_j^{(\alpha,\zeta)}(z_2),$$

i.e. $\Delta_{\alpha,\zeta}$ est une suite multiplicative triangulaire décomposable par rapport au système triangulaire $A = \left(\binom{i,j}{n}_{\zeta}\right)_{i,j,n\geq 0}$.

3.2.4 Décrivons la formalisation polynomiale de $M(G(\alpha))$, en utilisant la base orthonormée

$\Delta_{\alpha,\varsigma} = \left(L_n^{(\alpha,\varsigma)}(z)\right)_{n\geq 0}$. D'après la *proposition1* $M(G(\alpha),\Delta_{\alpha,\varsigma}) = \left(L, \|\ \|_{\sup}, \left(\binom{n,m}{k}_{\varsigma}\right)\right)$.

Cette dernière algèbre admet la formalisation polynomiale $K\left\langle p_n^{(\varsigma)}(X)\right\rangle$ avec l'alphabet $P = \left(p_n^{(\varsigma)}(X)\right)_{n\geq 0}$. [14]

L'algèbre des mesures $M(G(\alpha))$ *est représentée par* $\left(\Delta_{\alpha,\varsigma}, \left(p_n^{(\varsigma)}(X)\right)_{n\geq 0}\right)$– *formalisation*

$$\rho_{\Delta_{\alpha,\varsigma}}^{P} : M(G(\alpha)) \to K\left\langle p_n^{(\varsigma)}(X)\right\rangle,\ \rho_{\Delta_{\alpha,\varsigma}}^{P}(\mu) = \sum_{n\geq 0} \rho_n\left(\Delta_{\alpha,\varsigma},\mu\right) p_n^{(\varsigma)}(X) \tag{66}$$

En particulier pour la mesure de Dirac δ_a ($a \in G(\alpha)$), la représentation (64) prend la forme

$$\rho_{\Delta_{\alpha,\varsigma}}^{P}(\delta_a) = \sum_{n\geq 0} L_n^{(\alpha,\varsigma)}(a).p_n^{(\varsigma)}(X) = \Phi^{(\alpha,\varsigma)}(X,a) \tag{67}$$

Pour la mesure σ_ξ on a la représentation

$$\rho_{\Delta_{\alpha,\varsigma}}^{P}(\sigma_\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\xi.p_{n+1}^{(\varsigma)}\left(\xi^{-1}\right)}.p_n^{(\varsigma)}(X) = \frac{1}{1-\xi X}\ . \tag{68}$$

Références

[1] Aïgner M. « *Combinatoria Teoria* » (théorie combinatoire), Mir, 558p, 1982 (en russe).

[2] Amice Y. « *Les nombres p-adiques* », Presses Universitaires de France, 192 p, 1975.

[3] Amice Y. « *Interpolation p-adique* », Bull. Soc. Math. France, t.92, p ; 117-180, 1964

[4] Amice Y. « *Duals .-Proceedings of the conference on p-adic analysis* », Nijmegen , p.1-15, 1975.

[5] Borevitch Z.I., Charafevitch I.P., « *Teoria tchesel* » (théorie des nombres), Nauka, 294p, 1972, (en russe)

[6] Gvichiani A.D., Agaïan S.M., Trousov A.V., « *Elementy nearchemedova analysa* » (éléments d'analyse non archimédienne), Editon Université de Moscou, 65p, 1979 (en russe).

[7] Hewitt E., Ross K. « *Abstraktny garmonitchesky analyz* » (analyse harmonique abstraite) Nauka, 654p, 1975. (en russe)

[8] Iwasawa K. « *Lectures on p-adic L-Functions* » Princeton University. Press, 144p,1972.

[9] Kalujny V.N., « *Obobchëny gaussovy koefitsenty* » (généralisation des coefficients de Gauss), Vestnik, Université de Kharkov, N°230, p73 – 82, 1982.

[10] Koblitz N., « *p-aditcheskoe tcheslo, p-aditchesky analyz, dzeta funktsii*» (nombres p-adiques, analyse p-adique, fonction dzêta) Mir, 192p, 1982 (en russe).

[11] Koblitz N. « *p-adic analysis, a short course on recent work* » London Math soc. Lect. Note , 163p, 1980.

[6] Menchikov M.V., Rebiakin A.M., Kopilov A.N., Makarov Y.N., Stetchkin B.S., « *Konbinatorny analiz. Zadatchi i ouprajneny* », (Analyse combinatoire. Problèmes et exercices), Nauka, 365p, 1982 (en russe).

[12] Monna A.F., « *Analyse non archimédienne* » Berlin, Springer, 119p, 1970.

[13] Randimbindrainibe F, Randriamitantsoa P., « *Fonctions continues sur un groupe compact ultramétrique* » Mada Eti, 19p, 2011 .

[14] Randimbindrainibe F, Randriamitantsoa P., « *Algèbre des séries formelles et des suites triangulaires convolutives* » Mada Eti, 19p, 2011 .

[15] Riordan D., « *Kombinatorny tojdestva* », (identité combinatoire), Nauka, 256p, 1982, (en russe)

[16] Robert A.M. « *A course in p-adic analysis* » Springer, 457p, 2000

[17] Roij A.C.M., « *Non archimedean functional analysis* » New York. Marcel Dekker, 404p, 1978.

[18] Trousov A.V. Sur la représentation des groupes $GL(2, Z_p)$ et $GL(2, Q_p)$ dans les espaces non archimédiens sur un corps non archimédien. –Vestnik. Université de Moscou, série mathématique, 1981 , N°1, p.55-69

[19] Van der Put Différence équations over p-adic fields.- Math. Ann, 1972,v.198, N3, p. 189-203.

[20] William A.Coppel « *Number theory. An introduction to mathematics : Part A* » Springer, 2006 , p305-340.