

## Pertinence et faisabilité de l'introduction fonctionnelle de l'ellipse dès la classe de première

**ARMAND\*, André TOTOHASINA\*\***

\*Lycée Mixte Antsiranana.[armandarmand9@hotmail.com](mailto:armandarmand9@hotmail.com)

\*\*Université d'Antsiranana.[andre.totohasina@gmail.com](mailto:andre.totohasina@gmail.com)

### ENTREES D'INDEX

---

**Mots clés :** Conique, construction, TICE.

**Keywords:** Conical, construction, EICT.

### RESUME

---

L'ellipse est l'une des courbes les plus importantes en physique. Vue l'évolution très spectaculaire des technologies actuelles, il existe plusieurs façons possibles de construire une ellipse, un cercle et le manant de Poincaré. En effet, en astronomie, les orbites de la Terre et des autres planètes autour du Soleil sont des ellipses. Les ellipses sont utilisées en ingénierie pour les arches de certains ponts et dans la conception d'engrenages pour certaines machines, comme les presses à poinçonner. A cet effet, en guise de guide pédagogique des enseignants en matière de TICE, ce papier recommande une autre technique de construction d'une ellipse.

### ABSTRACT

---

The ellipse is one of the most important curves in physics. View very spectacular evolution of current technologies, there are several possible ways to build an ellipse, a circle and the Poincare manant. Indeed, in astronomy, the orbits of the Earth and other planets around the Sun are ellipses. Ellipses are used in engineering for the arches of some bridges and in the design of gears for some machines, like punch presses. For this purpose, as a teaching guide on using educational ITC, this paper recommends another construction technique for an ellipse.

### 1. Introduction

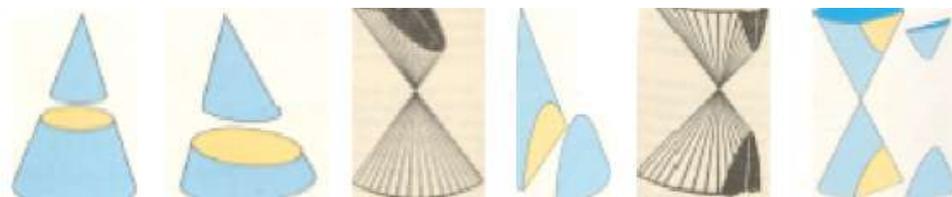
La géométrie analytique joue un rôle important dans le développement des mathématiques, car elle permet d'unifier les concepts de l'analyse (relations numériques) et de la géométrie (relations spatiales) (Berthelot R. & Salin M. H., 1994), (Berthelot R. & Salin M. H., 1999), (Berthelot R. & Salin M. H., 2001), (Artigue M. & Robinet J., 1982), (Boule F., 2001), (Brousseau, 1983), (Duval R., 1994), (Duval R., 2005). L'étude des géométries non-euclidiennes et des géométries dans les espaces à plus de trois dimensions n'aurait pas été concevable sans une approche analytique (Totohasina André & Armand, 2017). De même, les techniques de la géométrie analytique, en rendant possible la représentation graphique de nombres et d'expressions algébriques, ont apporté une meilleure compréhension du calcul infinitésimal, de la théorie des fonctions et d'autres problèmes mathématiques plus complexes (Armand, 2017). Nous nous intéressons dans ce papier à l'étude de la géométrie elliptique dont la géométrie sphérique (G. Brousseau., 1983), (Houdement C. & Kuzniak A., 1999), (Laborde C., 1990). En effet, l'ellipse est l'une des courbes les plus importantes en physique. En astronomie, les orbites de la Terre et des autres planètes autour du Soleil sont des ellipses. Les ellipses sont utilisées en ingénierie pour les arches de certains ponts et dans la conception d'engrenages pour certaines machines. D'une manière générale, il existe plusieurs façons pour construire une ellipse. Sur le plan euclidien, on peut tracer manuellement une ellipse via son expression réduite  $\left(\frac{x-a}{q}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$  (pour tout  $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ ) du fait de la connaissance de tous ses éléments caractéristiques. A l'aide d'un ordinateur ou une machine programmable, maints logiciels permettent de la tracer en connaissant ses éléments géométriques susmentionnés à savoir, par exemple, Geogebra, Derive5, etc. Dans cet article nous allons la tracer manuellement ou à l'aide d'un ordinateur en utilisant les fonctions caractéristiques qui seront définie ultérieurement.

Dans ce qui suit, notre travail se divise en six sections. La section II recommande l'aspect historique d'une conique. La section III expose la présentation d'une ellipse. La section IV représente la construction usuelle d'une ellipse. La section V concerne la construction n'une ellipse à l'aide d'une fonction. La section VI se reflète le problème inverse. La section VII expose sur la transformation d'une trajectoire circulaire à une trajectoire rectiligne. La section VIII est concentrée notamment sur la transformation d'une trajectoire rectiligne à une trajectoire circulaire. La section IX, pose une conclusion.

### 2. Réflexion épistémologique

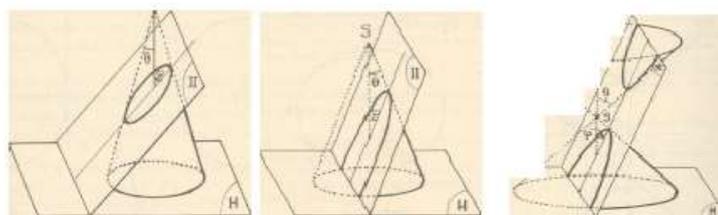
La lecture des programmes scolaires de mathématiques depuis une trentaine d'années nous révèle que seules les formes géométriques anguleuses (triangles et quadrilatères particuliers usuels) et le cercle sont appris dès le niveau primaire et poursuivis pendant les deux premières années du collège (i.e. en classes de sixième et cinquième), y comprises les méthodes de constructions respectives en utilisant une règle et un compas. Ainsi, cet enseignement de la géométrie pure concerne pratiquement tous les enfants scolarisés, sans élitisme aucun. L'apprentissage de l'aspect formel, c'est-à-dire algébrique ou analytique, de cette géométrie des cercles et des triangles commence en classe de quatrième et se poursuit progressivement en

abstraction et en propriétés jusqu'au lycée et à l'université, en mathématiques ou physique. Quant aux formes géométriques planes rondes, à savoir les sections planes d'un cône circulaire droit autres que les cercles, c'est-à-dire les ellipses, paraboles et hyperboles (Cf. Figures 1), leur apprentissage n'est « accessible » qu'une fois et tardivement, comme le laisseraient entendre lesdits programmes, et concerne exclusivement les jeunes parvenus en terminales scientifiques et techniques non tertiaires (André Totohasina., 2007).



**Figure 1 – Différentes sections engendrant une conique**

Notons que ces différentes figures indiquent respectivement la section circulaire dont son bord est un cercle, la section elliptique dont son bord est une ellipse, la section parabolique dont le contour de chaque section est une parabole les sections hyperboliques dont les deux bords de chaque section constituent une hyperbole équilatérale. Par ailleurs, leur enseignement, reflété par les textes des programmes successifs, ignore complètement l'épistémologie des coniques en se contentant d'une approche directement analytique, sous prétexte d'une préoccupation utilitaire cette fois, faisant fi de « la nature expérimentale et le fondement social » de cette science mathématique (Boll M., 1963), contrairement à l'approche recommandée pour les formes géométriques anguleuses et le cercle comme évoquée ci-dessus. Rappelons que sur le plan historique, la science reste une œuvre désintéressée : plus elle est désintéressée, plus elle est féconde, même au point de vue pratique.



**Figure 2 – Modes de coupage pour obtenir une conique**

Rappelons au passage que ces différentes figures indiquent respectivement une ellipse dont le plan de coupe ne passant pas le sommet et coupant les génératrices du cône à une nappe, parabole dont le plan de coupe est parallèle à une génératrice du cône à une nappe, hyperbole dont le plan de coupe est perpendiculaire aux cercles de la base du cône à deux nappes. A cet effet, convaincu à la pertinence et à la faisabilité de l'introduction précoce des coniques dont les ellipses dès le niveau collège en classe de 4<sup>ème</sup> ou 3<sup>ème</sup>, c'est-à-dire aux élèves de 14 à 15 ans par une approche purement géométrique et apparentée à l'épistémologie même desdites sections coniques le présent travail recommande une technique de construction d'une ellipse dans le souci d'anticiper son enseignement dès la classe de première intégrant les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Education (TICE), avec approche analytique et fonctionnelle. En effet,

l'avancée de la géométrie analytique permet, entre autres, de définir une ellipse comme section plane d'une surface ellipsoïde, une véritable surface ovale, comme ci-dessous (cf. figure 3).

### 3. Ellipse propre

**Définition 1.** Une ellipse est une conique propre ayant la forme d'une courbe fermée, obtenue comme intersection d'un cône par un plan coupant une seule nappe de ce cône, (Noirfalise R., 1991), (Robert Aline 2003), (Salin M.H., 2004), (Bouzari, A., 2015), (Tournes, D., 2012).

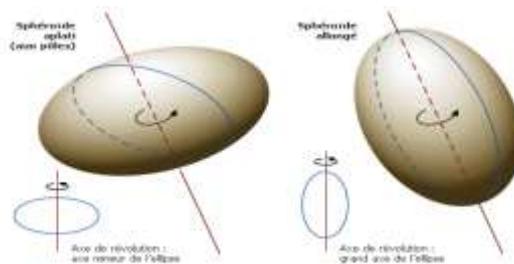


Figure 3 – Exemples des ellipses sur des surfaces ellipsoïdes

### 4. Constructions usuelles d'une ellipse

Soit P un plan euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Il est bien connue que l'équation réduite d'une ellipse y est définie par :

$$\left(\frac{x-a}{q}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

On note par E la représentation graphique de (1) sur P.

A propos de E, signalons les trois cas possibles.

Examinons-les séparément.

1- Si  $q = r$ , alors E est un cercle de rayon  $r$  et de centre  $I(a, b)$  ;

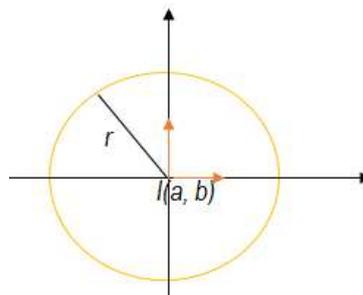
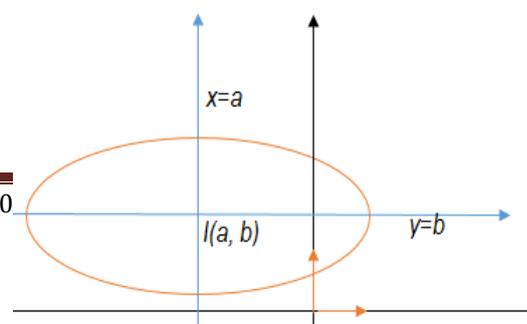


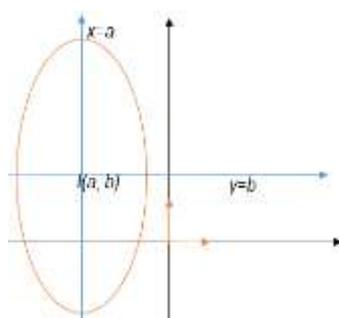
Figure 4 – Un cercle de centre  $I(a, b)$

(2) Si  $q > r$ , alors E est une ellipse de centre  $I(a, b)$  de grand axe  $y = b$  ;



**Figure 5 – Une ellipse de centre  $I(a, b)$  et de grand axe sur la droite d'équation  $y = b$**

\*(3) Si  $q < r$ , alors E est une ellipse de centre  $I(a, b)$  de grand axe  $x = a$  ;



**Figure 6 – Une ellipse de centre  $I(a, b)$  et de grand axe la droite d'équation  $x = a$**

### 5. Approche fonctionnelle

Partons toujours de l'expression (1) nous avons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-a}{q}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{r}{q}\right)^2 (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (y-b)^2 = r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2 \\ &\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2} + b, \quad \text{avec } \alpha = \frac{r}{q}. \end{aligned}$$

Si on note par  $(C_y^+)$  la représentation graphique de la fonction  $y = +\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2} + b$  et par  $(C_y^-)$  celle de  $y = -\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2} + b$ , alors  $E = (C_y^+) \cup (C_y^-)$ . La représentation graphique d'une ellipse dans le plan P n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions, à une constante près, opposées  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e+}$  et  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e-}$  ainsi définies :  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e+}(x) = +\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2} + b$  et  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x-a)^2} + b$  où  $(\alpha, a, b, r) \in \mathbb{R}^4$ . Ces deux fonctions sont appelées fonctions caractéristiques d'une ellipse. Notons que les deux fonctions  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e+}$  et  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e-}$  caractérisant chacune une demi-ellipse, sont toutes définies et bien continues sur le même intervalle borné  $\left[a - \frac{r}{\alpha} ; a + \frac{r}{\alpha}\right]$ .

**Remarque 1.** Cette approche pédagogique de la construction d'une ellipse aurait au moins l'avantage d'éviter une rupture cognitive chez des apprenants déjà bien habitués aux courbes représentatives des fonctions et la symétrie orthogonale, à une transformation verticale près, transformation géométrique déjà acquise dès fin de collège  $C_y^- = S_{(y=b)}(C_y^+)$ , où  $S_{(y=b)}$  est la symétrie orthogonale d'axe, la droite d'équation  $y = b$ .

#### 5.1 Descriptions des éléments caractéristiques de cette ellipse

Rappelons au passage que le centre de cette ellipse est le point  $I(a, b)$ . Pour la visualisation de ses axes et de ses sommets, il faut examiner les valeurs du réel  $\alpha$ . D'où la proposition suivantes.

**Proposition 1.**

- (i) Si  $|\alpha| = 1$ , alors la réunion de deux courbes représente un cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$  ;
- (ii) Si  $|\alpha| < 1$ , alors la réunion de deux courbes représente une ellipse de grand axe l'axe des abscisses des sommets  $S_1(a - \frac{r}{\alpha}, b)$ ,  $S_3(a + \frac{r}{\alpha}, b)$ ,  $S_2(a, -r + b)$  et  $S_4(a, r + b)$  ;
- (iii) Si  $|\alpha| > 1$ , alors la réunion de deux courbes représente une ellipse de grand axe l'axe des ordonnées des sommets  $S_1(a - \frac{r}{\alpha}, b)$ ,  $S_3(a + \frac{r}{\alpha}, b)$ ,  $S_2(a, -r + b)$  et  $S_4(a, r + b)$ .

**5.2 Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des ordonnées**

Pour comprendre la construction en question, partons d'un exemple.

Signalons au passage que pour la visualisation des figures elliptiques utilisant les fonctions caractéristiques dans le plan P, il est avantage de combiner et/ou de coupler l'utilisation des logiciels « GeoGebra », « Derive5 », « Sine qua non », « Latex avec pachage PST+ », etc., en exploitant leur complémentarité. Notons que dans toute la suite, toutes les figures sont effectuées avec Latex avec pachage PST+.

**Exemple 1.** La représentation graphique de l'ellipse  $E_1$  des éléments caractéristiques  $I(0 ; 2)$  et des sommets  $S_1(-1 ; 2)$ ,  $S_2(1 ; 2)$ ,  $S_3(0 ; 0)$ ,  $S_4(0 ; 4)$  n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions  $F_{(4, 0, 2, 2)}^{e+}$  et  $F_{(4, 0, 2, 2)}^{e-}$  définies par :  $F_{(4, 0, 2, 2)}^{e+}(x) = +\sqrt{2^2 - (4x)^2} + 2$  et  $F_{(4, 0, 2, 2)}^{e-}(x) = -\sqrt{2^2 - (4x)^2} + 2$  (Figure 7).

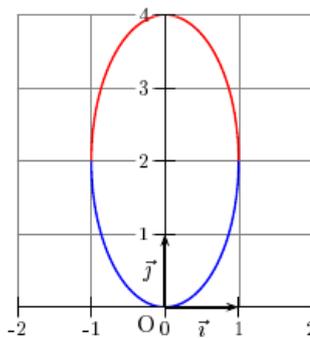
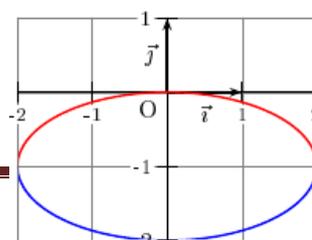


Figure 7 – Ellipse de centre  $I(0, 2)$

**5.3 Construction d'une ellipse dont le grand axe est situé sur l'axe des abscisses**

**Exemple 2.** La représentation graphique de l'ellipse  $E_2$  des éléments caractéristiques et des sommets  $I(0, -1)$  et des sommets  $S_1(-2, -1)$ ,  $S_2(2, -1)$ ,  $S_3(0, 0)$ ,  $S_4(0, -2)$  n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions  $F_{(\frac{1}{2}, 0, -1, 1)}^{e+}$  et  $F_{(\frac{1}{2}, 0, -1, 1)}^{e-}$  définie par :  $F_{(\frac{1}{2}, 0, -1, 1)}^{e+}(x) = +\sqrt{1^2 - (\frac{x}{2})^2} - 1$  et  $F_{(\frac{1}{2}, 0, -1, 1)}^{e-}(x) = -\sqrt{1^2 - (\frac{x}{2})^2} - 1$  (Figure 8).



**Figure 8 – Ellipse de centre I(0, -1)**

**Remarque 2.** Face aux expressions des dites fonctions caractéristiques d'une ellipse, on peut trouver tous les points appartenant à cette ellipse.

### 6. Problème inverse

Etant donné deux points  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$  tels que  $x_1 \neq x_2$ , pour  $a$  et  $b$  fixés, comment trouver une ellipse passant par les deux points sus-indiqués ? Ce qui va nous amener à chercher les réel  $a$ , et  $r$  engendrant l'expression des fonctions caractéristiques de cette ellipse. A cet effet, nous introduisons le théorème suivant permettant de répondre certainement à cette question.

**Théorème 5.1.** Pour tous points  $A(x_0 ; y_0)$ ,  $A(x_1 ; y_1)$  tels que  $x_0 \neq x_1$ , toute ellipse vérifiant l'expression  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e\pm}(x) = \pm\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x - a)^2} + b$  où  $(\alpha, a, b, r) \in \mathbb{R}^4$  passant par ces

points  $a$  pour éléments caractéristiques :

$$\begin{cases} b = \zeta \\ \alpha = \xi \\ a = \frac{x_0^2 - x_1^2 + (y_0 - \zeta)^2 - (y_1 - \zeta)^2}{2\xi(x_0 - x_1)} \\ r = \sqrt{(y_0 - \zeta)^2 - \xi^2(x_0 - a)^2} \end{cases}$$

### 6.1. Construction des polygones elliptiques

Considérons les dix fonctions caractéristiques suivantes.

$$\begin{aligned} F_{(1/2, 2, 1.6, 1)}(x) &= \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}(x-2))^2} + 2.6 \quad \text{si } x \in [0; 4]; \\ F_{(1/2, 2, 1.6, 1)}(x) &= -\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}(x-2))^2} + 2.6 \quad \text{si } x \in [0; 4]; \\ F_{(4, 1/2, -1, 2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x-\frac{1}{2}))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]; \\ F_{(4, 1/2, -1, 2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x-\frac{1}{2}))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]; \\ F_{(4, 2, -1, 2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x-2))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [1; 3]; \\ F_{(4, 2, -1, 2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x-2))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [1; 3]; \\ F_{(4, 7/2, -1, 2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x-\frac{7}{2}))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [\frac{3}{2}; \frac{9}{2}]; \\ F_{(4, 7/2, -1, 2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x-\frac{7}{2}))^2} - 1 \quad \text{si } x \in [\frac{3}{2}; \frac{9}{2}]; \\ F_{(1/2, 2, -1.5, 1)}(x) &= \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}(x-2))^2} - \frac{3}{2} \quad \text{si } x \in [0; 4]; \\ F_{(1/2, 2, -1.5, 1)}(x) &= -\sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}(x-2))^2} - \frac{3}{2} \quad \text{si } x \in [0; 4]. \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces dix fonctions sont les dix courbes ci-dessous représentant les triangles elliptiques  $BGC$  et  $DHE$  et un hexagone elliptique  $ABCDEF$  engendrés par les point  $A, B, C, D, E, F, G, H$ .

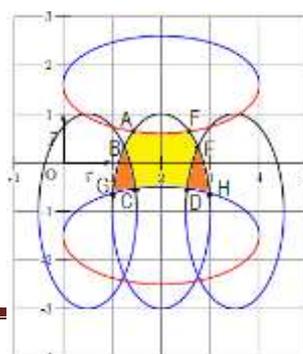


Figure 9 – Hexagone elliptique et triangles elliptiques

### 6.2. Études du cas où $b = 0$

Cette fois-ci nous examinons spécifiquement le cas où  $b = 0$ . Considérons les six fonctions caractéristiques exprimées respectivement d'une façon intercalée en noires et en vertes dont leurs représentations graphiques sont données sur la figure 10.

$$\begin{aligned}
 F_{(4,1/2,0,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - \frac{1}{2}))^2} \quad \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] ; \\
 F_{(4,1/2,0,2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x - \frac{1}{2}))^2} \quad \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] ; \\
 F_{(4,2,-1,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - 2))^2} \quad \text{si } x \in [1; 3] ; \\
 F_{(4,2,0,2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x - 2))^2} \quad \text{si } x \in [1; 3] ; \\
 F_{(4,7/2,-1,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - \frac{7}{2}))^2} \quad \text{si } x \in [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}] ; \\
 F_{(4,7/2,0,2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (4(x - \frac{7}{2}))^2} \quad \text{si } x \in [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}] ;
 \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces six fonctions donne les six courbes ci-dessous (cf. 10).

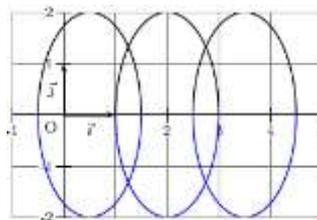


Figure 10 – Des ellipses centrées sur l'axe des abscisses

Considérons les quatre fonctions caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned}
 F_{(4,1/2,0,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - \frac{1}{2}))^2} \quad \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] ; \\
 F_{(4,2,0,3)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - 2))^2} \quad \text{si } x \in [\frac{1}{2}; \frac{7}{2}] ; \\
 F_{(4,2,-1,2)}(x) &= \sqrt{3^2 - (4(x - 3))^2} \quad \text{si } x \in [\frac{3}{2}; \frac{9}{2}] ; \\
 F_{(4,2,-1,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (4(x - 4))^2} \quad \text{si } x \in [3; 5].
 \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces quatre fonctions est respectivement les quatre courbes ci-dessous plus deux triangles elliptiques ABC et CDE.

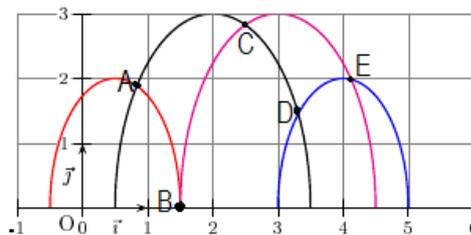


Figure 11 – Des demi-ellipses centrées sur l'axe des abscisses

**Moralité 1.** Ainsi, nous constatons que pour  $b = 0$ , alors  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e+}(x) = +\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x - a)^2} + b$  et  $F_{(\alpha, a, b, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (\alpha)^2(x - a)^2} + b$  où  $(\alpha, a, b, r) \in \mathbb{R}^4$  représentent chacune une

demi-ellipse centrée sur l'axe des abscisses. De plus, en enlevant la représentation graphique de la fonction  $F_{(a, a, b, r)}^{e-}(x) = -\sqrt{r^2 - (a)^2(x - a)^2} + b$ , alors on obtient tout l'ensemble de demi-ellipse supérieure centrée sur l'axe des abscisses. Cette configuration pourra être dénommée « une configuration étendue » de configuration existant dans la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré. Elle engendre en effet de la configuration définissant les droites hyperboliques selon le modèle de Poincaré.

### 6.3. Construction d'un cercle à l'aide de ses fonctions caractéristiques

Comme nous avons déjà annoncé au paragraphe 4 proposition 4.3, la représentation graphique d'un cercle de centre  $I(a, b)$  et de rayon  $r$  n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions (cf. 12)  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  et  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$  définies par :  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}(x) = +\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$  et  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}(x) = -\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$ .

Ces deux fonctions sont appelées fonctions caractéristiques d'un demi-cercle.

**Exemple 3.** La représentation graphique du cercle  $C$  de centre  $I(-3, 2)$  et de rayon  $r = 4$  n'est autre que la réunion de deux courbes représentatives de deux fonctions  $F_{(1, -3, 2, 4)}^{c+}$  et  $F_{(1, -3, 2, 4)}^{c-}$  définies par :  $F_{(1, -3, 2, 4)}^{c+}(x) = +\sqrt{4^2 - (x + 3)^2} + 2$  et  $F_{(1, -3, 2, 4)}^{c-}(x) = -\sqrt{4^2 - (x + 3)^2} + 2$  (figure 12).

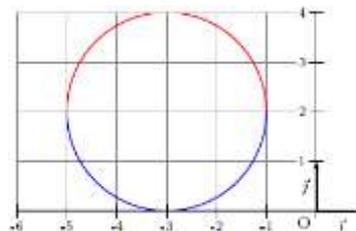


Figure 12 – Cercle de centre  $I(-3 ; 2)$  et de rayon 4

### 6.4. Implication de cette approche à l'étude analytique de la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré

Notons que les deux fonctions  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  et  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$  caractérisant un cercle de rayon  $r$  et de centre  $I(a, b)$  sont toutes définies et bien continues sur le même intervalle borné  $[a - r ; a + r]$ .

Par ailleurs, pour  $b = 0$  et en enlevant la courbe de  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$  on obtient les manants de Poincaré.

**Exemple 4.** La droite de Poincaré suivante est la représentation graphique de la fonction  $F_{(1, 0, 0, 4)}^{c+}(x) = +\sqrt{4^2 - (x)^2}$ .

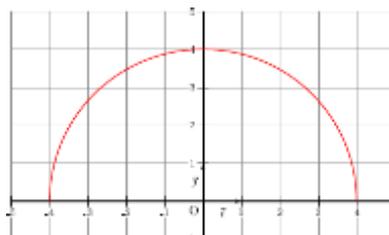


Figure 13 – Un manant de Poincaré classique

On peut même tracer les différents polygones elliptiques à l'aide des fonctions caractéristiques définissant un cercle.

**Exemple 5.** Soient  $F_{(1, 0, 4, 2)}^{c+}$ ,  $F_{(1, 0, 0, 2)}^{c+}$ ,  $F_{(1, 4, 4, 2)}^{c+}$ ,  $F_{(1, 4, 0, 2)}^{c+}$  quatre fonctions définies par :

$$\begin{aligned} F_{(0,4,2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - x^2} + 4 && \text{si } x \in [0; 2] ; \\ F_{(0,0,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - x^2} && \text{si } x \in [0; 2] ; \\ F_{(4,4,2)}(x) &= -\sqrt{2^2 - (x-4)^2} + 4 && \text{si } x \in [2; 4] ; \\ F_{(4,0,2)}(x) &= \sqrt{2^2 - (x-4)^2} && \text{si } x \in [2; 4]. \end{aligned}$$

La représentation graphique de chacune de ces quatre fonctions est les quatre courbes ci-dessous, représentant un carré elliptique, comme indiqué dans la figure ci-dessus (cf. figure 14).

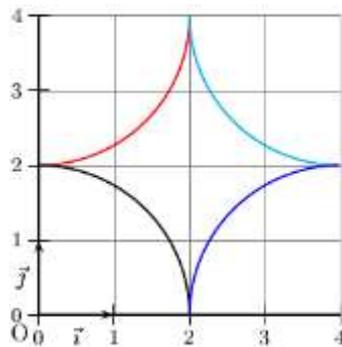


Figure 14 – Un carré elliptique

**Remarque 3.** La possibilité de construire d'autres polygones hyperboliques se déduit naturellement de celle de carré hyperbolique.

### 7. Transformation d'une trajectoire circulaire en une trajectoire rectiligne

Il est bien connu qu'un mouvement est dit circulaire lorsque sa trajectoire est un cercle. Alors qu'au même moment, qu'un mouvement est dit rectiligne si sa trajectoire est une droite. Par la suite, la conversion d'une trajectoire circulaire en trajectoire rectiligne consiste à transformer les deux fonctions  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  et  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$  en fonctions affines. Ce qui va servir à construire et/ou à chercher une transformation ( $F_{c \rightarrow d}$  par exemple) qui peut rendre ces fonctions en fonction affine. Soit  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  une fonction définie sur l'intervalle borné  $[a - r ; a + r]$  par :  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}(x) = +\sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b$ . D'abord, à une transformation près, cette fonction peut s'écrire  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}(x) = +r\sqrt{1 - (X)^2} + b$  avec  $X = \frac{x-a}{r}$ . Rappelons au passage que si  $-1 \leq X \leq 1$ , alors  $a - r \leq x \leq a + r$ . A cet effet, considérons maintenant une fonction  $F_{c \rightarrow d}$  définie par :  $F_{c \rightarrow d}(x) = \sqrt{1 - (X)^2}$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} F_{(1, a, b, r)}^{c+} \circ F_{c \rightarrow d}(x) &= r\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - (X)^2}\right)^2} + b \\ &= rX + b \\ &= x + b - a \\ &= x + \lambda \text{ avec } \lambda = b - a. \end{aligned}$$

**Moralité 2.** La fonction  $F_{c \rightarrow d}$  ainsi définie est appelée fonction de conversion permettant de transformer les fonctions  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  et  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$  caractérisant un cercle en fonction affine. En d'autres termes, si un corps homogène subit un mouvement circulaire tel que sa trajectoire est engendrée par un cercle de rayon  $r$  et de centre  $I(a ; b)$ , alors son transformé rectiligne a pour trajectoire droite telle  $x \mapsto x + \lambda$ , avec  $\lambda = b - a$ .

### 8. Transformation d'une trajectoire rectiligne en une trajectoire circulaire

Cette fois ci, partons de la fonction  $g_d$  définie par :  $g_d(x) = \varepsilon x + \delta$ . Par la suite, la conversion d'une trajectoire rectiligne à une trajectoire circulaire consiste à transformer la fonction  $g_d$  à la fonction  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  ou  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$ . Il s'agit de construire et/ou de chercher une transformation  $F_{d \rightarrow c}$  par exemple) qui peut rendre cette fonction affine à une fonction  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  ou  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$ . A cet effet, considérons maintenant une fonction  $F_{d \rightarrow c}$  définie par :  $F_{d \rightarrow c}(x) = \sqrt{r^2 + (x/\varepsilon)^2} + b$ . Cette fonction permet de transformer la fonction  $g_d$  en une cercle de rayon  $r$  et de centre  $I(0 ; b)$  tel que :  $g_d(x) = \varepsilon x + \delta$  et  $F_{d \rightarrow c}(x) = \sqrt{r^2 + (x/\varepsilon)^2} + b$  on a :

$$\begin{aligned} F_{c \rightarrow d} \circ g_d(x) &= \sqrt{r^2 - \left( \frac{\varepsilon \left( x + \frac{\delta}{\varepsilon} \right)}{\varepsilon} \right)^2} + b \\ &= \sqrt{r^2 - \left( x + \frac{\delta}{\varepsilon} \right)^2} + b \\ &= \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b \text{ avec } a = -\frac{\delta}{\varepsilon} \end{aligned}$$

**Moralité 3.** La fonction  $F_{d \rightarrow c}$  ainsi définie est appelée fonction de conversion permettant de transformer une fonction affine à la fonction  $F_{(1, a, b, r)}^{c+}$  ou  $F_{(1, a, b, r)}^{c-}$ . Autrement dit, si un corps homogène subit un mouvement rectiligne tel que sa trajectoire est une droite de la forme  $x \mapsto \varepsilon x + \delta$  alors son transformé circulaire a pour trajectoire circulaire et cette trajectoire est engendrée par le cercle de rayon  $r$  et de centre  $I(a, b)$  tel que  $a = -\frac{\delta}{\varepsilon}$ .

### 9. Conclusion et Perspectives

En guise de synthèse, nous avons vu qu'à l'aide des fonctions caractéristiques déterminant la construction d'une ellipse, nous avons pu annoncer qu'elles sont, entre autres, des outils très commodes pour effectuer les recherches quant aux propriétés mathématiques relatives à une ellipse. En effet, elles permettent d'obtenir la voie d'une construction de manant de Poincaré. De plus, elles nous ont conduit également de prouver qu'une ellipse est aussi symétrique par rapport à son grand axe, segment portant les deux foyers et limités à ses deux extrémités par la courbe. Elle est enfin symétrique par rapport à son petit axe, segment perpendiculaire au grand axe en son milieu. Ainsi, à l'aide des études des extremums de ces deux fonctions, nous avons pu voire facilement les cinq points caractérisant une ellipse, à savoir les quatre sommets. Par ailleurs, avec TICE, nous avons remarqué que cette approche est bien adaptée en classe de 1<sup>ère</sup> pour anticiper l'approfondissement de l'étude analytique d'une conique. Par ailleurs, dans le souci de l'Education Pour Tous (EPT) et de la

continuité du programme scolaire de mathématiques au niveau de lycée, nous avons constaté que cette approche défend les pertinences et faisabilité de l'introduction précoce des coniques propres dès la classe de 1<sup>ère</sup> en empruntant une approche épistémologique. Une telle didactique de la géométrie engendrerait une pédagogie constructiviste débouchant sur une mise en place de véritables compétences multifonctionnelles. Enfin, ce modeste travail nous a permis de trouver la conversion d'une trajectoire circulaire en trajectoire rectiligne et celle rectiligne en trajectoire circulaire utilisant la composition respective d'une ellipse par une ellipse et d'une ellipse par une droite via les deux ellipses  $F_{c \rightarrow d}$  et celle de  $F_{d \rightarrow c}$ . A cet effet, pour anticiper l'enseignement des ellipses, nous, les enseignants des mathématiques, avons le devoir de sensibiliser tous les concepteurs du programme de lycée afin d'introduire l'enseignement de la géométrie elliptique via l'utilisation des fonctions caractéristiques dès la classe de 1<sup>ère</sup> en profitant du fait qu'elles engendrent une théorie de la géométrie hyperbolique selon le modèle de Poincaré entendu, pour équilibrer ainsi l'enseignement exclusif de la géométrie euclidienne.

### Références

- Armand. (2017). *Etudes algébrique, géométrie et analytique des fonctions homographiques et applications* (Mémoire de master 2, ENSET, Université d'Antsiranana Madagascar).
- Artigue M. & Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. Dans *RDM*, 3(1), 5-64.
- Berté A. (1995). Réflexion sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classe. Dans *Petit x*, 40, 41-63.
- Berthelot R. & Salin M.-H. (1994). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Dans *Grand N*, 53, 39-56.
- Berthelot R. & Salin M.-H. (1999). L'enseignement de la géométrie de l'espace à l'école. Dans *Grand N*, 65, 37-61.
- Berthelot R. & Salin M.-H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? Dans *Petit x*, 56, 5-34.
- Boule F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Paris France : Nathan.
- Bouzari, A. (2015). Les sections coniques d'Apollonius dans la tradition mathématique arabe : un exemple de circulation. Dans E. Barbin et J. L. Maltret (dir.), *Les mathématiques méditerranéennes : d'une rive et de l'autre* (p. 41-47). Paris, France : Ellipses.
- Brousseau, G. (1983). Étude de questions d'enseignement, un exemple la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique IMAG*, Université J. Fourier de Grenoble.
- Colmez F. & Parzysz B. (1993). Le vu et le su dans l'évolution des dessins de pyramides du CE2 à la 2<sup>nde</sup>. Dans A. Bessto, P. Verillon & N., Balacheff (dir.), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (p. 35-55). Grenoble, France : La pensée sauvage éditions.
- Duval R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? Dans *Petit x*, 31, 37-61.
- Duval R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Dans *Repères-IREM*, 17, 121-138.
- Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Dans *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.
- Houdement C. & Kuzniak A. (1999). Réflexion sur l'enseignement de la géométrie. Dans *Grand N*, 64, 65-78.
- Kuzniak A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Paris 7, France : IREM.
- Laborde C. (1990). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. Dans *RDM*, 9(3), 337-364.
- Noirfalise R. (1991). Figures prégnantes en géométrie. Dans *Repères-IREM*, 2, 51-58.

- Parzysz Bernard (1988). Voir et savoir la représentation du « perçu » et du « su » dans les dessins de la géométrie de l'espace. Dans *Bulletin de l'APMEP*, 364, 339-350.
- Robert Aline (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième. L'organisation des connaissances en niveau de conceptualisation. Dans *Petit x*, 63, 7-29.
- Salin M. H. (2004). L'enseignement de la géométrie au cycle 3. Dans *Bulletin de l'APMEP*, 454, 729-736.
- Sayac N. (2002). De l'exploration du quartier à la structuration de l'espace en GS. Dans *Grand N*, 69, 7-18.
- Totohasina, A. (2007). *Pertinence et faisabilité de l'introduction précoce des coniques*. Récupéré du site de l'IREM de l'université de la Réunion : irem.univ-reunion.fr
- Totohasina A. (dir.) & Armand. (2017). *Pertinence, faisabilité d'enseignement précoce de la géométrie hyperbolique*. Saarbruck, Allemagne : Maison d'éditions universitaires européennes.
- Tournes, D. (2012). Calculer avec des hyperboles et des paraboles. Dans E. Barbin (dir.) *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*. (p. 131-148). Paris, France : Vuibert.