

**Contribution à la modélisation mathématique des types  
de dispersion dans la liaison optique**

***Randriana N.H.E<sup>1</sup>, Randriamitantsoa P.A.<sup>2</sup>, Randriamitantsoa A. A<sup>3</sup>***

Laboratoire de Recherche Télécommunication, Automatique, Signal et Images (LR-TASI)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Ecole Supérieure Polytechnique d'Antananarivo

Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

*<sup>1</sup>Erica\_mada@hotmail.com, <sup>2</sup>rpauguste@gmail.com, <sup>3</sup>andriau23@gmail.com*

**RESUME**

L'augmentation du débit sur les lignes de transmission optique utilisées aujourd'hui a fait de la dispersion chromatique un problème majeur. La dispersion de vitesse de groupe induite dans la fibre perturbe la propagation du signal dans les réseaux de télécommunications optiques. Le phénomène se traduit par l'élargissement temporel des impulsions lumineuses constituant le signal, ce qui a pour effet d'introduire des distorsions dans le signal transmis en bout de fibre. D'après nos résultats, nous pouvons affirmer que la dispersion est quasi nulle à la longueur d'onde  $\lambda = 1330$  nm mais au niveau de la longueur d'onde de 1550 nm où l'atténuation est quasi-nulle mais la dispersion n'est pas négligeable.

**Mots clés :** Fibres optiques, Impulsion, modélisation, dispersion, temporel

**ABSTRACT**

Increasing the throughput on the optical transmission lines used today has made chromatic dispersion a major problem. The induced group velocity dispersion disturbs signal propagation in optical telecommunications networks. The phenomenon results in the time widening of the light pulses constituting the signal, which has the effect of introducing distortions in the signal transmitted at the end of the fiber.

From our results, we can say that the dispersion is almost zero at the wavelength  $\lambda = 1330$  nm but at the level of the wavelength of 1550 nm where the attenuation is almost zero but the dispersion is not negligible.

**Key words:** Optical fibers, pulse, modeling, dispersion, temporal

## 1 Introduction

Lorsqu'un signal lumineux se propage dans un milieu, il subit un élargissement dans le temps que l'on appelle la dispersion temporelle. Cet élargissement limite le débit dans un système de communication optique, car il force à diminuer le délai entre deux impulsions. Il existe plusieurs causes d'élargissement temporel d'une impulsion qui se propage dans un milieu dispersif.

## 2 Origine

Les deux origines de la dispersion chromatique sont les suivantes :

- Une première cause vient du fait que pour une longueur d'onde donnée (lorsque nous considérons la propagation dans une fibre multimode), les vitesses de groupe des différents modes ne sont pas égales les unes aux autres.
- Une seconde cause de la dispersion temporelle (que nous étudierons dans ce chapitre) vient du fait que l'indice de réfraction d'un milieu dépend de la longueur d'onde et que les sources utilisées pour transmettre le signal ne sont pas monochromatiques (nous parlons alors de dispersion chromatique ou de dispersion matérielle). Les différentes composantes spectrales d'une source ont donc des temps de propagation différents, ce qui provoque l'élargissement d'une impulsion. [1]

## 3 La dispersion chromatique

La dispersion chromatique exprime alors le fait que la réponse de ce milieu, et en particulier son indice de réfraction  $n(\omega)$ , dépende de la fréquence de l'onde incidente. Loin des fréquences de résonance du matériau, la dépendance de l'indice de réfraction vis-à-vis de la pulsation peut être évaluée avec une bonne approximation grâce aux équations de Sellmeier données par :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2} = 1 + \sum \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2} \quad (1)$$

Où :

$j$ ,  $\omega_j$ ,  $\lambda_j$  et  $B_j$  : représentent respectivement la pulsation, la longueur d'onde dans le vide et l'amplitude de la  $j^{\text{ième}}$  résonance.

*Définition 1 :*

La loi de Cauchy en optique est une relation empirique, donnant l'indice de réfraction  $n$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  pour un milieu transparent donné. Cette loi est une approximation valable pour les milieux transparents dans le visible et dont les bandes d'absorption sont toutes dans l'ultraviolet. Elle s'écrit comme un développement limité de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde :

$$n = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^4} + \dots \quad (2)$$

Où :

$C_1$ ,  $C_2$  et  $c_3$  sont des coefficients positifs, respectivement sans dimension, en  $m^2$ , et en  $m^4$ , caractéristiques de chaque milieu.

*Démonstration :*

♣

L'équation de Sellmeier résulte d'une approximation de la loi de Cauchy dans laquelle on considère que les particules du milieu réagissent au champ électromagnétique incident à la manière d'oscillateurs harmoniques.

Soit :

$$n = C_1, \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{c_3}{\lambda^4} + \dots \quad (3)$$

$$n^2 = \left( n = C_1, \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{c_3}{\lambda^4} + \dots \right)^2 \quad (4)$$

$$n^2 = C_1^2 + 2 \frac{C_1 C_2}{\lambda^2} \quad (5)$$

En prenant les paramètres suivants :

$$C_1 = (1 + A)^{1/2} \quad (6)$$

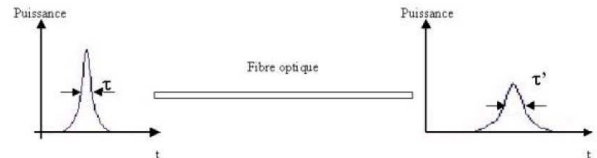
$$C_2 = \frac{A\lambda_0^2}{2C_1} = \frac{A\lambda_0^2}{2(1 + A)^{1/2}} \quad (7)$$

En déduit la forme empirique de l'équation de Sellmeier :

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^M \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_j^2} \quad (8)$$

#### 4 Modélisation de la dispersion dans les fibres optiques

Lorsqu'une impulsion se propage en régime linéaire dans une fibre optique, elle subit un phénomène de dispersion qui se traduit par un étalement temporel de celle-ci (figure 1). [2]



**Figure 1 :** Evolution de l'impulsion pendant sa propagation dans la fibre optique.

Plusieurs types de dispersion existent, contribuant tous à l'étalement de l'impulsion au cours de sa propagation dans le guide :

- **La dispersion de polarisation**

Le mode fondamental d'une fibre optique monomode (LP01) est une combinaison de deux modes électromagnétiques notés  $LP^x_{01}$  et  $LP^y_{01}$  qui ne se propage pas à la même vitesse dans la fibre si celle-ci

présente une biréfringence parasite, de forme ou de contrainte. Cette variation de vitesse provoque un déphasage entre les deux composantes du mode fondamental et par conséquent, introduit un phénomène de dispersion ; la dispersion de polarisation.

- **La dispersion intermodale**

La dispersion intermodale ne se présente que dans les fibres multimodes car il s'agit d'une dispersion liée au fait que les modes

de la structure ne se propagent pas à la même vitesse.

- **La dispersion du matériau**

La dispersion du matériau traduit le fait que la silice, qui compose majoritairement la fibre, possède un indice optique, l'indice de réfraction, qui varie en fonction de la longueur d'onde. Cette dépendance de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde induit une modification de la vitesse de groupe propre au milieu et doit être incluse dans les lois de propagation de la lumière dans le guide.

- **La dispersion du guide**

Le fait que les ondes se propagent dans le guide et non dans un milieu illimité entraîne une dépendance de l'indice effectif en fonction de la longueur d'onde. Cette influence du guidage correspond à une nouvelle contribution à l'évolution spectrale des temps de groupe. Moyennant un certain nombre d'approximations comme par exemple les termes croisés intervenant dans la définition de la dispersion du guide, on exprime communément la dispersion chromatique comme étant la somme de la dispersion du matériau et de la dispersion du guide. Son unité est la ps/(nm.Km), c'est-à-dire que l'on considère l'étalement temporel d'une impulsion référence d'une largeur spectrale de 1 nm et sur une distance de 1 Km.

Pour une fibre monomode standard, la dispersion chromatique est de l'ordre de 17ps/(nm.Km) à 1.55  $\mu\text{m}$ , et nulle autour de 1.3  $\mu\text{m}$ .

## 5 Modélisation des dispersions chromatiques

Dans les fibres optiques monomodes dont le profil est à symétrie de révolution, la dispersion chromatique est la cause principale de l'élargissement des impulsions. Définissons quelques termes avant de commencer l'étude de cette dispersion. [3]

Une onde plane électromagnétique se propage à une vitesse de phase donnée par :

$$V_p = \frac{w}{k} \quad (9)$$

Ce résultat ne correspond pas à la vitesse de transmission du signal. En effet, un signal superposé à une onde se propage à une vitesse de groupe qui est définie par :

$$V_s = \frac{1}{dk/dw} \quad (10)$$

Dans un milieu non dispersif, où l'indice de réfraction ne dépend pas de la fréquence (Le vide par exemple), nous avons :

$$k = \frac{n \cdot w}{c} \quad (11)$$

La vitesse de groupe est ensuite égale à la vitesse de phase :

$$V_s = \frac{1}{dk/dw} = \frac{c}{n} \quad (12)$$

Cependant, pour un milieu dispersif, où l'indice de réfraction est fonction de la

fréquence, la vitesse de groupe n'est pas égale à la vitesse de phase  $\frac{c}{n}$  mais devient :

$$V_s = \frac{1}{dk/dw} = \frac{c}{n + w \frac{dn}{dw}} \quad (13)$$

La vitesse à laquelle se propage l'information (vitesse de groupe) est donc différente pour chaque longueur d'onde, ce qui entraîne une déformation temporelle de l'impulsion. En optique, la vitesse de groupe est généralement exprimée en fonction de la longueur d'onde :

$$\frac{dn}{dw} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dw} \quad (15)$$

Nous trouvons l'expression finale pour la vitesse de groupe

$$V_s = \frac{c}{\left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right)} = \frac{c}{N_s} \quad (16)$$

Où :

$$N_s = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (17)$$

$N_s$  est l'indice de groupe caractérisant la propagation dans un milieu dispersif

(notons que pour un milieu non dispersif,  $N_g = n$ ).

Un signal lumineux parcourt donc, dans un milieu une distance L en un temps t qui est donné par :

$$t = \frac{L}{V_s} = \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}\right) \frac{L}{c} = \frac{N_g L}{c} \quad (18)$$

Les sources utilisées ne sont pas monochromatiques, rappelons-le : elles ont une largeur spectrale  $\Delta\lambda$  (qui est définie comme la largeur à mi-hauteur) par rapport

à la longueur d'onde centrale  $\lambda_0$  qui fait qu'une impulsion s'élargit lorsqu'elle se propage dans un milieu dispersif. Le délai  $\Delta t$  entre deux longueurs d'onde séparées par  $\Delta\lambda$  est :

$$\Delta t = \left| t\left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) - t\left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \right| \quad (19)$$

En termes de l'indice de groupe  $N_g$ , cet élargissement s'exprime comme :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left| N_g\left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) - N_g\left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \right| \quad (20)$$

Pour des petites valeurs de  $\Delta t$ , ce résultat devient :

$$\Delta t = \left| \frac{L}{c} \Delta\lambda \left( \frac{dN_g}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \right| \quad (21)$$

En dérivant l'indice de groupe, on obtient :

$$\frac{dN_g}{d\lambda} = -\lambda \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (22)$$

L'élargissement sera de l'ordre de :

$$\Delta t = \left| \frac{L \Delta\lambda}{c} \lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_0} \quad (23)$$

Nous définissons la largeur spectrale relative de la source :

$$\gamma_s = \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \quad (24)$$

Nous définissons ensuite le coefficient de dispersion chromatique du matériau :

$$\gamma_m = \left( \lambda^2 \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \right)_{\lambda} \quad (25)$$

Et nous représentons ce résultat utile qui nous donne l'élargissement de l'impulsion de largeur spectrale  $\Delta\lambda$  qui se propage sur une distance L dans un milieu dispersif :

$$\Delta t = \frac{L}{c} |\gamma_s \gamma_m| \quad (26)$$

La dispersion matérielle trouve son origine dans la dépendance fréquentielle de la réponse des électrons de valence du matériau diélectrique (silice) soumis à un champ optique. La dispersion matérielle trouve son origine dans la dépendance fréquentielle de la réponse des électrons de valence du matériau diélectrique (silice) soumis à un champ optique :

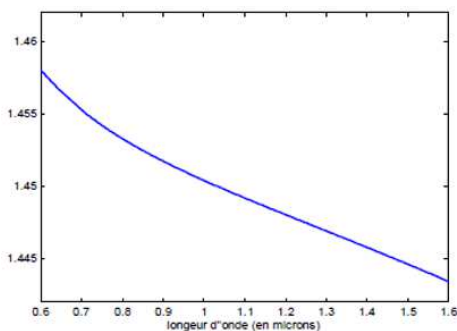
$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{t=1}^3 \frac{A_t \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_t^2} \quad (27)$$

Nous avons représenté avec l'outil Matlab le profil d'indice de la silice en fonction de la longueur d'onde figure 1, pour les valeurs suivantes :

$$A_1=0.6961663, A_2=0.4079426, A_3=0.8974794$$

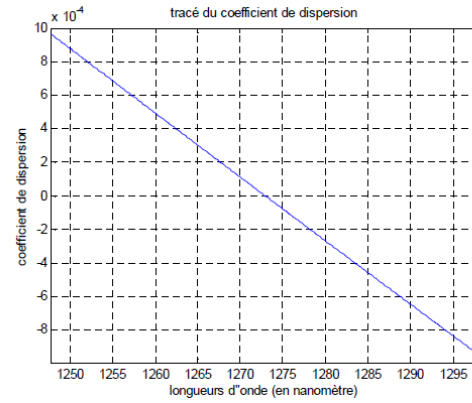
Et pour les longueurs d'onde correspondantes :

$$\lambda_1=0.0684043, \lambda_2=0.1162414, \lambda_3=9.896161$$



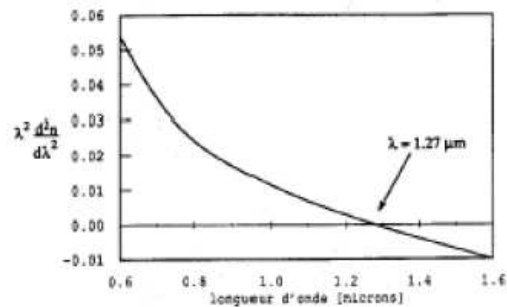
**Figure 2 :** Variation de l'indice de réfraction de la silice réalisé sur MATLAB

Dans la figure 3, nous retrouvons le graphique du coefficient de dispersion matériel  $\gamma_m$  en fonction de la longueur d'onde (pour le profil d'indice de la silice).



**Figure 3 :** Tracé du coefficient de dispersion en fonction de la longueur d'onde

Nous remarquons que  $\gamma_m$  change de signe à la longueur d'onde  $\lambda = \lambda_0 = 1.27 \mu\text{m}$ , qui correspond au point d'inflexion de la courbe  $n(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  ; ce point est souvent qualifié de « longueur d'onde de dispersion à zéro » (figure 3), (figure 4). Il faut comprendre que pour cette longueur d'onde, l'élargissement est nul, selon le calcul du premier ordre. D'une part, une source réelle émet une certaine largeur spectrale car elle possède toujours un spectre de fréquences. D'autre part, la dispersion monochromatique sera minimisée si la source émet à une longueur d'onde près de  $\lambda_0$ , qui est différente pour chaque milieu de propagation.



**Figure 4 :** Optimisation du coefficient de dispersion  $\gamma_m$

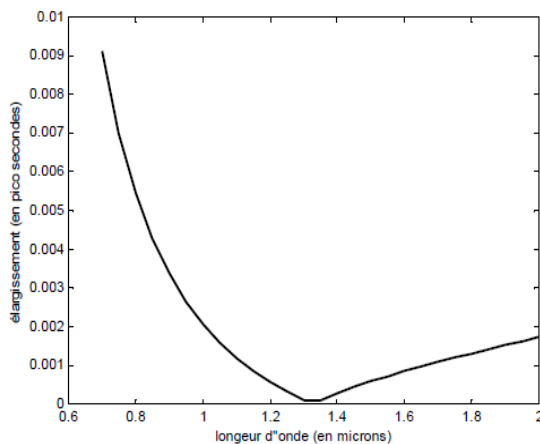
Si nous voulons calculer l'effet de la dispersion chromatique dans la fibre optique, Nous pouvons utiliser le résultat précédent :

$$\Delta t = \frac{L}{C} |\gamma_s \gamma_m| \quad (28)$$

La figure 5 représente le taux d'élargissement  $\Delta t$  d'une impulsion gaussienne, tel que :

$$\Delta t = \frac{L}{c^2} \times 0.44 \times \frac{\lambda | \gamma |}{T} \quad (29)$$

Où les unités de  $\Delta t$  : picosecondes ;  $\lambda$  : microns ;  $T_0$  : nanosecondes et la distance  $L$  été fixé à 1 Km.



**Figure 5 :** Taux d'élargissement  $\Delta t$  prévu pour une impulsion gaussienne sur 1Km

La courbe d'élargissement présente un optimum (élargissement minimal de l'impulsion) à  $9.4 \times 10^{-5}$  pico secondes, qui correspond à la longueur d'onde  $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$ . Nous pouvons déduire à partir de la figure 5, pour une valeur de la longueur d'onde  $\lambda = 1.2982$ , que l'indice de la silice optimal sera  $n_{\text{silice}} = 1.4469$ .

## 6 Conclusion

D'après les courbes des figures 3, 4 et 5, nous pouvons dire que la dispersion est quasi nulle à la longueur d'onde  $\lambda = 1330$  nm.

L'avènement des amplificateurs optiques dopés Erbium a décalé la longueur d'onde de transmission autour de 1550 nm où l'atténuation est nulle mais la dispersion n'est pas négligeable.

## 7 Bibliographie

- [1] B. Le Nguyen, « *Optical Fiber Communication Systems with MATLAB and Simulink Models* », International Standard Book, Huawei Technologies, Second edition, p355-401,2017.
- [2] B. Le Nguyen, « *Ultra-fast fiber laser* », International Standard Book, Huawei Technologies, Second Edition, p300-420, 2017.
- [3] Rajan Ginu, « *Advanced Techniques and Applications* », OPTICAL FIBER SENSORS, Second Edition, p 200-251,2016