

## Modélisation du canal MIMO dans un système radar

*Randriambelonoro S.V.N.<sup>1</sup>, Randriamitantsoa P. A.<sup>2</sup>, Randriamitantsoa A. A.<sup>3</sup>*

Laboratoire de Recherche Télécommunication, Automatique, Signal et Images (LR-TASI)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

*<sup>1</sup>valimbavakanokoloina@gmail.com, <sup>2</sup>rpauguste@gmail.com, <sup>3</sup>andriau23@gmail.com*

### Résumé

Le déploiement de plusieurs antennes tant à l'émission qu'à la réception dans la technologie MIMO peut améliorer le niveau du signal reçu. Dernièrement, l'innovation apportée dans le domaine du radar consiste à intégrer le principe du MIMO. Particulièrement, la diversité spatiale offerte par cette technique y est largement exploitée. D'autre part, un canal MIMO possède aussi d'autres aspects, tels sa capacité, son ouverture virtuelle, les gains en transmission, et différents types de codage possibles. A travers cet article, nous allons exposer la modélisation de la transmission dans un canal radio, les propriétés du canal MIMO ainsi que ses avantages, et enfin les types de codage utilisés en MIMO.

**Mots-clés :** MIMO, radar, diversité, capacité, résolution, modélisation

### Abstract

Deployment of multiple antennas at the transmitter as at the receiver in MIMO technology may increase the level of the received signal. Lately, innovation in field of radar was the integration of the principle of MIMO. Especially, spatial diversity is widely exploited. On the other hand, a MIMO channel also has other aspects, such as its capacity, its virtual aperture, the gains it offer and many possible ways of coding. Through this article, we will see the modelisation of the transmission in a radio electrical channel, the properties of a MIMO channel with its advantages, and at last the several ways of coding in MIMO technology.

**Keywords :** MIMO, radar, diversity, capacity, resolution, modelisation

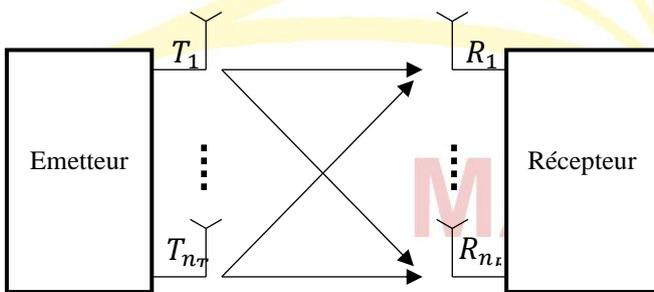
### 1. Introduction

Le principe du système MIMO est basé sur le fait d'utiliser plusieurs antennes en émission et en réception pour disposer d'une dimension

supplémentaire comme support de l'information : la dimension spatiale. D'un côté, les antennes d'émission créent des sous canaux dans le canal de propagation MIMO; de l'autre côté, le récepteur équipé lui aussi de plusieurs antennes, dispose de plusieurs répliques distordues selon le chemin spécifique. Il est possible de combattre l'effet néfaste du bruit puisque, parmi les différentes versions du signal, certaines sont moins assujetties aux bruits que d'autres. Ainsi, il suffit de choisir à la réception le signal qui est le plus exploitable.

## 2. Concept MIMO

Un canal MIMO, est défini par un canal qui relie  $n_T$  antennes émettrices avec  $n_R$  antennes réceptrices représenté mathématiquement par une matrice complexe  $H$  traduisant la dimension spatiale.



**Figure 1 :** Modèle de canal MIMO à  $n_T$  antennes d'émission et  $n_R$  antennes de réception

La matrice  $H$  du canal MIMO, est définie par [1] :

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n_T} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{2n_T} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R1} & h_{n_R2} & \dots & h_{n_Rn_T} \end{pmatrix} \quad (01)$$

Où,  $h_{kl} = \alpha_{kl} e^{j\phi_{kl}}$  tel  $1 \leq k \leq n_R$ ;  $1 \leq l \leq n_T$  que représente le gain complexe du lien entre le  $l^{\text{ème}}$  antenne émettrice vers la  $k^{\text{ème}}$  antenne réceptrice.

La relation entre les vecteurs d'entrée  $X$  et les vecteurs de sortie  $Y$  du système MIMO est exprimée par :

$$Y = HX + B \quad (02)$$

Lors d'une transmission MIMO, le signal reçu sur l'antenne  $R_k$  est exprimé par :

$$y_k = \sum_{l=1}^{n_T} h_{kl} x_l + b_k ; k = 1, \dots, n_R \quad (03)$$

Où,  $x_l$  et  $b_k$  représentent respectivement le signal délivré par la  $l^{\text{ème}}$  antenne d'émission et le bruit qui affecte la  $k^{\text{ème}}$  antenne de réception.

## 3. Modélisation de la transmission dans un canal radio électrique

### 3.1. Transmission assujettie aux phénomènes à petite échelle

Le niveau du signal transmis se dégrade lorsque le signal est soumis à un évanouissement ou fading puisque les différents phénomènes à petite échelle modifient les caractéristiques du canal radio.

Pour un Système Linéaire et Invariant dans le Temps ou SLIT, l'impulsion ou distribution de Dirac est utilisée comme entrée de référence et la sortie correspondante est appelée réponse impulsionnelle du canal.

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \text{ si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1 \end{cases} \quad (04)$$

La sortie  $y(t)$  du canal de transmission correspondant à une entrée  $x(t)$  est obtenue à partir du produit de convolution de  $x(t)$  et de sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ .

La sortie  $y(t)$  d'un SLIT excité par une entrée  $x(t)$  est définie par :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (05)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (06)$$

Un Système Linéaire et Variable dans le Temps ou SLVT est défini par un système dont les caractéristiques évoluent au fil du temps.

La sortie  $y(t)$  du canal radioélectrique face à une entrée  $x(t)$  et altérée par un bruit  $n(t)$  est exprimée par [2]:

$$y(t) = x(t) * h(t, \tau) \quad (07)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(t, \tau)d\tau + n(t) \quad (08)$$

### 3.2. Transmission assujettie aux phénomènes à grande échelle

L'équation de Friis ou équation des télécommunications est définie par une équation utilisée pour prédire le niveau du signal quand l'émetteur et le récepteur sont en visibilité directe [3].

$$P_r(d) = P_e G_e G_r \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (09)$$

L'affaiblissement de propagation ou *Path Loss* à une distance  $d$  mesure la différence entre la puissance émise et celle reçue à cette distance. Elle est exprimée en *dB* et est donnée par [4] :

$$PL(d)_{dB} = 20 \log \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right) \quad (10)$$

Le *Path Loss exponent* ou *exposant de perte de trajet* noté par  $n$  est défini par une quantité empirique qui dépend essentiellement du type d'environnement et pour lequel les variations lentes de l'amplitude du signal décroissent proportionnellement à  $d^n$ .

Sachant que l'affaiblissement moyen à une distance de référence  $d_0$  est égal à  $\overline{PL}(d_0)$ , alors l'affaiblissement moyen exprimé en *dB*, prédit par le modèle est défini par :

$$\overline{PL}(d)_{dB} = \overline{PL}(d_0)_{dB} + 10n \log \left( \frac{d}{d_0} \right) \quad (11)$$

Pour le modèle log normale, l'affaiblissement exprimé en  $dB$  prédit par le modèle est exprimé par :

$$PL(d) = \overline{PL}(d) + X_\sigma \quad (12)$$

$$PL(d) = \overline{PL}(d_0) + 10n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_\sigma \quad (13)$$

#### 4. Propriétés d'un canal MIMO

Un système MIMO tire profit de l'environnement en utilisant les différents canaux de propagation pour augmenter la capacité de transmission. C'est l'intérêt d'obtenir des signaux indépendants sur les antennes.

##### 4.1. Entropie d'un système MIMO

L'entropie d'un vecteur aléatoire  $X$  est maximale si  $X$  est un vecteur gaussien à symétrie circulaire. Autrement dit,  $K_{\hat{X}}$  la matrice de covariance de  $\hat{X}$  est de la forme :

$$K_{\hat{X}} = \frac{1}{2} \hat{Q} \quad (14)$$

Soit  $X \in \mathbb{C}^n$ , un vecteur gaussien à symétrie circulaire  $X \sim \mathcal{N}(\mu, K_X)$ . Si  $K_X \in \mathbb{C}^{n,n}$  est hermitienne définie positive alors,  $K_{\hat{X}} \in \mathbb{R}^{2n,2n}$  est symétrique définie positive. Dans ce cas la loi de  $X$  admet une densité qui est exprimée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\det(\pi K_X)} e^{-(x-\mu)^H K_X^{-1}(x-\mu)} \quad (15)$$

##### 4.2. Capacité d'un canal MIMO

Pour un canal de transmission SISO, la capacité est définie par la valeur maximale de l'information mutuelle entre l'entrée  $X$  et la sortie  $Y$ . Dans le cas d'un canal MIMO, il suffit de rechercher la valeur maximale de l'information mutuelle en les vecteurs aléatoires d'entrées  $X$  et de sorties  $Y$  [1].

L'information mutuelle entre  $X$  et  $Y$  est exprimée par :

$$I(X;Y) = \log_2(\det\{I_{n_R} + HR_x H^H (R_B)^{-1}\}) \quad (16)$$

La capacité d'un canal MIMO de matrice de transfert  $H$  avec  $n_T$  antennes émettrices et  $n_R$  antennes réceptrices est définie par :

$$C_{MIMO} = \max_{p(x):E[X^H X] \leq P_T} I(X;Y) \quad (17)$$

##### 4.2.1. CSI inconnu

On suppose alors que l'émetteur distribue la puissance d'une façon uniforme sur chaque antenne émettrice en l'absence d'information d'état du canal. Lorsque des signaux d'entrée et de sortie sont gaussiens centrés, l'information mutuelle est maximisée. La capacité d'un canal MIMO est alors définie par [1]:

$$C_{MIMO} = \log_2 \left\{ \det \left( I_{n_R} + \frac{\gamma}{n_T} H H^H \right) \right\} \quad (18)$$

Où,  $\gamma$  représente le SNR.

#### 4.2.2. CSI connu

La capacité d'un canal MIMO peut être exprimée à travers ses valeurs singulières si le CSI est connu à la réception. On peut en déduire alors que le canal de propagation est constitué de la superposition de plusieurs sous-canaux indépendants transportant chacun une fraction du signal transmis. Le nombre  $i = 1, \dots, r$  des valeurs singulières du canal MIMO détermine le nombre de ses canaux virtuels.

Dans ce cas, la capacité du canal est alors définie par :

$$C_{MIMO} = \sum_{i=1}^r \log_2 \left\{ 1 + \frac{\gamma}{n_T} \lambda_i \right\} \quad (19)$$

Où  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}; i = 1, \dots, r$  représentent les valeurs singulières non nul de  $H$  et  $\lambda_i$  représente la valeur propre ou le gain en puissance du  $i^{\text{ème}}$  canal indépendant.

#### 4.3. Réseau virtuel MIMO

Une technologie MIMO peut avoir des centres de phase situés aux emplacements virtuels  $\{y_{n_R} + x_{n_T}\}$ . Les centres de phase du réseau virtuel MIMO sont définis par le produit de convolution des emplacements réels des émetteurs avec ceux des récepteurs [5].

On suppose que les antennes d'émission et de réception occupent les mêmes centres de

phase. Un réseau uniforme, linéaire, échantillonné de façon critique à  $i = n_T = n_R$  éléments est utilisé comme référence. Dans ce réseau, les éléments sont séparés par d'une demi-longueur d'onde ( $0,5\lambda$  ou  $\frac{\lambda}{2}$ ).

En utilisant le réseau dispersé qui suit  $\{1 1 0 1 1\}$  pour l'émission et la réception, le réseau MIMO virtuel suivant peut être construit par l'expression :

$$\{1 2 1 2 4 2 1 2 1\}$$

La longueur d'ouverture maximale sous cette contrainte est :

$$l \leq \frac{i(i+1)}{2} \quad (20)$$

$i$  : nombre d'éléments de chaque réseau

Pour un réseau ayant des positions d'émetteur et récepteurs indépendantes, si le réseau de réception est rempli, noté par  $\{1 1 1 1\}$  et le réseau de transmission est dispersé avec des antennes espacées de la longueur du réseau de réception, noté par l'expression :

$$\{1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1\}$$

Alors le réseau virtuel MIMO est donné par le réseau à seize (16) éléments virtuels :

$$\{1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1\}$$

## 5. Avantages du canal MIMO

La technologie MIMO permet d'avoir deux types de gain à savoir, le gain de diversité et le gain de multiplexage.

### 5.1. Gain de multiplexage

Le *gain de multiplexage* est défini comme étant le gain obtenu par la transmission des signaux de données différents à travers les différentes antennes par le procédé de multiplexage [1].

Il est défini par :

$$r = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{c(\gamma)}{\log(\gamma)} \quad (21)$$

### 5.2. Gain de diversité

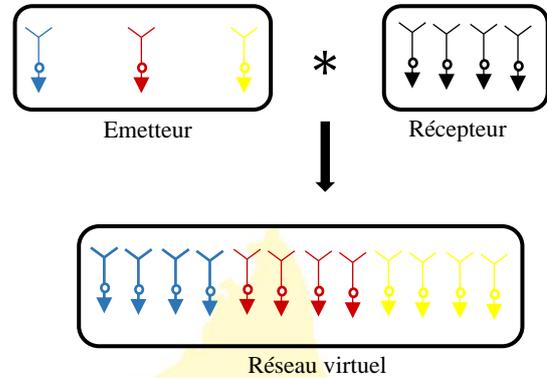
Le *gain de diversité* est défini par l'amélioration du rapport signal sur bruit des signaux relatifs combinés par rapport au signal sur bruit reçu sur seule une antenne. Il est défini par [1] :

$$r' = - \lim_{SNR \rightarrow \infty} \frac{\log(P_e(SNR))}{\log(SNR)} \quad (22)$$

### 5.3. Haute résolution

L'ouverture d'un système MIMO est définie par la longueur du réseau virtuel correspondant. Plus l'ouverture est grande, plus le réseau sera directif. Autrement dit, ceci

contribue à l'obtention de petits lobes secondaires, constituant l'objectif principal de certains systèmes antennaires MIMO, tel le cas des MIMO radar.



**Figure 2 :** Illustration du réseau MIMO virtuel par produit de convolution

La longueur optimale du réseau virtuel est :

$$l \geq \frac{i^2}{4} + i, \quad i \text{ paire} \quad (23)$$

Ou

$$l \geq \frac{i^2 - 1}{4} + i, \quad i \text{ impaire} \quad (24)$$

## 6. Types de codage en MIMO

Les techniques de codage les plus utilisées par la technologie MIMO sont les méthodes de multiplexage par division spatiale ou Spatial Division Multiplexing (SDM), le codage spatio-temporel et le beamforming.

### 6.1. Multiplexage par division spatiale

C'est une technique de multiplexage au cours de laquelle, plusieurs flux de données

indépendants sont simultanément multiplexés sur chaque antenne.

Chaque flux spatial dispose de sa propre paire d'antenne de transmission/réception à chaque extrémité du lien. Le nombre de flux émis simultanément est limité par le nombre minimum d'antennes du récepteur ou de l'émetteur puisque l'émetteur ne peut émettre plus de flux simultanés qu'il en a autant d'antennes, et le récepteur ne peut non plus décoder plus de flux qu'il n'en a autant.

### 6.2.Codage spatio-temporel

Le principe repose sur le fait qu'une même information soit envoyée via plusieurs antennes et à plusieurs reprises, à chaque fois codée d'une façon différente, selon des algorithmes qui permettent d'améliorer la probabilité de pouvoir correctement reconstruire l'information à l'arrivée.

Le signal transmis par l'émetteur est exprimé par [6]:

$$Y = \sqrt{\frac{E_x}{n_0 n_T}} HX + B \tag{25}$$

Si,  $x_i^{(t)}$  représente le signal transmis par l' $i^{\text{ème}}$  antenne d'émission à l'instant  $t$  alors le signal reçu  $y_i^{(t)}$  est exprimé par :

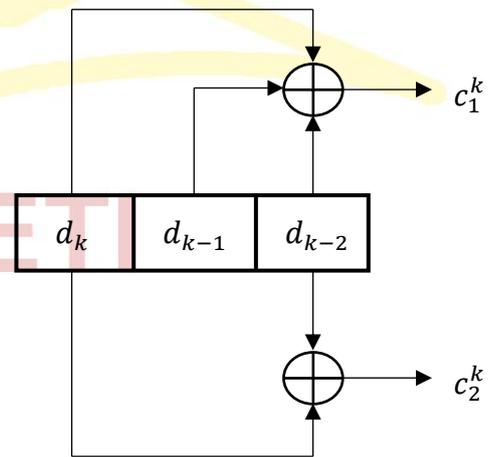
$$y_i^{(t)} = \sqrt{\frac{E_x}{n_0 n_T}} [y_{j_1}^{(t)} \ y_{j_2}^{(t)} \ \dots \ y_{j_{n_T}}^{(t)}] \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ \vdots \\ x_{n_T}^{(t)} \end{bmatrix} + \eta_j^{(t)} \tag{26}$$

On rencontre deux types de codage spatio-temporel à savoir, le codage spatio-temporel en treillis ou STTC et le codage spatio-temporel par bloc ou STBC.

#### 6.2.1.Codage spatio-temporel en treillis

On définit le STTC par un codage espace-temps dont la sortie est en fonction des bits d'entrée et de l'état du codeur [6]. Son principe repose sur celui du codage convolutionnel.

Le codage du  $k^{\text{ème}}$  symbole est représenté par la **Figure 3**.



**Figure 3 :** Illustration du codage du  $k^{\text{ème}}$  symbole en STTC

### 6.2.2. Codage spatio-temporel par bloc

Le STBC est défini par un codage spatio-temporel où, l'information à émettre est tout d'abord découpée en  $n$  blocs avant d'être transmis à travers les antennes d'émission et indépendamment des blocs précédents.

La matrice de codage tient compte de la redondance spatiale, temporelle et qui est définie par [6] :

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n_T1} & x_{n_T2} & \cdots & x_{n_Tp} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$1 \leq k \leq p; 1 \leq j \leq n_T$$

### 6.3. Beamforming

Il s'agit d'une technique de transmission sans fil qui consiste à diriger les faisceaux de rayonnement des différentes antennes vers une direction donnée [7]. On procède par une pondération des signaux provenant de différentes antennes d'émission. La somme de signaux pondérés, reflétant une optimisation suivant un critère défini ou d'une direction d'intérêt, désigne le signal à la sortie de beamformer [8].

On suppose que  $W_t = [W_{t_1} \dots W_{t_{n_T}}]^T$ ;  $H$  et  $W_r = [W_{r_1} \dots W_{r_{n_T}}]^T$  représentent respectivement la matrice de beamforming à l'émission, la fonction de transfert du canal de

transmission et la matrice de beamforming à la réception.

Le modèle de système de communication peut être décrit par l'équation suivante, selon la méthode de formation de voies conjointes à l'émission et à la réception:

$$y_{beamf} = W_r^H H W_t x + W_r^H b \quad (28)$$

Le SNR est défini par :

$$SNR_{beamf} = \frac{\|W_r^H H W_t\|^2 E(xx^H)}{\|W_r^H\|^2 \sigma_b^2} \quad (29)$$

## 7. Conclusion

Pour conclure, la technologie MIMO utilise le canal radio électrique comme support de transmission, un canal assimilé à un système linéaire et variant dans le temps. Sujet aux différents phénomènes physiques, ce canal obéit à des modèles de propagation qui sont basés sur l'équation des télécommunications ou équation de Friis. Le canal MIMO possède une capacité qui dépend de la connaissance ou non de l'état du canal au niveau de l'émission. Sa particularité repose aussi sur le réseau virtuel correspondant qui lui permet, dans des domaines d'applications tel que le radar, d'avoir une plus haute résolution en raison de son ouverture plus grande. A ceci s'ajoute l'utilisation de plusieurs antennes permettant d'obtenir des gains de multiplexage et de diversité. Enfin, le codage en MIMO peut

varier d'une méthode à une autre, selon les objectifs.

## 8. Bibliographie

- [1] H. Khaleghi Bizaki, « *Mimo systems, theory and applications* », InTech, Mar. 2011.
- [2] K. Marvin, S. A. Mohamed, « *Digital Communication over Fading Channels - A Unified Approach to Performance Analysis* », 1st ed. Wiley 2000.
- [3] P. Stavroulakis, « *Interference Analysis and Reduction for Wireless Systems* », Artech House, 2003.
- [4] A. N. Andriamanalina, « *Contribution à la modélisation et à l'évaluation des performances des systèmes de communication numérique via le canal radio* », Docteur de l'Université d'Antananarivo, Thèse 2014.
- [5] J. Li, P. Stoica, « *MIMO Radar Signal Processing* », John Willey & Sons 2009.
- [6] A. Chockalingam, B. S. Rajaniaga, « *Large MIMO Systems* », Indian Institute of Science, Bangalore, Cambridge University Press 2014.
- [7] N. Fadlallah, « *Contribution à l'optimisation de la synthèse du lobe de rayonnement pour une antenne intelligente. Application à la conception de réseaux à déphasage* », Docteur de l'Université de Limoges, Thèse N° 18-2005.
- [8] L. C. Godara, « *Smart Antennas* », CRC Press LLC 2004.