# Construction d’une suite récurrente homographique par problèmes inverses

**ARMAND*, André TOTOHASINA****
*Lycée Mixte Antsiranana.armandarmand9@hotmail.com
**Université d’Antsiranana.andre.totohasina@gmail.com

## ENTREES D’INDEX

**Mots clés** : Suite numérique réelle, fonction homographique, suite géométrique, suite arithmétique.

**Keywords**: Real digital suite, homographic function, geometric suite, continued arithmetic

## RESUME

Leur âge, leur richesse ainsi que la diversité de leurs champs d’application font des suites récurrentes un sujet tellement vaste et si riche en résultats qu’il faudrait plusieurs ouvrages, en plus de ceux qui existent déjà, pour faire le tour de toutes leurs propriétés. Dans la littérature, on apprend essentiellement des études sur les suites récurrentes linéaires. Mais, ce papier s’intéresse cette fois à l’étude d’une suite récurrente homographique. Après un rappel sur l’étude de la convergence d’une suite récurrente homographique, nous mettons en place deux théorèmes permettant de construire à volonté une suite homographique dont la limite est fixée préalablement. Ainsi, ce résultat peut être pris, entre autres, comme un guide pédagogique des enseignants de lycée dans l’élaboration des exercices sur les suites numériques.

## ABSTRACT

Their age, their richness as well as the diversity of their fields of application make recurring series a subject so vast and so rich in results that it would take several works, in addition to those that already exist, to go around all their properties. In the literature, we mainly learn about linear recurrent sequences. But, this paper this time it is interested in the study of a homographic recurring sequence. Apart from a reminder about the study of the convergence of a recurring homographic sequence, we set up two theorems allowing to build at will a homographic sequence whose limit is fixed beforehand. Hence, this result may be considered as a teaching guide of real sequence on making exercises.

## 1. Introduction

En mathématiques, une suite est une succession ordonnée d'éléments pris dans un ensemble donné ; une série est la somme des termes d'une suite (Nicolas, M. 2007). Les suites et les séries occupent une place fondamentale dans les mathématiques modernes. Les travaux d'Abel, de Cauchy et de Gauss sur la convergence ont marqué, au début du XIXe siècle, l'étude des séries. Celle-ci ne se limite pas aux séries de nombres réels, mais s'applique aussi aux nombres complexes, ou aux séries de fonctions (Abdelkader, N. 1998). Les séries ont des applications dans de nombreux domaines scientifiques, comme l'électronique. Il existe plusieurs types de suites dans la littérature, à savoir par exemple suite récurrentes, suite de Cauchy, suite de Fibonacci (Hoggat, V. E. 1983), (Cerruti, U., and Vaccarino, F. 1996) suite géométrique, suite arithmétique, arithmético-géométrique etc. et chacune de ces suites a ses raisons d'être (Roland, C. (2005)), (Ferrand, D. (1988)), (Hansel, G. (1986)), (S. Homer and J. Goldman, (1985)). Ce que nous voulons étudier ici est les deux suites dont la suite géométrique et celle d'arithmétique (Pourchet, Y. 1979), (Polosuev, A. M. 1986). Personne n'ignore l'importante des suites arithmétiques (Michard, R. 2008) et (Mikhalev et al. 1995) géométriques dans la vie quotidienne, et ceci, dans plusieurs domaines, à savoir, par exemple : banque ; administration ; médecine ; bio-écologie, télécommunication, etc.. A ce sujet, ce papier propose, entre autres, une voie permettant d'avoir lesdites suites à partir des fonctions homographiques.

Dans ce qui suit, notre travail se divise en quatre sections. La section II introduit la définition d'une suite arithmétique et celle de géométrique. La section III suggère les problèmes directs de l'homographique. La section IV propose les problèmes inverses de l'homographie. La section V pose une conclusion.

## 2. Rappels et définitions

Dans cette section, nous rappelons un peu la définition d'une suite arithmétique et géométrique.

### 2.1. Suite arithmétique

On appelle suite arithmétique une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre (ce nombre est appelé raison de la suite arithmétique et est souvent noté *r*) (Polosuev, A. M. 1967), (Bézivin, J. P. 1990), (Mignotte M. L., Cerlienco. 1987).

### 2.2 Suite géométrique

Une suite géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un nombre réel constant non nul *q* (c'est une définition par récurrence).

## 3. Etude d'une suite récurrente « problèmes directs d'homographies

### 3.1. Suite récurrente linéaire : problème classique (du côté des élèves)

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout *n* : $U_{n+1} = 3U_n + 5$.

a. Pour tout n, on pose $V_n = U_n - \frac{5}{2}$

b. Montrer que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.

c. Exprimer $(V_n)_{n\in IN}$ puis $(U_n)_{n\in IN}$ en fonction de n

d. Calculer la limite de la suite $(V_n)_{n\in IN}$ et en déduire celle de $(U_n)_{n\in IN}$

### 3.2. Suite récurrente homographique propre : problème classique (du côté des élèves)

Nous voulons étudier la convergente d'une suite $(U_n)_{n\in IN}$exprimée par la relation de récurrence $U_{n+1} = h(U_n)$ à partir des situations des points fixes d'une homographie propre h préalablement donnée. Commençons par exposer une méthode classique pour l'étude de certaines suites récurrentes d'ordre 1. Si une suite $(U_n)_{n\in IN}$est définie par récurrence par une expression du type$U_{n+1} = h(U_n)$, où h une fonction homographique définie par : $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (c$\neq$ 0sinon l'étude est triviale), alors de deux choses l'une :

- Soit la fonction h admet deux points fixes $\alpha$ et $\beta$ auquel cas on étudie la suite de terme général $V_n = \frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ et l'on s'aperçoit rapidement que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique et on en tire après la convergence de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.
- Sinon, h n'a qu'un seul point fixe , auquel cas on étudie la suite de terme général $V_n = \frac{1}{U_n-\alpha}$ qui est alors une suite arithmétique ; dans ce cas, on peut tirer immédiatement que$\lim_{n\to\infty} U_n = \alpha$.

### 3.3. Élaboration d'une suite géométrique auxiliaire

Si une suite $(U_n)_{n\in IN}$est définie par récurrence par une expression du type : $U_{n+1} = h(U_n)$avec h une homographie de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (c$\neq$ 0sinon l'étude est triviale), alors des deux choses l'une : soit la fonction h admet deux points fixes $\alpha$ et $\beta$ *h*auquel cas on étudie la suite de terme général$V_n = \frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$ , et l'on s'aperçoit rapidement que $(V_n)$est une suite géométrique de raison$q = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$et de premier terme$V_p$tel que $V_p = \frac{U_p-\alpha}{U_p-\beta}$d'où, la proposition suivante.

**Proposition 1.***Étant donnée une homographie h ayant deux points fixes et on considère une suite homographique*$U_{n+1} = h(U_n)$*, alors on a les 4 cas possibles suivants les valeurs de la raison de la suite auxiliaire*$(V_n)$ *:*

*(i) Si |q| > 1, alors la suite* $(U_n)_{n\in IN}$ *converge vers* $\alpha$ *;*

*(ii) Si |q| < 1, alors la suite* $(U_n)_{n\in IN}$ *converge vers* $\beta$*;*

*(iii) Si |q| = 1, et le premier terme* $V_p \neq 1$*, alors la suite* $(U_n)_{n\in IN}$ *converge vers* $\pm\frac{\alpha-\beta V_p}{1-V_p}$*;*

(iv) Sinon, alors la suite $(U_n)_{n\in IN}$ diverge.

**Preuve**

(i) soit $(U_n)_{n\in IN}$ une suite définie par : $U_{n+1} = h(U_n)$, telle qu'il existe deux réels non nuls $\alpha$ et $\beta$ versifiant les équations $h(\alpha)=\alpha$ et $h(\beta)=\beta$. Considérons une suites $V_n = \frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}$. Comme, nous avons déjà dit que$(V_n)_{n\in IN}$est une suite géométrique de raison $q = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$et de premier terme $V_p$tel que $V_p = \frac{U_p-\alpha}{U_p-\beta}$. Nous pouvons en déduire que le terme général de la suite$(V_n)_{n\in IN}$de premier terme *Vp*et de raison q est définie par : $V_n = \frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta} = q^{n-p}V_p = \left(\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\right)^{n-p}\frac{U_p-\alpha}{U_p-\beta}$.

Nous pouvons en effet tirer que, si $|q|$> 1, alors :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n-\alpha}{U_n-\beta}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}\right)^{n-p}\frac{U_p-\alpha}{U_p-\beta}=\infty \qquad (1)$$

Ce qui nous conduit d'en déduire que $U_n=\beta$. Il est en effet très facile à prouver que,(ii), (iii) et (iv) résulte de (1).

**Exemple 1.***Soit à étudier la suite définie par* $U_0$*= 1 et pour tout n :* $U_{n+1}=\frac{U_n+3}{2U_n}$*. On commence par chercher les points fixes de l'homographie h :* $x\mapsto\frac{x+3}{2x}$*. Ceux-ci sont les racines de l'équation x + 3 = x (2x), c'est-à-dire -1 et 3/2. On étudie donc la suite de terme général* $\frac{U_n+1}{U_n-3/2}$*et appelons-la* $(V_n)$*.*

*On a :*

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-3/2}=\frac{\frac{U_n+3}{2U_n}+1}{\frac{U_n+3}{2U_n}-3/2}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{U_n+1}{U_n-3/2}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)V_n.$$

*Donc,*$(V_n)_{n\in IN}$*est une suite géométrique de raison* $q=-\frac{3}{2}$*et de premier terme*$V_0=4$*.*

### 3.4. Convergence d'une suite $(U_n)_{n\in IN}$

Par récurrence, on a immédiatement $\frac{U_n+1}{U_n-3/2}=(-3/2)^n\frac{U_0+1}{U_0-3/2}$et donc,$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_n+1}{U_n-3/2}\right|=+\infty$. D'où,$\lim_{n\to+\infty}U_n=3/2$.

### 3.5. Élaboration d'une suite arithmétique auxiliaire

Comme nous avons déjà montré que, si *h* n'a qu'un seul point fixe$\alpha$ , la suite de terme général $V_n=\frac{1}{U_n-\alpha}$ est alors une suite arithmétique de raison $r=\frac{c}{a-\alpha c}$et de premier terme $V_p=\frac{1}{U_p-\alpha}$. Dans ce cas, on peut tirer immédiatement que$\lim_{n\to+\infty}U_n=\alpha$. En effet, on va étudier la suite définie par $U_0=1$ et pour tout*n* : $U_{n+1}=\frac{10U_n-25}{U_n}$. Commence par chercher les points fixes de la fonction de récurrence $f : x\mapsto\frac{10x-25}{x}$. Ceux-ci sont les racines de l'équation 10*x* - 25 = *x (x),*c'est-à-dire 5. On étudie donc la suite auxiliaire de terme général$\frac{1}{U_n-5}$appelons-la $(V_n)_{n\in IN}$. On a :

$$V_{n+1}=\frac{1}{U_{n+1}-5} \qquad = \qquad \frac{1}{\frac{10U_n-25}{2U_n}-5}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\frac{U_n}{U_n-5}$$

Donc, $V_{n+1}-V_n=\frac{1}{5}$.

D'où,$(V_n)_{n\in IN}$est une suite arithmétique de raison$r=1/5$et de premier terme $V_0=-\frac{1}{4}$.

### 3.6. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in IN}$

Il est immédiatement que $\lim_{n\to+\infty}U_n=5$. Cette méthode est certes efficace et elle est mise à l'épreuve grâce à la recherche des points fixes de la fonction homographique qui permet de déterminer vers quoi la suite définie par récurrence peut tendre, si elle converge. Elle est aussi effectivement lieu attendu qu'avoir une application projective qui peut rendre l'infinie à un nombre finie. En revanche, il est plus surprenant que cette méthode nous donne à coup sûr le comportement de la suite.

## 4. *Problèmes inverses*

### 4.1. Problèmes inverses d'une application affine

Du côté d'enseignant, « comment construire son propre sujet sur les suites linéaires ou arithméticogéométrique? » Il s'agit de trouver une application affine ayant un point fixe préalablement donné. Ce qui va servir à construire une suite arithmético-géométrique qu'il est d'usage d'enseigner aux élèves de terminales ou premières dans le cadre de l'étude des suites géométriques. D'où le théorème suivant

**Théorème 4.1**. *Recherche d'une infinité d'une application affine ayant un point fixe préalablement donné Pour tout réel non nul* $\alpha$ *il existe une infinité d'applications affines notée* $h_\alpha$ *ayant comme point fixe définie par :* $h_\alpha(z) = az + b$ *où* $a \neq 0$*telle que=* $a(1-\alpha)$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$ *avec* $|a| < 1$ *.*

**Corollaire 1**. *Pour tout réel* $\alpha$*, fixé, il existe une infinité de suites arithmético-géométriques qui convergent vers*$\alpha$*. On dispose maintenant d'une méthode pour construire une suite arithmético-géométrique convergeant vers*$\alpha$*à un degré de liberté.*

**Exemple 2.***Construction d'une homographie ayant un point fixe*$\alpha$ *= 1. Soient deux réels*$\alpha$ *= 3 et a = 1/4. La suite arithmético-géométrique engendrée par*$h_{\alpha a}$*est définie par :* $\begin{cases} U_0 \neq 3 \\ U_{n+1} = h_\alpha(U_n) \end{cases}$ *où,* $h_{\alpha a} = \frac{1}{4}z + \frac{9}{4}$ *telle que* $b = a(1-\alpha) = \frac{9}{4}$ *est*

$$\begin{cases} U_0 \neq 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h_\alpha(U_n) = \dfrac{1}{4}U_n + \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

*On vérifie facilement que cette suite arithmético-géométrique converge vers 3 comme souhaité.*

### 4.2. Problèmes inverses d'homographies propres

Cette fois ci, nous nous proposons de construire une suite homographique de limite préalablement fixée à volonté. Il s'agit ainsi, d'un problème inverse d'homographie qui consiste à trouver :

- Soit une homographie complexe ou réelle h dont $\alpha$ est justement son unique point fixe ;
- Soit une homographie complexe ou réelle h à deux points fixes dont $\alpha$.

  Examinons les deux cas séparément.

### 4.3 Une homographie complexe ou réelle h dont $\alpha$ est son unique point fixe

**Théorème 4.2**. *Pour un réel non nul* $\alpha$*, fixé, il existe une infinité d'homographies notées* $h_\alpha$ *ayant* $\alpha$ *comme unique point fixe définie par :*

$$h_\alpha : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{telles que} \begin{cases} b = -\alpha^2 c \\ a = 4\alpha c \\ d = 2\alpha c \end{cases} \forall\ (\alpha, c) \in (\mathbb{R}^*)^2.$$

**Preuve**

Soit $h$ une homographie définie par : $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Nous avons une expression : $h_{\alpha c}(z) = \frac{4\alpha cz - \alpha^2 c}{cz+2\alpha c}$. Ainsi, $h_\alpha(z) = z$est équivalente à $4\alpha cz - \alpha^2 c = cz^2 + 2\alpha cz$. Donc, en remplaçant z par$\alpha$nous avons : $4\alpha^2 c - \alpha^2 c = c\alpha^2 + 2\alpha^2 c$et on a : $3\alpha^2 c = 3c\alpha^2$.

**Unicité**

Nous avons : $z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 = (z+\alpha)^2$. Nous constatons que les discriminant de cette équation est$\Delta = 0$. D'où le théorème énoncé.

**Remarque 1.** *On dispose ainsi de deux degré de libertés sur les choix de$\alpha$ et c pour construire une suite homographique convergeant vers$\alpha$et telle que la fonction homographique de récurrence admet$\alpha$comme unique point fixe comme souhaité.*

**Corollaire 2**. *Il existe une infinité de suites homographiques $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$qui convergent vers$\alpha$. On dispose maintenant d'une méthode pour construire sur une suite homographique convergeant vers $\alpha$de deux degrés de libertés.*

**Application**

Soient deux réels$\alpha$ = 1 et c = 2. La suite homographique engendrée par$h_{\alpha c}$est

définie par : $\begin{cases} U_0 \neq 1 \\ U_{n+1} = h_{\alpha c}(U_n) \end{cases}$ telles que $\begin{cases} \alpha = 1 \\ c = 2 \\ b = -2 \\ a = 8 \\ d = 4. \end{cases}$

Donc, $\begin{cases} U_0 \neq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h_{\alpha c}(U_n) = \frac{4z-1}{z+2}. \end{cases}$

On vérifie facilement que cette suite homographique converge vers 1 comme souhaité.

### 4.3. Une homographie complexe ou réelle h à deux points fixes

**Théorème 4.3**. *Pour deux réels $\alpha$ et $\beta$fixés, il existe une infinité d'homographies notées$h_{\alpha\beta}$, ayant$\alpha$ et $\beta$comme unique point fixe définie par :*

$$h_{\alpha\beta} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ telle que } \begin{cases} b = -(\alpha\beta)c \\ a = 2(\alpha+\beta)c \; \forall\, (\alpha, c, \beta) \in (\mathbb{R}^*)^3. \\ d = (\alpha+\beta)c \end{cases}$$

**Preuve**

Soit h une homographie définie par : $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Nous avons une expression : $h_{\alpha\beta c}(z) = \frac{2(\alpha+\beta)c-(\alpha\beta)c}{cz+(\alpha+\beta)c}$. Par la suite, $h_{\alpha\beta}(z) = z$ est équivalent à $2(\alpha+\beta)cz - (\alpha\beta)c = cz^2 + (\alpha+\beta)cz$. En remplaçant z par $\alpha$ nous avons : $2(\alpha+\beta)c\alpha - (\alpha\beta)c = c\alpha^2 + (\alpha+\beta)c\alpha$ et on a : $2\alpha^2 c + \alpha c\beta = 2\alpha^2 c + \alpha c\beta$ et en remplaçant z par$\beta$ nous avons $2\alpha^2 c + \alpha c\beta = 2\alpha^2 c + \alpha c\beta$. Donc,$\alpha$ et $\beta$sont deux solutions de l'équation $h_{\alpha\beta}(z) = z$D'où le théorème énoncé.

**Corollaire 3**. *Il existe une infinité de suites homographiques$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$telles que les homographies correspondantes admettent deux points fixes préalablement donnés$\alpha$et $\beta$. Comme pour le premier cas ci-dessus, on dispose ainsi d'une technique sûre pour construire une suite homographique ayant deux points fixes $\alpha$et $\beta$disposant cette fois de trois degrés de liberté avec le choix de, $\alpha, \beta$ et c.*

**Application.**

Soient trois réels$\alpha$ = 1, $\beta = 2$ et c = -3. La suite homographique$h_{\alpha c}$définie par : $\begin{cases} U_0 \neq \{-1\,; -2\} \\ U_{n+1} = h_{\alpha c}(U_n) \end{cases}$ telle que $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ c = -3 \\ b = 6 \\ a = 18 \\ d = -9. \end{cases}$

D'où, $\begin{cases} U_0 \neq \{1\,; 2\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h_{\alpha c}(U_n) = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$est une suite homographique dont l'homographie correspondante a deux points fixes 1 et 2.

## 5. Conclusion et Perspectives

En un mot, il est loisible de construire des problèmes variés basés sur une suite homographique à volonté selon que l'on peut contrôler ou renforcer l'acquisition des suites arithmétiques ou géométriques eu égard aux propriétés des points fixes d'une homographie pour étudier des suites géométriques et arithmétiques en 1ère et en Terminale.

En terme d'apprentissage des fonctions homographiques et des suites récurrentes homographiques en terminales scientifiques, nous avons vu que le programme scolaire ne sente nullement la considération desdites homographies.

Par ailleurs, grâce à la résolution des problèmes inverses d'homographie, nous avons montré l'existence d'une infinité d'homographies à un seul point fixe donné ou bien à deux points fixes donnés. Ce qui permet à tout enseignant d'élaborer efficacement ses propres suites homographiques de limite préalablement fixée à volonté, et ce, en une infinité de façons en disposant de deux ou trois degrés de liberté.

Enfin, ne serait-il pas opportun de lancer l'introduction de ces méthodes à travers l'étude de la convergence d'une suite récurrente homographique qui est bien réalisable sur les mathématiques scolaires consistant à l'introduire au niveau lycée, en guise de renforcement ?

## Références

Bézivin, J. P. (1990). Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard.Dans *Matematika*, 5*(11)* , 41. Toulouse, France : Annales de la faculté Des-sciences.

Cerruti, U. & Vaccarino. (1996). *Applications of Fibonacci numbers*, 6, 53-62. Dordrecht , Pays-Bas: Kluwer Acad. Publ.

Ferrand, D. (1988). *Suites récurrentes.*Rennes, France : IRMAR, Université de Rennes.

Hansel, G. (1986). Une démonstration simple du théorème de Skolem- Mahler- Lech. Dans *Theoretical Comp. Sci.,* 43, 91-98.

Homer, S., Goldman, J. (1985). Doubly periodic sequences and two-dimensional recurrences. Dans *J. of Math*.

Hoggat, V. E. (1983). Problem h–351. Dans *Fibonacci quart*. , 21, 75.

Mignotte, M., Cerlienco, et Piras, F. (1987). Suites récurrentes linéaires : propriétés algébriques et arithmétiques. Dans *Enseign. Math.*, 33, 67-108.

Nicolas, M. (2007). *Arithmétique pour la Cryptographie basé sur les Courbes Elliptiques*(PhD thesis, Université Montpelier II).

Michard, Romain. (2008). *Opérateurs arithmétiques matériels optimisés* PhD thesis, Université de Lyon - École Normale Supérieure de Lyon).

Abdelkader, N. (1998). *Suites récurrentes linéaires et séries formelles en plusieurs variables.*(PhD thesis, Université de Limoges).

Polosuev, A. M. (1967). Some arithmetic properties of a recurrent function with variable. Dans M. V. Lomonosov (dir.). *Moscow state University Nat. Zametki*., 1, 45-52.

Polosuev, A. M. (1986). On the structure of solutions of linear recurrence congruence with variable. Vestrik Moskov Skogo Universiteta. Dans *Matematika*,41, .

Pourchet, Y. (1979). Solution du problème arithmétique du quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles. Dans *C.R.A.S.,* 288, 1055-1057.Paris

Roland, Christophe. (2005). *Méthode d'accélération de convergence en analyse Numérique et en statistique*(PhD thesis, Université de Lille I).

Mikhalev, A., V., Kurakin, V., L., et Kuzmin A., S. (1995). Nechaev. Linear recurring sequences over rings and modules.Dans *J. of Math. Sci.*, 76, 2793-2915.