

Modèles mathématiques des décompositions tensorielles de base

Randriambelonoro S.V.N.¹, Randriamitantsoa P. A.², Randriamitantsoa A. A.³

Laboratoire de Recherche Télécommunication, Automatique, Signal et Images (LR-TASI)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

¹valimbavakanokoloina@gmail.com, ²rpauguste@gmail.com, ³andriau23@gmail.com

Résumé

Dans cet article seront présentés les modèles tensoriels de base : le modèle PARAFAC ou décomposition d'un tenseur en une somme de tenseurs de rang I et le modèle de Tucker qui est une forme d'analyse de composante principal d'ordre élevé. Ces décompositions trouvent leurs applications en psychométrie, traitement de signal, algèbre linéaire, vision par ordinateur, analyse numérique, neuroscience, analyse de graphe, et d'autres domaines. D'autres décompositions tensorielles, issues des modèles PARAFAC et de Tucker, incluant les modèles particuliers tel le Tucker2 et les modèles contraints, comme les modèles PARALIND, CONFAC, PARATUCK sont aussi détaillés par la suite.

Mots-clés : modèle tensoriel, PARAFAC, Tucker, modèle contraint, PARALIND, CONFAC, PARATUCK

Abstract

In this paper are presented the basic tensor models : the PARAFAC model which decomposes a tensor as a sum of rank I tensors and the Tucker model which is a higher-order form of principal component analysis. These decompositions have applications in psychometry, signal processing, linear algebra, computer vision, numerical analysis, neuroscience, graph analysis and so on. Other tensor decompositions, based on PARAFAC and Tucker models, including particular model as Tucker2 and the constrained models as PARALIND, CONFAC and PARATUCK models are detailed here also.

Keywords : tensor model, PARAFAC, Tucker, constrained model, PARALIND, CONFAC, PARATUCK

1. Introduction

Un tenseur d'ordre- N est un élément du produit tensoriel de N espaces vectoriels, chacun ayant son propre système de coordonnées. L'« ordre » d'un tenseur correspond au nombre de dimensions ou modes du tenseur. La notion de « fibre » est définie en faisant varier un indice et fixant tous les autres. On désigne par « tranche » les sections à deux dimensions d'un tenseur.

Compte tenu de la grande quantité de données dans plusieurs domaines, la structure multidimensionnelle des données peut être exploitée à travers les outils tensoriels.

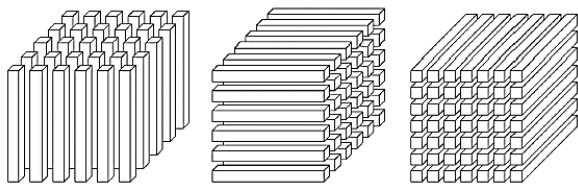


Figure1 : Fibre colonne, fibre ligne et fibre tube d'un tenseur d'ordre-3

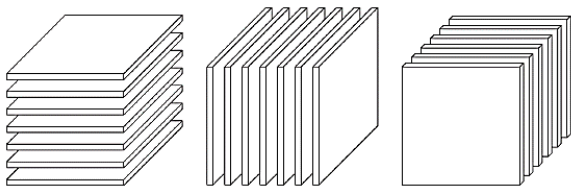


Figure2 : Tranche horizontale, tranche verticale et tranche frontale d'un tenseur d'ordre-3

2. Décomposition des tenseurs d'ordre 3

2.1. Modèle de Tucker des tenseurs d'ordre 3

Soit le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$. Sa décomposition Tucker est donnée sous-forme scalaire par l'équation :

$$x_{ijk} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \sum_{r_3=1}^{R_3} g_{r_1 r_2 r_3} a_{i r_1} b_{j r_2} c_{k r_3} \quad (01)$$

Avec $i = 1, \dots, I ; j = 1, \dots, J ; k = 1, \dots, K$.

Où $g_{r_1 r_2 r_3}$ est un élément du tenseur cœur $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{R_1 \times R_2 \times R_3}$

Et

$$A \in \mathbb{R}^{I \times R_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1R_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2R_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I1} & a_{I2} & \dots & a_{IR_1} \end{bmatrix}$$

$$B \in \mathbb{R}^{J \times R_2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1R_2} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2R_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{J1} & b_{J2} & \dots & b_{JR_2} \end{bmatrix}$$

$$C \in \mathbb{R}^{K \times R_3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1R_3} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2R_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{K1} & c_{K2} & \dots & c_{KR_3} \end{bmatrix}$$

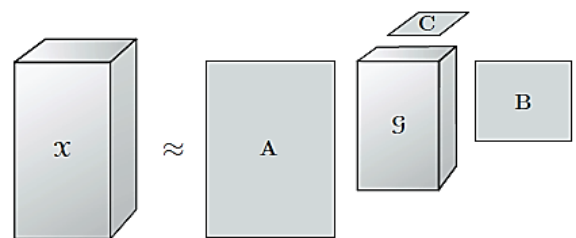


Figure3 : Modèle de Tucker d'un tenseur d'ordre-3

Sous-forme de de produits mode- n et de produits extérieurs de vecteur, on a les expressions :

$$\mathcal{X} = \mathcal{G}_{X_1} \mathbf{A}_{X_2} \mathbf{B}_{X_3} \mathbf{C} \quad (02)$$

$$\mathcal{X} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \sum_{r_3=1}^{R_3} g_{r_1 r_2 r_3} (\mathbf{A}_{:r_1} \circ \mathbf{B}_{:r_2} \circ \mathbf{C}_{:r_3})$$

Les formes matricisées et vectorisées du modèle de Tucker d'un tenseur d'ordre 3 sont donnees par les equations :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{IXJK} &= \mathbf{A} \mathbf{G}_1 (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})^T \\ \mathbf{X}_{JXKI} &= \mathbf{B} \mathbf{G}_2 (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A})^T \\ \mathbf{X}_{KXIJ} &= \mathbf{C} \mathbf{G}_3 (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T \end{aligned} \quad (03)$$

Et

$$\begin{aligned} x_{IJK} &= (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{G}_1) \\ x_{JKI} &= (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \text{vec}(\mathbf{G}_2) \\ x_{KIJ} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \text{vec}(\mathbf{G}_3) \end{aligned} \quad (04)$$

Où $\text{vec}(\mathcal{X})$ est d'ordre $L = \prod IJK$.

2.2. Modèle PARAFAC des tenseurs d'ordre 3

La décomposition PARAFAC correspond au cas particulier de la décomposition Tucker, où

$$R_1 = R_2 = \dots = R_N = R.$$

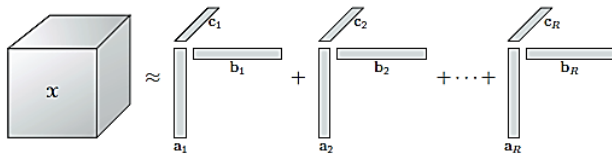


Figure4 : Modèle PARAFAC d'un tenseur d'ordre-3

Soit le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$. Sa décomposition PARAFAC sous-forme scalaire est donnée par l'équation :

$$x_{ijk} = \sum_{r=1}^R a_{ir} b_{jr} c_{kr} \quad (05)$$

Sous-forme de de produits mode- n et de produits extérieurs de vecteur, on a les expressions :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathbf{J}_{NR} \mathbf{A}_{X_1} \mathbf{B}_{X_2} \mathbf{C}_{X_3} \mathbf{C} \\ \mathcal{X} &= \sum_{r=1}^R (\mathbf{A}_{:r} \circ \mathbf{B}_{:r} \circ \mathbf{C}_{:r}) \end{aligned} \quad (06)$$

Les formes matricisées et vectorisées du modèle PARAFAC d'un tenseur d'ordre 3 sont donnees par les equations :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{IXJK} &= \mathbf{A} (\mathbf{B} \diamond \mathbf{C})^T \\ \mathbf{X}_{JXKI} &= \mathbf{B} (\mathbf{C} \diamond \mathbf{A})^T \\ \mathbf{X}_{KXIJ} &= \mathbf{C} (\mathbf{A} \diamond \mathbf{B})^T \end{aligned} \quad (07)$$

Et

$$\begin{aligned} x_{IJK} &= (\mathbf{B} \diamond \mathbf{C} \diamond \mathbf{A}) \mathbf{1}_R \\ x_{JKI} &= (\mathbf{C} \diamond \mathbf{A} \diamond \mathbf{B}) \mathbf{1}_R \\ x_{KJI} &= (\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} \diamond \mathbf{C}) \mathbf{1}_R \end{aligned} \quad (08)$$

Où $\text{vec}(\mathcal{X})$ est d'ordre $L = \prod IJK$.

3. Décomposition Tucker et PARAFAC des tenseurs d'ordre N

3.1. Modèle de Tucker des tenseurs d'ordre N

Soit le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$. Sa décomposition Tucker est définie par des équations de différentes formes.

Sous-forme scalaire :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} g_{r_1 r_2 \dots r_N} \prod_{n=1}^N a_{i_n r_n}^{(n)} \quad (09)$$

Avec $i_n = 1, \dots, I_n$ pour $n = 1, \dots, N$

Où $g_{r_1 r_2 \dots r_N}$ est un élément du tenseur cœur $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_N}$ et $a_{i_n r_n}^{(n)}$ un élément de la matrice $\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R_n}$.

Sous-forme de produits mode- n :

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \times_3 \dots \times_N \mathbf{A}^{(N)} \quad (10)$$

Sous-forme de produits extérieurs de vecteur :

$$\mathcal{X} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} g_{r_1 r_2 \dots r_N} \bigcirc_{n=1}^N \mathbf{A}^{(n)}_{:r_n}$$

Car $\sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_n r_n}^{(n)} e_{i_n}^{(I_n)} = \mathbf{A}^{(n)}_{:r_n}$ (11)

Sous-forme matricisée :

$$\mathbf{X}_{S_1 S_2} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2} = \left(\bigotimes_{n \in S_1} \mathbf{A}^{(n)} \right) \mathbf{G}_{S_1 S_2} \left(\bigotimes_{n \in S_2} \mathbf{A}^{(n)} \right)^T \quad (12)$$

Où $J_1 = \prod_{n \in S_1} I_n$ et $J_2 = \prod_{n \in S_2} I_n$.

Ainsi, pour le dépliement matriciel, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(n)} &\in \mathbb{R}^{I_n \times I_{n+1} \dots I_N I_1 \dots I_{n-1}} \\ &= \mathbf{A}^{(n)} \mathbf{G}_n \left(\mathbf{A}^{(n+1)} \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \otimes \mathbf{A}^{(N)} \otimes \mathbf{A}^{(1)} \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \otimes \mathbf{A}^{(n-1)} \right)^T \end{aligned} \quad (13)$$

Sous-forme vectorisée :

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathcal{X}) &= \text{vec}(\mathbf{X}_{(n)}) \\ &= \left(\mathbf{A}^{(n+1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{(N)} \right. \\ &\quad \left. \otimes \mathbf{A}^{(1)} \otimes \dots \right. \\ &\quad \left. \otimes \mathbf{A}^{(n)} \right) \text{vec}(\mathbf{G}_n) \end{aligned} \quad (14)$$

3.2. Modèle de Tucker - (N_1, N) des tenseurs d'ordre N

Soit le tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$.

Les modèles Tucker- (N_1, N) correspondent au cas où les $(N - N_1)$ facteurs matriciels sont des matrices identités. Si $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{I}_{I_n}$, alors $R_n = I_n$ pour $n = N_1 + 1, \dots, N$.

Donc, sous forme de produit mode- n , le modèle Tucker- (N_1, N) est donné par la relation :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}^{(1)} \times_2 \mathbf{A}^{(2)} \times_3 \dots \times_{N_1} \mathbf{A}^{(N_1)} \times_{N_1+1} \mathbf{I}_{I_{N_1+1}} \times_{N_1+2} \dots \times_N \mathbf{I}_{I_N} \\ \mathcal{X} &= \mathcal{G} \times_{n=1}^{N_1} \mathbf{A}^{(n)} \end{aligned} \quad (15)$$

D'où, sous-forme scalaire, on a :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \dots \sum_{r_{N_1}=1}^{R_{N_1}} g_{r_1 r_2 \dots r_{N_1} i_{N_1+1} \dots i_N} \prod_{n=1}^{N_1} a_{i_n r_n}^{(n)} \quad (16)$$

Pour les tenseurs d'ordre-3 $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I \times J \times K}$, on peut considérer les cas où $N = 3$ et $N_1 = 2$.

On se réfère alors au modèle appelé Tucker-2, pour lequel les facteurs matriciels sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times P} \\ \mathbf{A}^{(2)} &= \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{J \times Q} \\ \mathbf{A}^{(3)} &= \mathbf{I}_K \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi, on a la forme scalaire :

$$x_{ijk} = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q g_{pqk} a_{ip} b_{jq} \quad (18)$$

Et la forme de produit mode- n :

$$\mathbf{X} = \mathcal{G}_{\mathbf{x}_1} \mathbf{A}_{\mathbf{x}_2} \mathbf{B} \quad (19)$$

Lorsque $N = 3$ et $N_1 = 1$, $(3 - 1) = 2$ des facteurs matriciels sont des matrices identités :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)} &= \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times P} \\ \mathbf{A}^{(2)} &= \mathbf{I}_J \\ \mathbf{A}^{(3)} &= \mathbf{I}_K \end{aligned}$$

Ainsi, on a les expressions du modèle de Tucker-(1,3) :

$$x_{ijk} = \sum_{p=1}^P g_{pjk} a_{ip} \quad (20)$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{G}_{\mathbf{x}_1} \mathbf{A}$$

3.3. Modèle PARAFAC des tenseurs d'ordre N

Lorsque $R_1 = R_2 = \dots = R_N = R$, autrement dit $\mathcal{G} = \mathcal{J}_{NR}$, la décomposition tensorielle (27) s'appelle décomposition PARAFAC, pouvant

être définie par des équations de différentes formes.

Sous-forme scalaire :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{r=1}^R \prod_{n=1}^N a_{i_n r}^{(n)} \quad (21)$$

Sous-forme de produits mode- n :

$$\mathbf{X} = \mathcal{J}_{NR} \mathbf{x}_{n=1}^N \mathbf{A}^{(n)} \quad (22)$$

Sous-forme de produits extérieurs de vecteur :

$$\mathbf{X} = \sum_{r=1}^R \begin{pmatrix} N \\ \circ \\ \mathbf{A}_{:,r}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Sous-forme matricisée :

$$\mathbf{X}_{S_1 S_2} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2} = \left(\overset{\diamond}{n \in S_1} \mathbf{A}^{(n)} \right) \left(\overset{\diamond}{n \in S_2} \mathbf{A}^{(n)} \right)^T \quad (24)$$

Où $J_1 = \prod_{n \in S_1} I_n$ et $J_2 = \prod_{n \in S_2} I_n$.

Ainsi, pour le dépliement matriciel, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{(n)} &\in \mathbb{R}^{I_n \times I_{n+1} \dots I_N I_1 \dots I_{n-1}} \\ &= \mathbf{A}^{(n)} \left(\mathbf{A}^{(n+1)} \overset{\diamond}{\dots} \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(N)}} \right. \\ &\quad \left. \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(1)}} \overset{\diamond}{\dots} \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(n-1)}} \right)^T \end{aligned} \quad (25)$$

Sous-forme vectorisée :

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{X}) &= \text{vec}(\mathbf{X}_{(n)}) \\ &= \left(\mathbf{A}^{(n+1)} \overset{\diamond}{\dots} \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(N)}} \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(1)}} \right. \\ &\quad \left. \overset{\diamond}{\dots} \overset{\diamond}{\mathbf{A}^{(n)}} \right) \mathbf{1}_R \end{aligned} \quad (26)$$

4. Propriété d'unicité

4.1. Unicité des modèles PARAFAC

La décomposition PARAFAC d'un (29) $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ est essentiellement unique (ses facteurs matriciels sont uniques, sauf pour permutation de colonnes et multiplication par un scalaire), si :

$$\sum_{n=1}^N k_{\mathbf{A}^{(n)}} \geq 2R + N - 1$$

Où $k_{\mathbf{A}^{(n)}}$ désigne le rang Kruskal du facteur matriciel $\mathbf{A}^{(n)}$. En effet, ce rang Kruskal est le plus grand entier tel que tout ensemble de $k_{\mathbf{A}^{(n)}}$ colonnes de la matrice $\mathbf{A}^{(n)}$ soit linéairement indépendant.

Cette condition est suffisante pour $R > 3$, mais elle est aussi nécessaire lorsque $R = 2$ et $R = 3$, et elle ne tient pas quand $R = 1$.

L'unicité déterministe est l'unicité d'une décomposition PARAFAC particulière.

L'unicité générique est l'unicité avec probabilité certaine que les entrées des facteurs matriciels soient obtenues selon des distributions continues.

Pour un tenseur d'ordre-3 :

$$\sum_{n=1}^3 k_{\mathbf{A}^{(n)}} \geq 2R + 3 - 1 \quad (28)$$

$$k_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{C}} \geq 2R + 2$$

Si deux facteurs matriciels sont de plein rang, alors le modèle PARAFAC est essentiellement unique si le troisième facteur matriciel n'a aucune colonne proportionnelle, autrement dit, si [2] :

$$\begin{cases} k_{\mathbf{A}} = k_{\mathbf{B}} = R \\ k_{\mathbf{C}} > 1 \end{cases} \quad (34)$$

Si un facteur matriciel est de plein rang, alors le modèle PARAFAC est essentiellement unique si les deux autres facteurs matriciels satisfont aux conditions [2] :

$$\begin{cases} k_{\mathbf{A}}, k_{\mathbf{B}} \geq 2 \\ r_{\mathbf{A}} + k_{\mathbf{B}} \geq 2 \text{ ou } r_{\mathbf{B}} + k_{\mathbf{A}} \geq 2 \end{cases} \quad (30)$$

Où $k_{\mathbf{A}^{(n)}}$ désigne le rang Kruskal du facteur matriciel.

4.2. Unicité des modèles de Tucker

Les décompositions Tucker ne sont pas essentiellement uniques. Les paramètres des modèles Tucker peuvent être estimés seulement en termes de transformation non-singulières caractérisées par des matrices non-singulières $\mathbf{T}^{(n)}$ qui agissent sur les facteurs matriciels et peuvent être annulées en remplaçant le tenseur cœur par :

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}_{n=1}^N} [\mathbf{T}^{(n)}]^{-1} \quad (31)$$

L'unicité est obtenue sous quelques contraintes imposées au tenseur cœur ou aux facteurs matriciels.

Le modèle Tucker étant décrit par :

$$\mathbf{X} = \mathcal{G}_{\mathbf{x}_{n=1}^N} [\mathbf{A}^{(n)}] \quad (32)$$

En introduisant les paramètres $\mathbf{T}^{(n)}$, l'équation devient :

$$\mathbf{X} = \mathcal{G}_{\mathbf{x}_{n=1}^N} [\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{T}^{(n)}] \quad (33)$$

Comme on a la relation :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{x}_n} \mathbf{U}_{\mathbf{x}_n} \mathbf{V} = \mathbf{X}_{\mathbf{x}_n} (\mathbf{V}\mathbf{U})$$

Alors, on obtient :

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{T}^{(n)} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{A}^{(n)} \quad (35)$$

Donc en imposant que le tenseur cœur soit de la forme $\mathcal{G} \underset{X_{n=1}^N}{\times} [\mathbf{T}^{(n)}]^{-1}$, on retrouve :

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \underset{X_{n=1}^N}{\times} [\mathbf{T}^{(n)}]^{-1} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{T}^{(n)} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{A}^{(n)}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \left(\underset{X_{n=1}^N}{\times} [\mathbf{T}^{(n)}]^{-1} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{T}^{(n)} \right) \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{A}^{(n)}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{A}^{(n)} \quad (36)$$

5. Modèles PARAFAC contraints

5.1. Modèle PARALIND

Le modèle PARALIND est obtenu en remplaçant le tenseur cœur dans une décomposition Tucker par :

$$\mathcal{G} = \mathcal{J}_{NR} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \Phi^{(n)} \quad (37)$$

$\Phi^{(n)} \in \mathbb{R}^{R_n \times R}$: matrice allocation

\mathcal{G} : tenseur interaction ou tenseur contraint

Ainsi, le modèle Tucker décrit par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{G} \underset{X_1}{\times} \mathbf{A}^{(1)} \underset{X_2}{\times} \mathbf{A}^{(2)} \underset{X_3}{\times} \dots \underset{X_N}{\times} \mathbf{A}^{(N)} \quad (38)$$

devient

$$\mathcal{X} = \mathcal{J}_{NR} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \Phi^{(n)} \underset{X_{n=1}^N}{\times} \mathbf{A}^{(n)} \quad (39)$$

Comme on a la relation (73) :

$$\mathcal{X} \underset{X_n}{\times} \mathbf{U} \underset{X_n}{\times} \mathbf{V} = \mathcal{X} \underset{X_n}{\times} (\mathbf{V}\mathbf{U}) \quad (40)$$

Alors le modèle PARALIND sous-forme de produit mode- n est donné par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{J}_{NR} \underset{X_{n=1}^N}{\times} (\mathbf{A}^{(n)} \Phi^{(n)})$$

Son expression sous-forme scalaire est définie

par :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{r_1=1}^{R_1} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} g_{r_1 r_2 \dots r_N} \prod_{n=1}^N a_{i_n r_n}^{(n)} \quad (41)$$

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{r=1}^R \prod_{n=1}^N \bar{a}_{i_n r}^{(n)} \quad (42)$$

Avec

$$\bar{a}_{i_n r}^{(n)} = \sum_{r_n=1}^{R_n} a_{i_n r_n}^{(n)} \phi_{i_n r}^{(n)} \quad (43)$$

$$g_{r_1 r_2 \dots r_N} = \sum_{r=1}^R \prod_{n=1}^N \phi_{i_n r}^{(n)}$$

Ce modèle est utilisé pour les applications chimio métriques.

5.2. Modèle CONFAC

Le modèle CONFAC est obtenu en remplaçant le facteur matriciel dans une décomposition PARAFAC par : $\mathbf{A}^{(n)} \Phi^{(n)}$.

Ainsi, le modèle Tucker décrit par :

$$\mathcal{X}_{S_1 S_2} = \left(\underset{n \in S_1}{\diamond} \mathbf{A}^{(n)} \right) \left(\underset{n \in S_2}{\diamond} \mathbf{A}^{(n)} \right)^T \quad (44)$$

devient

$$\mathcal{X}_{S_1 S_2} = \left(\underset{n \in S_1}{\diamond} \mathbf{A}^{(n)} \Phi^{(n)} \right) \left(\underset{n \in S_2}{\diamond} \mathbf{A}^{(n)} \Phi^{(n)} \right)^T \quad (45)$$

$$\mathcal{X}_{S_1 S_2} = \left(\underset{n \in S_1}{\otimes} \mathbf{A}^{(n)} \right) \left(\underset{n \in S_1}{\diamond} \Phi^{(n)} \right) \left(\underset{n \in S_2}{\diamond} \Phi^{(n)} \right)^T \left(\underset{n \in S_2}{\otimes} \mathbf{A}^{(n)} \right)^T$$

$$\mathbf{X}_{S_1 S_2} = \left(\bigotimes_{n \in S_1} \mathbf{A}^{(n)} \right) \mathbf{G}_{S_1 S_2} \left(\bigotimes_{n \in S_2} \mathbf{A}^{(n)} \right)^T \quad (46)$$

$\mathbf{G}_{S_1 S_2}$: représentation matricielle du tenseur allocation ou tenseur contraint

Ce modèle est utilisé pour la conception des systèmes de communication MIMO avec allocation de ressources.

Les modèles PARALIND/CONFAC sont des cas particuliers d'une famille de modèle tensoriel, définie par une équation récursive telle que :

$$\mathbf{X}^{(p)} = \mathbf{X}^{(p-1)} \mathbf{X}_{n=1}^N \mathbf{A}^{(p,n)}, \text{ pour } p = 1, \dots, P$$

$\mathbf{A}^{(p,n)} \in \mathbb{R}^{R_{(p,n)} \times R_{(p-1,n)}}$: facteur matriciel tel que, $R_{(0,n)} = R_n$ et $R_{(P,n)} = I_n$ pour $n = 1, \dots, N$

$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{R_1 \times \dots \times R_N}$: tenseur cœur

$\mathbf{X}^{(p)} \in \mathbb{R}^{I_1 \times \dots \times I_N}$

Lorsque $\mathbf{G} = \mathbf{J}_{NR}$, $R_{(0,n)} = R_n = R$.

Les modèles PARALIND/CONFAC correspondent à deux modèles PARAFAC particulier, pour $p = 2$:

$$\mathbf{A}^{(1,n)} = \boldsymbol{\phi}^{(n)}$$

$$\mathbf{A}^{(2,n)} = \mathbf{A}^{(n)}$$

$$R_{(0,n)} = R$$

$$R_{(1,n)} = R_n$$

$$R_{(2,n)} = I_n$$

En effet, on a :

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{G} = \mathbf{J}_{NR}$$

$$\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{J}_{NR} \mathbf{X}_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)} &= \mathbf{X}^{(1)} \mathbf{X}_{n=1}^N \mathbf{A}^{(n)} \\ &= \mathbf{J}_{NR} \mathbf{X}_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}^{(n)} \mathbf{X}_{n=1}^N \mathbf{A}^{(n)} \end{aligned} \quad (47)$$

D'où

$$\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{J}_{NR} \mathbf{X}_{n=1}^N (\mathbf{A}^{(n)} \boldsymbol{\phi}^{(n)}) \quad (48)$$

5.3. Modèle PARATUCK

Le modèle PARATUCK- (N_1, N) sous-forme scalaire pour un tenseur $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ d'ordre N , avec $N > N_1$, est donné par :

$$\begin{aligned} & x_{i_1 i_2 \dots i_{N_1+1} \dots i_N} \\ &= \sum_{r_1=1}^{R_1} \dots \sum_{r_{N_1}=1}^{R_{N_1}} c_{r_1 r_2 \dots r_{N_1} i_{N_1+2} \dots i_N} \prod_{n=1}^{N_1} a_{i_n r_n}^{(n)} \phi_{i_{N_1+1} r_n}^{(n)} \end{aligned} \quad (49)$$

$a_{i_n r_n}^{(n)}$: entrée du facteur matriciel

$\mathbf{A}^{(n)} \in \mathbb{R}^{I_n \times R_n}$

$\phi_{i_{N_1+1} r_n}^{(n)}$: entrée de la matrice allocation

$\boldsymbol{\phi}^{(n)} \in \mathbb{R}^{R_n \times I_{N_1+1}}$

Le tenseur cœur \mathbf{G} est défini par :

$$\begin{aligned} & g_{r_1 r_2 \dots r_{N_1} i_{N_1+1} \dots i_N} \\ &= c_{r_1 r_2 \dots r_{N_1} i_{N_1+2} \dots i_N} \prod_{n=1}^{N_1} \phi_{i_{N_1+1} r_n}^{(n)} \end{aligned} \quad (50)$$

Si l'on pose :

$$(51)$$

$$\prod_{n=1}^{N_1} \phi_{i_{N_1+1} r_n}^{(n)} = f_{r_1 r_2 \dots r_{N_1} i_{N_1+1}}$$

Alors le tenseur cœur \mathcal{G} peut être écrit sous la forme d'un produit Hadamard entre le tenseur d'entrée $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{N_1} \times I_{N_1+2} \times \dots \times I_N}$ d'ordre $N - 1$ et le tenseur allocation $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_{N_1} \times I_{N_1+1}}$ d'ordre $N_1 + 1$, tel que :

$$\mathcal{G} = \mathcal{C} \underset{r_1 \dots r_{N_1}}{\odot} \mathcal{F} \quad (52)$$

6. Conclusion

Les tenseurs, étant des déploiements indexés par trois ou plusieurs indices, sont une généralisation des matrices. Leur structure multidimensionnelle permet une analyse plus approfondie des données dans de nombreuses disciplines. La décomposition des tenseurs d'ordre-3, illustré en premier lieu dans cet ouvrage est utilisé largement dans le domaine de la télécommunication. Les modèles PARAFAC et Tucker des tenseurs d'ordre- N ont fait l'objet de la deuxième partie. Le fait que les résultats de décompositions tensorielles soit unique ont été évoqué dans la propriété d'unicité. Enfin, les contraintes dans les calculs tensoriels sont, d'un côté, considérées comme une interaction ou une dépendance linéaire entre les facteurs PARAFAC ; de l'autre côté, comme un paramètre de conception, d'où les modèles PARAFAC contraints évoqués dans la dernière partie de l'article.

7. Bibliographie

- [1] T. G. Kolda, B. W. Bader, « *Tensor decompositions and Applications* », SIAM REVIEW, Volume 51, No3 pp 455-500, 2009.
- [2] G. Favier, A. L. F. de Almeida, « *Overview of constrained PARAFAC models* », Journal on Advances in Signal Processing, 2014, 2014 : 142, 25 pages, May 2014.
- [3] D. Nion, N. D. Sidiropoulos, « *Tensor Algebra and Multidimensional Harmonic Retrieval in Signal Processing for MIMO Radar* », IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 58, NO. 11, NOVEMBER 2010.
- [4] N. D. Sidiropoulos, « *Tensor Decomposition for Signal Processing and Machine Learning* », IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 65, NO. 13, JULY 1, 2017.
- [5] A. L. F. de Almeida, G. Favier, J. C. M. Mota, J. P. C. L. da Costa, « *Overview of Tensor Decompositions with Applications to Communications* », Signal and Images, 31 pages.

- [6] P. Comon, « *Tensor : a brief introduction* », IEEE Signal Processing Magazine, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2014, 31 (3), pp.44-53, July 2014.

