# Opérations matricielles et tensorielles

***Randriambelonoro S.V.N.*[1]*, Randriamitantsoa P. A.*[2]*, Randriamitantsoa A. A.*[3]**

Laboratoire de Recherche Télécommunication, Automatique, Signal et Images (LR-TASI)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

[1]*valimbavakanokoloina@gmail.com*, [2]*rpauguste@gmail.com*, [3]*andriau23@gmail.com*

**Résumé**

En raison de leur capacité à mieux exploiter l'aspect multidimensionnel des données et leur structure sous-jacente par rapport aux méthodes matricielles, les méthodes basées sur les tenseurs sont aujourd'hui très utilisées dans différents domaines scientifiques et d'ingénierie. A travers cet article est détaillé, dans la première partie, les outils matriciels utilisés plus tard pour la manipulation des tenseurs : à savoir le produit Kronecker, le produit Khatri-Rao, le produit Hadamard, la vectorisation, la décomposition en valeur singulière et la notion de matrice pseudo-inverse. La seconde partie se focalise sur les notions de base dans les opérations tensorielles : le dépliement matriciel d'un tenseur, la vectorisation et les produits mode-*n*.

**Mots-clés :** tenseur, Kronecker, Khatri-rao, Hadamard, vectorisation, matricisation, dépliement, produit mode-*n*

**Abstract**

Due to their capability of exploiting additional structure in comparison with matrix-based ones, tensor-based methods are by now well-established tools in many scientific and engineering domains. Through this article is detailed, in the first part, matrix tools which will be later used for tensor manipulation : the Kronecker product, the Khatri-Rao product, the Hadamard product, the vectorization, the singular value decomposition and the pseudo-inverse matrix notion. The second part focus on basic notions for tensor operations : the matrix unfolding, the vectorization of a tensor and the mode-*n* products of a tensor.

**Keywords :** tensor, Kronecker, Khatri-rao, Hadamard, vectorization, matricization, unfolding, mode-*n* product

## 1. Introduction

D'un point de vue mathématique, deux approches sont possibles, pour définir les tenseurs, en termes de tenseur produit d'espace vectoriels, ou en termes de projets multilinéaires.

Un tenseur est un arrangement multidimensionnel. Notamment, un tenseur d'ordre-$N$ est un élément du produit tensoriel de $N$ espaces vectoriels, chacun ayant son propre système de coordonnées. Un tenseur d'ordre-*3* possède trois indices, comme illustrés sur la **Figure1**. Un tenseur d'ordre-*1* est un vecteur et un tenseur d'ordre-*2* est une matrice.

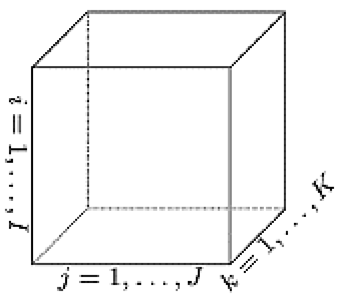


**Figure1 :** Illustration d'un tenseur d'ordre-*3*

## 2. Opération matricielle

### *2.1. Décomposition en valeur singulière*

Toute matrice carrée $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{nxn}}$ peut se décomposer sous la forme :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\Sigma\boldsymbol{V}^{\boldsymbol{T}} \qquad (01)$$

où $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont des matrices unitaires et $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$ est une matrice diagonale de la forme :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (02)$$

Avec $\Sigma_1 = \boldsymbol{diag}(\boldsymbol{\sigma_1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma_k})$

*Théorème* : les colonnes $u_i$ de $\boldsymbol{U}$ sont les vecteurs propres $x_i$ de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$ et les colonnes $v_i$ de $\boldsymbol{V}$ sont les vecteurs propres $y_i$ de $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{A}$ à constante près.

Autrement dit, $u_i = \mu'_i x_i$ et $v_i = \mu_i y_i$.

Ainsi, par la décomposition en valeur singulière, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}v_i &= \sigma_i u_i \\ \boldsymbol{A}\mu_i y_i &= \sigma_i \mu'_i x_i \end{aligned} \qquad (03)$$

On peut alors choisir $\mu'_i$ et $\mu_i$ de façon, par exemple, à minimiser le nombre de signe négatifs dans les matrices $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$.

Les valeurs singulières de la matrice $\mathbf{A}$ de rang $k$, notée $\boldsymbol{\sigma_i}(\boldsymbol{A})$ sont les racines carrées non nulles des valeurs propres de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ et $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}$ :

$$\boldsymbol{\sigma_i}(\boldsymbol{A}) = \sqrt{\boldsymbol{\lambda_i}[\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}]} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda_i}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}]} \qquad (04)$$

$\boldsymbol{\lambda_i}$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du produit matriciel $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ et $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{\sigma_i}(\boldsymbol{A})$ est la $i^{ème}$ valeur singulière de la matrice $\boldsymbol{A}$.

### *2.2. Produit Kronecker*

Le produit Kronecker d'une matrice $\mathbf{A} \epsilon \mathbb{R}^{IxJ}$ avec une matrice $\mathbf{B} \epsilon \mathbb{R}^{KxL}$, noté par $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, donne une matrice $\mathbf{C} \epsilon \mathbb{R}^{IKxJL}$, définie par :

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & & a_{1J}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2J}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{I1}\boldsymbol{B} & a_{I2}\boldsymbol{B} & & a_{IJ}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \quad (05)$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = [a_1 \otimes b_1 \quad a_1 \otimes b_2 \quad \dots \quad a_J \otimes b_{L-1} \quad a_J \otimes b_L] \quad (06)$$

### 2.3. Produit Khatri-Rao

Le produit Khatri-Rao d'une matrice $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ avec une matrice $\mathbf{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}J}$, noté par $\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B}$, donne une matrice $\mathbf{C}\epsilon\mathbb{R}^{IK\mathrm{x}J}$, définie par :

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B} = [a_1 \otimes b_1 \quad a_2 \otimes b_2 \quad \dots \quad a_{J-1} \otimes b_{J-1} \quad a_J \otimes b_J] \quad (07)$$

Il s'agit du produit Kronecker entre chaque colonne.

Si **a** et **b** sont des vecteurs, alors on a la relation :

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \diamond \boldsymbol{b} \quad (08)$$

### 2.4. Produit Hadamard

Le produit Hadamard deux matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, noté par $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$, donne une matrice $\mathbf{C}\epsilon\mathbb{R}^{IK\mathrm{x}J}$, définie par : (09)

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & & a_{1J}b_{1J} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2J}b_{2J} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{I1}b_{I1} & a_{I2}b_{I2} & & a_{IJ}b_{IJ} \end{bmatrix}$$

Autrement dit, le produit Hadamard est le produit élément par élément entre les deux matrices.

### 2.5. Opérateur vec

L'opérateur $vec$ crée un vecteur colonne à partir d'une matrice $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ en empilant les vecteurs colonnes de la matrice $\boldsymbol{A} = [a_1 a_2 \dots a_J]$ les uns sur les autres :

$$vec(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_J \end{bmatrix} \epsilon\mathbb{R}^{IJ} \quad (10)$$

### 2.6. Matrice pseudo-inverse

La 1-inverse de la matrice $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ est une matrice notée $\boldsymbol{A}^{-}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}I}$ telle que :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \quad (11)$$

si $I = J$, alors :

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} \quad (12)$$

La pseudo inverse Moore Penrose de la matrice $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ est la matrice 1-inverse $\boldsymbol{A}^{-}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}I}$, qui de plus, satisfait aux conditions :

$$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}^{-}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-})^{T} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} \quad (13)$$

$$(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})^{T} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$$

La pseudo inverse Moore Penrose de la matrice $\boldsymbol{A}$ est notée par $\boldsymbol{A}^{\dagger}$.

### 2.7. Propriétés

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$.

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_K)(\boldsymbol{I}_J \otimes \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{I}_I \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I}_L) \quad (14)$$

*Propriété 1 : associativité*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$ et $\boldsymbol{C}\epsilon\mathbb{R}^{M\mathrm{x}N}$.

$$\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} \quad (15)$$

*Propriété 2 : distributivité (à gauche et à droite) sur l'addition matricielle ordinaire*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$, $\boldsymbol{C}\epsilon\mathbb{R}^{M\mathrm{x}N}$ et $\boldsymbol{D}\epsilon\mathbb{R}^{P\mathrm{x}Q}$.

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \otimes (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D} \quad (16)$$

*Propriété 3 : compatibilité avec la multiplication matricielle ordinaire*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}K}$, $\boldsymbol{C}\epsilon\mathbb{R}^{L\mathrm{x}M}$ et $\boldsymbol{D}\epsilon\mathbb{R}^{M\mathrm{x}N}$.

$$\boldsymbol{AB} \otimes \boldsymbol{CD} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{D})$$

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger} \otimes \boldsymbol{B}^{\dagger} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B} \diamond \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B}) \diamond \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \diamond (\boldsymbol{B} \diamond \boldsymbol{C})$$

$$(\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B})^{T}(\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B}$$

$$(\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B})^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{B})^{\dagger}(\boldsymbol{A} \diamond \boldsymbol{B})^{T}$$

*Propriété 4 : compatibilité avec l'inversion matricielle ordinaire*

Soit les matrices inversibles $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}I}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}J}$.

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{1}} \otimes \boldsymbol{B}^{-\boldsymbol{1}} \quad (18)$$

*Propriété 5 : multiplication avec un scalaire*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$.

$$(\boldsymbol{\alpha A}) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{\alpha B}) = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \quad (19)$$

*Propriété 6 : transposée*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$.

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \otimes \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}} \quad (20)$$

*Propriété 7 : complexe conjuguée*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$.

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{*} = \boldsymbol{A}^{*} \otimes \boldsymbol{B}^{*} \quad (21)$$

*Propriété 8 : déterminant*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}I}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}J}$.

$$|\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|^{\boldsymbol{J}}|\boldsymbol{B}|^{\boldsymbol{I}} \quad (22)$$

*Propriété 9 : trace*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}I}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{x}J}$.

$$tr(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A})$$
$$tr(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A})\, tr(\boldsymbol{B}) \quad (23)$$

*Propriété 10 : rang*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{x}L}$.

$$rang(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = rang(\boldsymbol{A})\, rang(\boldsymbol{B}) \quad (24)$$

*Propriété 11 : identité*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\mathrm{x}J}$ et $\boldsymbol{I_n}$ la matrice identité de dimension $n$ x $n$.

$$\boldsymbol{I_n} \otimes \boldsymbol{A} = diag[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \dots, \boldsymbol{A}] \quad (25)$$

*Propriété 12 : vectorisation*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}J}$ et $\boldsymbol{X}\epsilon\mathbb{R}^{\text{KxI}}$.

$$vec(\boldsymbol{AXB}) = (\boldsymbol{B^T} \otimes \boldsymbol{A})vec(\boldsymbol{X}) \quad (26)$$

Où :

$$\boldsymbol{B} = [b_1 b_2 \dots b_n]$$

Et,

$$\boldsymbol{X} = [x_1 x_2 \dots x_m]$$

*Propriété 13 : vectorisation*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\text{x}K}$.

$$vec(\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{I_I} \otimes \boldsymbol{A})vec(\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}^T \otimes \boldsymbol{I_I})vec(\boldsymbol{A}) \quad (27)$$

*Propriété 14 : vectorisation*

Soit les matrices $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}J}$, $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\text{x}J}$.

$$vec(\boldsymbol{BA}^T) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{I_K})vec(\boldsymbol{B}) \quad (28)$$

Le produit Kronecker peut être utilisé pour représenter des équations linéaires dans lesquelles les inconnus sont des matrices.

Par exemple, les équations :

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \text{ ou } (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{A})vec(\boldsymbol{X}) = vec(\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{C} \text{ ou } (\boldsymbol{B}^T \otimes \boldsymbol{A})vec(\boldsymbol{X}) = vec(\boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{XB} = \boldsymbol{C} \text{ ou } [(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}^T \otimes \boldsymbol{I})]\, vec(\boldsymbol{X}) = vec(\boldsymbol{C}) \quad (29)$$

$$\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{YB} = \boldsymbol{C} \text{ ou } (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{A})vec(\boldsymbol{X}) + (\boldsymbol{B}^T \otimes \boldsymbol{I})vec(\boldsymbol{Y}) = vec(\boldsymbol{C})$$

*Propriété 15 : structure*

Si $A$ et $B$ sont des matrices non-singulières, alors $A \otimes B$ est une matrice non-singulière.

Si $A$ et $B$ sont des matrices carrées triangulaires, alors $A \otimes B$ est une matrice triangulaire.

Si $A$ et $B$ sont des matrices symétriques, alors $A \otimes B$ est une matrice symétrique.

Si $A$ et $B$ sont des matrices définies positives, alors $A \otimes B$ est une matrice définie positive.

Si $A$ et $B$ sont des matrices orthogonales, alors $A \otimes B$ est une matrice orthogonale.

*Propriété 16 : factorisation LU*

Soit les matrices carrées inversibles $\mathbf{A}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}I}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\text{x}J}$ , telles qu'elles peuvent être exprimées par la factorisation LU de sorte que :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_{\text{A}}^T\, \boldsymbol{L}_{\text{A}} \boldsymbol{U}_{\text{A}}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_B^T\, \boldsymbol{L}_B \boldsymbol{U}_B \quad (30)$$

Où $\boldsymbol{U}_{\text{A}}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}I}$ , $\boldsymbol{U}_B\mathbb{R}^{J\text{x}J}$, $\boldsymbol{L}_{\text{A}}\epsilon\mathbb{R}^{I\text{x}I}$ et $\boldsymbol{L}_B\mathbb{R}^{J\text{x}J}$ sont des matrices carrées triangulaires supérieures et inférieures, et $\boldsymbol{P}$ est une matrice permutation.

Alors on a :

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{\text{A}}^T\, \boldsymbol{L}_{\text{A}} \boldsymbol{U}_{\text{A}})^T \otimes (\boldsymbol{P}_B^T\, \boldsymbol{L}_B \boldsymbol{U}_B)^T$$
$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_{\text{A}} \otimes \boldsymbol{P}_B)^T\, (\boldsymbol{L}_{\text{A}} \otimes \boldsymbol{L}_B)(\boldsymbol{U}_{\text{A}} \otimes \boldsymbol{U}_B) \quad (31)$$

*Propriété 17 : factorisation Cholesky*

Soit les matrices carrées définies positives $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$, ayant comme factorisation Cholesky :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}^{T} \qquad (32)$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}_{B}\boldsymbol{L}_{B}^{T}$$

Où $\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$ et $\boldsymbol{L}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{J\mathrm{xJ}}$ sont des matrices carrées triangulaires inférieures.

Alors on a :

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}^{T})\otimes(\boldsymbol{L}_{B}\boldsymbol{L}_{B}^{T}) \qquad (33)$$
$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{L}_{B})(\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{L}_{B})^{T}$$

*Propriété 18 : factorisation QR*

Soit les matrices à colonnes linéairement indépendantes $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{IxJ}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{xL}}$, ayant comme factorisation QR :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}} \qquad (34)$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}_{B}\boldsymbol{R}_{B}$$

Où $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$ et $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{L\mathrm{xL}}$ sont des matrices carrées orthogonales et $\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{IxJ}$ et $\boldsymbol{R}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{xL}}$ sont des matrices triangulaires supérieures.

Ainsi, le produit Kronecker devient :

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}})\otimes(\boldsymbol{Q}_{B}\boldsymbol{R}_{B}) \qquad (35)$$
$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{Q}_{B})(\boldsymbol{R}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{R}_{B})$$

*Propriété 19 : décomposition Schur*

Soit les matrices carrées définies positives $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$, ayant comme factorisation Schur :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}^{T} \qquad (36)$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_{B}\boldsymbol{T}_{B}\boldsymbol{U}_{B}^{T}$$

Où $\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$ et $\boldsymbol{U}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$ sont des matrices unitaires, et $\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$ et $\boldsymbol{T}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$ sont des matrices triangulaires.

Alors on a :

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}^{T})\otimes(\boldsymbol{U}_{B}\boldsymbol{T}_{B}\boldsymbol{U}_{B}^{T})$$
$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{U}_{B})(\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{T}_{B})(\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\otimes\boldsymbol{U}_{B})^{T} \qquad (37)$$

*Propriété 20 : décomposition en valeur singulière*

Soit les matrices $\boldsymbol{A}\epsilon\mathbb{R}^{IxJ}$ et $\boldsymbol{B}\epsilon\mathbb{R}^{K\mathrm{xL}}$, ayant comme décomposition en valeur singulière :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\Sigma_{\mathrm{A}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}^{T} \qquad (38)$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_{B}\Sigma_{B}\boldsymbol{V}_{B}^{T}$$

Où $\boldsymbol{U}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{IxI}$, $\boldsymbol{V}_{\mathrm{A}}\epsilon\mathbb{R}^{JxJ}$, $\boldsymbol{U}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{KxK}$ et $\boldsymbol{V}_{B}\epsilon\mathbb{R}^{L\mathrm{xL}}$ sont des matrices carrées unitaires, $\Sigma_{\mathrm{A}}$ et $\Sigma_{B}$ sont des matrices diagonales contenant respectivement les valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{B}$.

Ainsi, à l'aide de la décomposition en valeur singulière, le produit Kronecker s'écrit comme :

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{U}_A \Sigma_A \boldsymbol{V}_A^T \otimes \boldsymbol{U}_B \Sigma_B \boldsymbol{V}_B^T)$$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{U}_A \otimes \boldsymbol{U}_B)(\Sigma_A \otimes \Sigma_B)(\boldsymbol{V}_A \otimes \boldsymbol{V}_B)^T \quad (39)$$

## 3. Opération tensorielle

### *3.1. Norme d'un tenseur*

Soit un tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} I_N}$. Sa norme est donnée par :

$$\|\boldsymbol{\mathcal{X}}\| = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} {x^2}_{i_1 i_2 \dots i_N}} \quad (40)$$

### *3.2. Produit interne*

Soit deux tenseurs : $\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} I_N}$.

Leur produit interne est défini par : (41)

$$<\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}> = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \dots i_N} y_{i_1 i_2 \dots i_N}$$

Il s'agit de la somme du produit des entrées.

### *3.3. Tenseur de rang 1*

Un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} I_N}$ d'ordre $N$ est dit tenseur de rang 1 s'il peut être écrit sous-forme de produit externe de $N$ vecteurs :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \dots \circ \mathbf{a}^{(N)} \quad (42)$$

Chaque élément du tenseur est le produit externe des vecteurs éléments correspondants :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} = {a_{i_1}}^{(1)} {a_{i_2}}^{(2)} \dots {a_{i_N}}^{(N)} \quad (43)$$

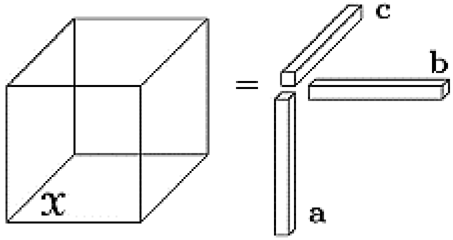


**Figure2 :** Illustration d'un tenseur d'ordre-*3*

### *3.4. Tenseur symétrique*

Un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} I_N}$ est dit hypercubique si chaque mode est de même dimension : $I_1 = I_2 = \dots = I_N = I$ et un tenseur hypercubique est dit symétrique si chaque élément du tenseur reste constant pour n'importe quelle permutation d'indice.

Ainsi, pour un tenseur d'ordre 3, on a :

$$x_{ijk} = x_{ikj} = x_{jik} = x_{jki} = x_{kij} \quad (44)$$

Soit le tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{3\mathrm{x}3\mathrm{x}3}$.

Il s'agit d'un tenseur cubique puisque $I_1 = I_2 = I_3 = 3$.

$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est symétrique puisque chaque élément du tenseur reste constant pour n'importe quelle permutation d'indice.

### *3.5. Tenseur diagonal*

Un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \dots \mathrm{x} I_N}$ est dit diagonal si tous les éléments, sauf ceux de la diagonale sont 0 :

$$x_{i_1 i_2 \dots i_N} \neq 0 \text{ pour } i_1 = i_2 = \dots = i_N \quad (45)$$

### *3.6. Matricisation ou dépliement matriciel*

Le dépliement matriciel d'un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \epsilon \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N}$ d'ordre $N$ consiste à partitionner l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ en deux sous-ensembles $S_1$ et $S_2$ constitués de $p$ et $N-p$ indices chacun, où $p \, \epsilon \, [1, N-1]$ . Les matrices dépliées seront d'ordre $J_1$ et $J_2$ telles que :

$$J_1 = \prod_{n \epsilon S_1} I_n \qquad (46)$$

$$J_2 = \prod_{n \epsilon S_2} I_n$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{X}_{S_1,S_2} \epsilon \, \mathbb{R}^{J_1 \mathrm{x} J_2}$$

En particulier, lorsque $S_1 = \{n\}$ et $S_2 = \{n+1, \ldots, N, 1, \ldots, n-1\}$ , le dépliement s'appelle dépliement matriciel mode- $n$, noté $\boldsymbol{X}_{(n)} \, \epsilon \, \mathbb{R}^{I_n \mathrm{x} I_{n+1} \ldots I_N I_1 \ldots I_{n-1}}$, tel que :

$$\boldsymbol{X}_{(n)} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \ldots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \ldots i_N} \; e_{i_n}^{(I_n)} (\otimes_{n \epsilon S_2} e_{i_n}^{(I_n)})^T \qquad (47)$$

Où

$\boldsymbol{X}_{(n)} =$

$\boldsymbol{X}_{I_n \mathrm{x} I_{n+1} \ldots I_N I_1 \ldots I_{n-1}} \epsilon \, \mathbb{R}^{I_n \mathrm{x} I_{n+1} \ldots I_N I_1 \ldots I_{n-1}}$

${e_{i_n}}^{(I_n)}, i_n = 1, \ldots, I_n; n = 1, \ldots, N$ : base canonique.

Soit le tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \epsilon \mathbb{R}^{2\mathrm{x}2\mathrm{x}2}$, dont les tranches frontales sont définies par :

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Les six (6) dépliements mode-$n$ sont :

$$\boldsymbol{X}_{I\mathrm{x}JK} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{I\mathrm{x}KJ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{J\mathrm{x}KI} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{J\mathrm{x}IK} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{K\mathrm{x}IJ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_{K\mathrm{x}JI} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

### *3.7. Vectorisation*

La vectorisation d'un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \epsilon \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N}$ consiste en une combinaison des $N$ modes en une seule, d'ordre $J = \prod_{n=1}^{N} I_n$.

$$vec(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \ldots \sum_{i_N=1}^{I_N} x_{i_1 i_2 \ldots i_N} \otimes {e_{i_n}}^{(I_n)} \qquad (48)$$

Soit le tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \epsilon \mathbb{R}^{2\mathrm{x}4\mathrm{x}2}$, dont les tranches frontales sont définies par :

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 13 & 15 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

On sait que la vectorisation de ce tenseur consiste en une combinaison des 3 modes en une seule, d'ordre $L = \prod_{n=1}^{3} I_n$.

Ainsi, il existe six (6) résultats de vectorisation du tenseur, de dimension respective :

$L = IJK$ ; $L = IKJ$ ; $L = JKI$ ; $L = JIK$ ; $L = KIJ$ et $L = KJI$

D'où, on a :

$$x_{IJK} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \\ 7 \\ 15 \\ 2 \\ 10 \\ 4 \\ 12 \\ 6 \\ 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} ; \; x_{IKJ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix} ; \ldots$$

### *3.8. Produit matriciel mode- $n$*

Le produit mode- $n$ d'un tenseur consiste à faire la multiplication d'un tenseur par une matrice ou un vecteur en mode $n$.

Le produit matriciel en mode $n$ d'un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N}$ avec une matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{J \mathrm{x} I_n}$ est noté par $\boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_n\, \mathbf{U}$ , de dimension $I_1 \mathrm{x}\, I_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_{n-1} \,\mathrm{x}\, J \mathrm{x}\, I_{n+1} \,\mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_N$, soit :

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{I_1 \mathrm{x}\, I_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_{n-1} \,\mathrm{x}\, J \mathrm{x}\, I_{n+1} \,\mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_N} = (\boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_n\, \mathbf{U})_{i_1 \ldots i_{n-1} j i_{n+1} \ldots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \ldots i_N} u_{j i_n} \quad (49)$$

En d'autres termes, chaque mode- $n$ fiber est multiplié par la matrice $\mathbf{U}$.

A l'aide du dépliement matriciel mode- $n$, on a la relation :

$$\boldsymbol{Y}_{(n)} = \mathbf{U}\boldsymbol{X}_{(n)} \quad (50)$$

Pour des modes $m$ et $n$ différents, on a la relation :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_m \mathbf{U} \,\mathrm{x}_n \mathbf{V} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_n \mathbf{V} \,\mathrm{x}_m \mathbf{U}$$

Plus généralement, le résultat est le même quel que soit l'ordre du produit matriciel mode- $n$ lorsque toutes les indices différents.

Lorsque $n = m$, alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_n\, \mathbf{U} \,\mathrm{x}_n \mathbf{V} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_n\, (\mathbf{VU}) \quad (51)$$

Soit le tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{4\mathrm{x}3\mathrm{x}2}$, dont les tranches frontales sont définies par :

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 18 \\ 4 & 12 & 20 \\ 6 & 14 & 22 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 17 \\ 3 & 11 & 19 \\ 5 & 13 & 21 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

Et soit la matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{2\mathrm{x}4}$, telle que :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

On a :

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{2\mathrm{x}3\mathrm{x}2} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \,\mathrm{x}_1\, \mathbf{U}$$

$$\boldsymbol{Y_1} = \begin{bmatrix} 100 & 228 & 356 \\ 120 & 280 & 440 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y_2} = \begin{bmatrix} 84 & 212 & 340 \\ 100 & 260 & 420 \end{bmatrix}$$

En utilisant la formule du dépliement matriciel, on retrouve :

$$\boldsymbol{Y}_{(1)} = \mathbf{U}\boldsymbol{X}_{(1)}$$

$$\boldsymbol{Y}_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 & 9 & 18 & 17 \\ 4 & 3 & 12 & 11 & 20 & 19 \\ 6 & 5 & 14 & 13 & 22 & 21 \\ 8 & 7 & 16 & 15 & 24 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{(1)} = \begin{bmatrix} 100 & 84 & 228 & 212 & 356 & 340 \\ 120 & 100 & 280 & 260 & 440 & 420 \end{bmatrix}$$

### *3.9. Produit vectoriel mode- $n$*

Le produit vectoriel en mode $n$ d'un tenseur $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N}$ avec un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{I_n}$ est noté par $\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{v}$, de dimension $I_1 \mathrm{x}\, I_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_{n-1} \,\mathrm{x}\, I_{n+1} \,\mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, I_N$ (d'ordre $N-1$) soit :

$$(\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_{\boldsymbol{n}}\, \mathbf{v})_{i_1 \ldots i_{n-1} i_{n+1} \ldots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} x_{i_1 i_2 \ldots i_N} v_{i_n} \qquad (52)$$

Pour deux modes différents $m < n$, on a la relation :

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_m \mathbf{u}\, \bar{\mathrm{x}}_n \mathbf{v} = (\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_m \mathbf{u})\, \bar{\mathrm{x}}_n \mathbf{v} = (\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_n \mathbf{v})\, \bar{\mathrm{x}}_m \mathbf{u} \qquad (53)$$

Soit le tenseur : $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{4\mathrm{x}3\mathrm{x}2}$, dont les tranches frontales sont définies par :

$$\boldsymbol{X_1} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 18 \\ 4 & 12 & 20 \\ 6 & 14 & 22 \\ 8 & 16 & 24 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 17 \\ 3 & 11 & 19 \\ 5 & 13 & 21 \\ 7 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

Et soit le vecteur $\mathbf{v}$, telle que :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Donc,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\, \bar{\mathrm{x}}_{\mathbf{2}}\, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 152 & 140 \\ 176 & 164 \\ 220 & 188 \\ 224 & 212 \end{bmatrix}$$

### *3.10. Produit tensoriel Hadamard*

Soit deux tenseurs $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} I_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N \mathrm{x} J_1 \mathrm{x} J_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} J_n}$ et $\boldsymbol{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{I_1 \mathrm{x} I_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} I_N \mathrm{x} J_{n+1} \mathrm{x} J_{n+2} \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} J_p}$.

Le produit tensoriel Hadamard de $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ sur leur mode commun est défini par :

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \odot \boldsymbol{\mathcal{Y}} \qquad (54)$$

C'est-à-dire :

$$z_{i_1 i_2 \ldots i_N j_1 j_2 \ldots j_p} = x_{i_1 i_2 \ldots i_N j_1 j_2 \ldots j_n} y_{i_1 i_2 \ldots i_N j_{n+1} j_{n+2} \ldots j_p}$$

Le produit tensoriel Hadamard peut être calculé par le produit matriciel Hadamard.

## 4. Conclusion

Pour conclure, nous avons vu les bases matricielles et tensorielles dans cet article. Le produit Kronecker, qui constitue l'opérateur élémentaire dans les calculs tensoriels d'ordre élevés, a conduit à la définition d'autres produits matriciels. Plusieurs propriétés de ces opérations matricielles ont été énumérées pour mieux les utiliser. Les tenseurs, qui sont des généralisations des vecteurs et des matrices, offre une large possibilité d'exploitation des données à travers leur structure multidimensionnelle grâce à l'utilisation des opérations de base tensorielle.

## 5. Bibliographie


[1] T. G. Kolda, B. W. Bader, « *Tensor decompositions and Applications* », SIAM REVIEW, Volume 51, No3 pp 455-500, 2009.

[2] G. Favier, A. L. F. de Almeida, « *Overview of constrained PARAFAC models* », Journal on Advances in Signal Processing, 2014, 2014 : 142, 25 pages, May 2014.

[3] H. Zhang, F. Ding, « *On the Kronecker Product and Their Applications* », Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics, 8 pages, Volume 2013, Article ID 296185.

[4] « *Matrix calculus and Kronecker product - A Practical Approach to Linear and Multilinear Algebra* », World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 82 pages.

[5] A. N. Langville, W. J. Stewart, « *The Kronecker product and stochastic automata networks* », Journal of Computational and Applied Mathematics 167 (2004) 429–447.

[6] K. Schacke, « *On the Kronecker Product* », 35 pages, August 1, 2013.

[7] P. A. Randriamitantsoa, « *Eléments de calcul matriciel* », Master2 ESPA, Parcours Télécommunication, Automatique, Signal et Images, 16 pages, 2016.