

UTILISATION DES RESEAUX DE NEURONES POUR LA PREDICTION DU MOMENT RESISTANT D'UNE POUTRE EN BETON ARME

S. M. Randrianarisoa^{1*}, V. Razafinjato¹, J. L. Rakotomalala², S. Rakotondrabary³

¹ Ecole doctorale Ingénierie et géosciences, Université d'Antananarivo, niryvictor@gmail.com

² Institut Supérieur de Technologie d'Antananarivo, jean.lalaina@gmail.com

³ SOCOTEC Madagascar, soloniaina.rakotondrabary@socotec.com

* Auteur correspondant Tél : +261 34 20 865 58, ramitsinjo@yahoo.fr

Résumé :

Le moment résistant ultime est une valeur seuil à l'état d'équilibre d'une poutre en béton armé soumise en flexion simple, pour pouvoir évaluer sa résistance mécanique ou capacité portante par comparaison aux sollicitations qui lui sont soumises. La formule du moment résistant sera évaluée en premier lieu à partir des formules statiques issues du calcul du béton armé aux états limites (BAEL).

Cet article se veut comme une proposition d'un modèle numérique de prédiction du moment résistant à partir d'autres outils mathématiques plus redoutables tels que les réseaux de neurones, qui sont classés dans la méthode de l'intelligence artificielle. Dans ce travail, un modèle de type Perceptron multicouches avec une architecture MLP [5-50-1-1] est créé puis testé. Une erreur quadratique moyenne de 0,0119 et un coefficient de corrélation de Pearson égal à 0.9859 ont été trouvés comme meilleur résultat. Pour s'assurer de la fiabilité de prédiction, une évaluation des indicateurs d'écart s'impose nécessaire, afin de quantifier et mesurer l'erreur de prédiction commise par notre réseau. Finalement, avant que le réseau puisse être employé avec n'importe quel degré de confiance, on a proposé d'analyser sa performance afin d'évaluer le pouvoir prédictif du réseau.

Mots clés : Critère de Nash-Sutcliffe, état limite ultime, flexion simple, Perceptron multicouches, intelligence artificielle

I. Introduction

En mécanique des structures, la flexion simple désigne l'état de sollicitation d'une section soumise à un moment fléchissant et à un effort tranchant dus à des charges dirigées dans un plan principal de la pièce. Dans le cadre de ce travail, la pièce considérée sera une poutre en béton armé, dont la section transversale est rectangulaire. Les règles normatives de conception et de calcul des ouvrages en béton armé sont prescrites par le BAEL 91 révisé 99, qui restent encore valides et exploitées par les ingénieurs de nos jours. A partir des concepts du BAEL, on déduit la formule du moment résistant ultime de la poutre, en fonction des variables d'entrées liées à la performance des matériaux utilisés (béton et acier), aux dimensions transversales de la pièce étudiée (largeur et hauteur) et de la section d'armature enrobée dans le béton.

Parmi la base fondamentale des neurosciences, les réseaux de neurones sont connus comme une modélisation informatique s'inspirant du fonctionnement du cerveau humain capable à apprendre puis décider, prédire ou classifier, et permettant ainsi de construire un modèle de comportement à partir des données qui lui sont fournies. Vu ses différents avantages, l'intelligence artificielle est très utilisée dans les domaines de la robotique et de l'aéronautique, mais est-ce qu'elle est fiable pour le calcul des ouvrages en béton armé?

L'objectif de ce travail consiste ainsi à utiliser les réseaux de neurones artificiels (RNA) pour prédire le moment résistant ultime d'une poutre en béton armé. Mais pour s'assurer du pouvoir prédictif de notre modèle neuronal, une analyse de fiabilité et analyse de performance sera évaluée respectivement avant que le modèle puisse être employé et exploité par nos ingénieurs avec n'importe quel degré de confiance.

II. Méthodologie

II.1. Revue des méthodes existantes

Une revue des méthodes existantes nous permettra de bien mener notre étude. Ainsi, nous pouvons citer : la méthode de détermination du moment résistant ultime et le principe du Perceptron Multi-couches (PMC ou MLP en anglais).

II.1.1. Equation du moment résistant ultime

Nous illustrons par la figure 1 les sollicitations internes d'une poutre rectangulaire en béton armé :

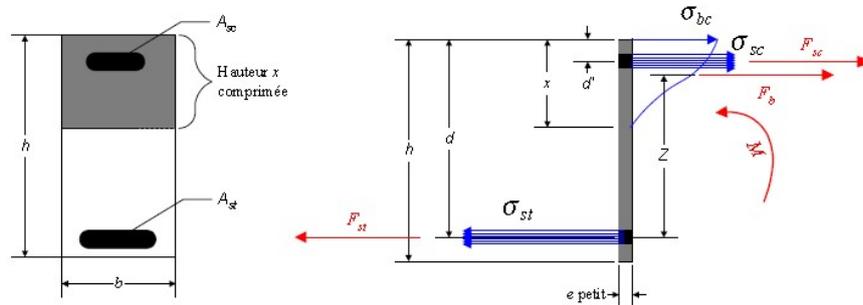


figure 1 : Section transversale d'une poutre et forces internes

1. Bilan des efforts :

F_{st} , F_{sc} : efforts dans les aciers tendus et comprimés.

F_b : effort dans le béton comprimé (nul dans le béton tendu).

M_r : moment de flexion.

2. Equilibre statique :

$$F_b + F_{sc} - F_{st} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_{/ \text{aciers tendus}} : M_r - ZF_b - F_{sc}(d - d') = 0 \rightarrow M_r = ZF_b + F_{sc}(d - d') \quad (2)$$

3. Recherche de la position de la fibre neutre :

x désigne la position de la fibre neutre, illustrée par la figure suivante :

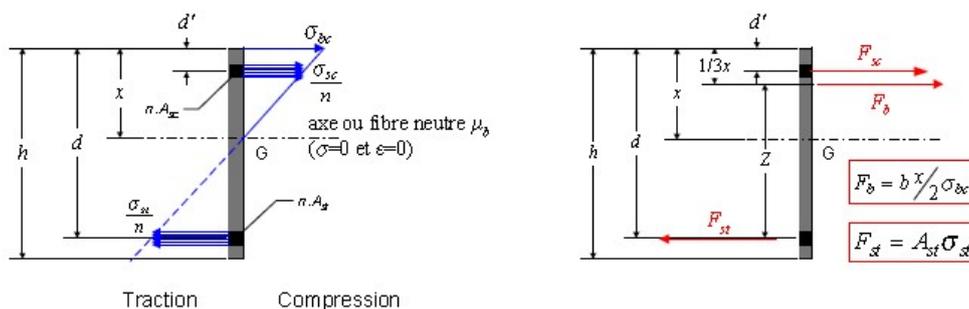


figure 2 : Position de l'axe neutre

$$F_b = b \frac{x}{2} \sigma_{bc} \quad (3)$$

$$F_{sc} = A_{sc} \sigma_{sc} \quad (4)$$

$$F_{st} = A_{st} \sigma_{st} \quad (5)$$

En introduisant (3), (4), (5) dans l'équation (1), on a :

$$b \frac{x}{2} \sigma_{bc} + A_{sc} \sigma_{sc} - A_{st} \sigma_{st} = 0 \quad (6)$$

Il y a variation linéaire, donc : $\frac{\sigma_{bc}}{x} = \frac{\sigma_{st}/n}{(d-x)} = \frac{\sigma_{sc}/n}{(x-d')}$ (7)

$n = \frac{E_s}{E_c}$ est le coefficient d'équivalence acier-béton (8)

D'après (7) et (8), on a donc : $\sigma_{st} = \frac{\sigma_{bc}(d-x)n}{x}$ et $\sigma_{sc} = \frac{\sigma_{bc}(x-d')n}{x}$ (9)

En introduisant (9) dans (6) on a : $b x^2/2 + A_{sc} \frac{(x-d')n}{x} - A_{st} \frac{(d-x)n}{x} = 0$ (10)

x est ainsi la solution de l'équation du second degré suivante :

$$b \frac{x^2}{2} + nA_{sc}(x - d') - nA_{st}(d - x) = 0 \quad (11)$$

4. Recherche de l'équation du moment résistant :

Dans l'équation (2), les inconnues sont Z et F_b

On recherche ainsi les valeurs de x et Z suivant l'équation (1) avec :

$$F_b = 0.8xbf_{bu} \quad (12)$$

$$F_{sc} = A_{sc}f_{su} \quad (13)$$

$$F_{st} = A_{st}f_{su} \quad (14)$$

En introduisant (12), (13), (14) dans l'équation (1), on a :

$$0.8xbf_{bu} + A_{sc}f_{su} - A_{st}f_{su} = 0 \quad (15)$$

- En conséquence : $x = \frac{f_{su}}{0.8bf_{bu}} (A_{st} - A_{sc})$ (16)

- Il vient alors : $Z = d - \frac{0.8}{2} x$ (17)

En introduisant (17), (12), (13) dans l'équation (2), on aurait :

$$M_r = (d - \frac{0.8}{2} x)(0.8xbf_{bu}) + A_{sc}f_{su}(d - d') \quad (18)$$

En développant l'équation (18), on a :

$$M_r = 0.8xbd f_{bu} - 0.32 b f_{bu} x^2 + A_{sc}f_{su}(d - d') \quad (19)$$

En introduisant la valeur de x suivant (16) dans l'équation (19), on a :

$$M_r = d f_{su} (A_{st} - A_{sc}) - 0.50 \frac{f_{su}^2}{b f_{bu}} (A_{st} - A_{sc})^2 + A_{sc}f_{su}(d - d') \quad (20)$$

$$\text{Ou } M_r = -\frac{f_{su}^2}{2 b f_{bu}} (A_{st} - A_{sc})^2 + f_{su} [d A_{st} - d' A_{sc}] \quad (21)$$

En remplaçant les valeurs de f_{su} et f_{bu} , par :

$$f_{su} = f_e/\gamma_s \quad (22)$$

$$f_{bu} = 0.85 f_{cj}/\theta \gamma_b \quad (23)$$

$$\text{L'équation (21) devient : } M_r = -\frac{f_e^2 \theta \gamma_b}{1.70 \gamma_s^2 b f_{cj}} (A_{st} - A_{sc})^2 + \frac{f_e}{\gamma_s} [d A_{st} - d' A_{sc}] \quad (24)$$

Pour une combinaison fondamentale (cas courant), $\gamma_b = 1.5$ est le coefficient partiel de sécurité du béton et $\gamma_s = 1.15$ celui de l'acier.

Pour une durée d'application de charge $t > 24h$, on a $\theta = 1$ et l'équation (24) devient :

$$M_r = -\frac{0.6672 f_e^2}{b f_{cj}} (A_{st} - A_{sc})^2 + \frac{f_e}{1.15} [d A_{st} - d' A_{sc}] \quad (25)$$

Avec une approximation $d = 0.9h$, l'expression du moment résistant sera ainsi :

$$M_r[f_{cj}; f_e; b; h; d'; A_{sc}; A_{st}] = -\frac{0.6672 f_e^2}{b f_{cj}} (A_{st} - A_{sc})^2 + \frac{f_e}{1.15} [0.9h A_{st} - d' A_{sc}] \quad (26)$$

Dans le cas courant de nos expertises de construction, pour le calcul du moment résistant en travée, on s'intéresse plutôt à la section d'armature tendue de la poutre, prenons ainsi $A_{sc} = 0$ (dans le cas pratique)

Finalement l'équation (26) devient :

$$M_r[f_{cj}; f_e; b; h; A_{st}] = -\frac{0.6672 \cdot 10^{-6}}{b f_{cj}} (f_e A_{st})^2 + 0.7826 \cdot 10^{-2} h f_e A_{st} \quad (27)$$

Avec les unités : M_r [Tm] f_{cj} et f_e [MPa] b et h [m] A_{st} [cm²]

II.1.2. Réseaux de neurones sigmoïdes

1. Architecture

Le perceptron multi-couches PMC (ou MLP) est un des réseaux de neurones les plus utilisés pour des problèmes d'approximation, de classification et de prédiction. Il est composé d'une couche d'entrée, une couche de sortie et une ou plusieurs couches cachées. Les éléments de deux couches adjacentes sont interconnectés par des poids assurant la liaison des différentes couches comme indiqué sur la figure suivante. Sa fonction d'activation est la **tangente hyperbolique**.

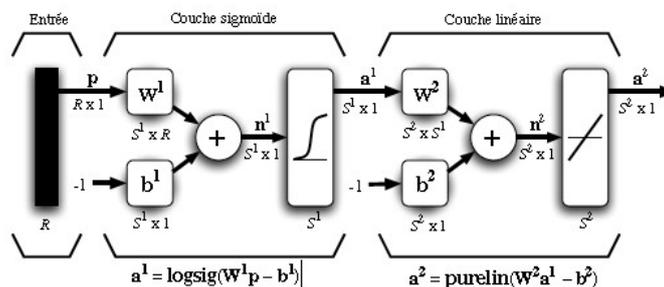


figure 3 : Architecture du réseau MLP

Soit : w_{nm} les poids reliant la couche d'entrée avec la couche cachée ;

u_{mj} les poids reliant la couche cachée avec celle de la sortie.

Les composants du vecteur d'entrée X du MLP seront pondérés par les poids w_{nm} et ensuite transmis à la couche cachée selon les équations suivantes :

$$C_m = \sum_{n=1}^N x_n w_{nm} \quad (28)$$

$$y_m = f(C_m) \quad (29)$$

Les sorties de la couche cachée seront aussi pondérés par les poids u_{mj} et transmis ensuite à la couche de sortie selon les équations suivantes :

$$O_j = \sum_{m=1}^M y_m u_{mj} \quad (30)$$

$$t_j = g(O_j) \quad (31)$$

f et g représentent respectivement les fonctions d'activations des neurones de la couche cachée et celle de la couche de sortie. Pour notre cas, elles sont des sigmoïdes.

$$\text{La fonction sigmoïde est : } f(x) = \frac{1}{1+e^{-ax}} \quad (32)$$

$$\text{Sa dérivée est : } f'(x) = \alpha \cdot f(x)[1 - f(x)] \quad (33)$$

2. Algorithme d'apprentissage

L'apprentissage consiste à adapter les valeurs des poids, afin d'obtenir le comportement désiré du MLP. Pour cela, on se crée une base d'exemples où chaque exemple est constitué d'un vecteur d'entrée et d'un vecteur de sortie approprié. Un algorithme d'apprentissage connu sous le nom d'algorithme de rétropropagation du gradient a été mis en place en 1985 par Rumelhart et Al. [6].

Ainsi l'adaptation des poids u_{mj} qui relie la couche cachée à celle de la sortie est comme suite :

$$u_{mj}^{(i+1)} = u_{mj}^{(i)} + n_1 \cdot (t_j - z_j) g'(O_j) y_m \quad (34)$$

La mise à jour des poids w_{nm} reliant la couche d'entrée à celle cachée est comme suite :

$$w_{nm}^{(i+1)} = w_{nm}^{(i)} + n_2 \cdot \left\{ \sum_{j=1, i=1}^J (t_j - z_j) g'(O_j) u_{mj} \right\} (f'(C_m))(x_n) \quad (35)$$

n_1 et n_2 sont les pas d'apprentissage.

II.2. Formulation mathématique du modèle

Le moment résistant de la poutre est ainsi modélisé en fonction des variables d'entrées du processus telles que : la résistance caractéristique du béton, la limite d'élasticité de l'acier, la largeur de la poutre, la hauteur de la poutre et la section d'armature tendue par l'équation suivante :

$$Y = f[X_i] = -\frac{0.6672 \cdot 10^{-6}}{X_3 X_1} (X_2 X_5)^2 + 0.7826 \cdot 10^{-2} X_4 X_2 X_5 \quad (36)$$

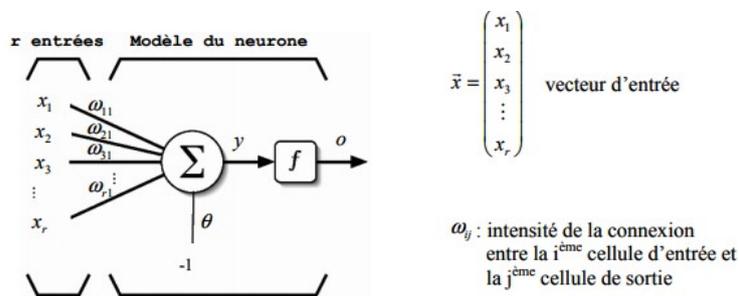


figure 4 : Modèle mathématique du système

Le tableau suivant montre les plages de variation de chaque variable d'entrée :

tableau 1 : Plage de variation des paramètres

Variable	Désignation	Unités	Plage de variation
X1	Résistance à la compression du béton	MPa	[16 : 60]
X2	Limite d'élasticité garantie de l'acier	MPa	[400 : 600]
X3	Largeur de la poutre	m	[0.20 : 0.50]
X4	Hauteur de la poutre	m	[0.20 : 0.70]
X5	Section d'armature tendue	cm ²	[0.323 : 54.74]

II.3. Approche neuronale du moment résistant

Pour faire la simulation, une base de données composée de 714 échantillons a été prise. L'ensemble des données utilisées pour le développement du modèle RNA sont divisées en trois parties : 70% de l'ensemble pour l'apprentissage, 20% pour le test et 10% pour la validation.

L'ensemble d'apprentissage est utilisé pour déterminer les valeurs des poids significatifs du réseau. La validation est nécessaire pour évaluer la capacité de généralisation de l'algorithme. Une vérification finale de performance du réseau est faite par l'utilisation de l'ensemble de test. Par ailleurs, les indicateurs d'écart seront utilisés comme une mesure de performance du réseau.

Le réseau étudié est un *Feed-Forward* de type MLP avec un algorithme d'apprentissage de type rétro-propagation de gradient d'erreur.

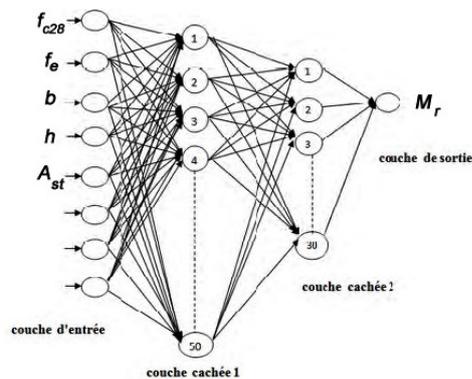


figure 5 : Schématisation du réseau neuronal

Une architecture de type MLP [5-50-1-1] est choisie avec une seule couche cachée composée de 50 neurones et fixons le nombre d'itérations à 15000 epochs. La performance à atteindre est de l'ordre de 10^{-7} .

II.4. méthode d'analyse de la performance du modèle

Avant que le réseau MLP [5-50-1-1] puisse être employé avec n'importe quel degré de confiance, il faut analyser sa performance et évaluer quantitativement les résultats qu'il produit.

Cette analyse consiste ainsi à proposer une série d'indicateurs de performances afin d'évaluer le pouvoir prédictif du réseau. Les indicateurs proposés permettent ainsi d'évaluer : LA FIDÉLITÉ, LA JUSTESSE et L'EXACTITUDE d'un modèle.

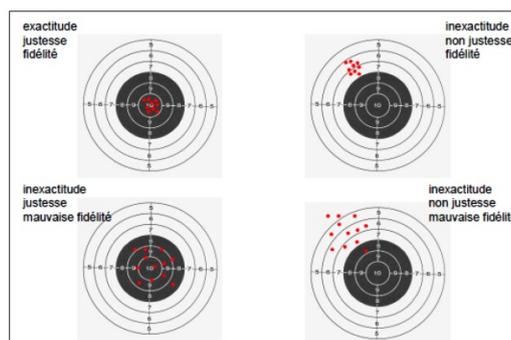


figure 6 : Critères de performance selon les indicateurs

II.4.1. Les indicateurs généraux

1. Le biais – Critère de fidélité

Une première condition souhaitée dans la validation est un modèle sans biais. C'est-à-dire que la moyenne de tous les écarts e_i se rapproche le plus possible de zéro. Le biais peut être calculé comme suit :

$$biais = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_{réel,i} - Y_{prédit,i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \quad (37)$$

2. Critère RMSE – Critère d'exactitude

Le critère RMSE (Root Mean Square Error) permet de faire le calcul de l'amplitude des écarts qui peut se caractériser par la moyenne des carrés des écarts e_i .

Le calcul est le suivant :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (38)$$

Lorsque l'on utilise l'indicateur sans la racine carrée, nous obtenons un autre indicateur, que l'on l'appelle MSE (Mean Square Error).

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (39)$$

Cette déclinaison du RMSE, exprimé en unité de la variable Y au carré est également très utile pour des explications complémentaires de l'exactitude du modèle.

→ Plus la valeur des critères RMSE ou MSE est proche de zéro, meilleur est le modèle évalué en terme d'exactitude.

3. Variance – Critère de justesse

La variance du terme e_i au cours de tout l'intervalle temporel de simulation sera définie comme la « justesse » de la modélisation.

On peut calculer la justesse σ_e^2 grâce à l'équation suivante [8] :

$$\sigma_e^2 = RMSE^2 - biais^2 \rightarrow RMSE = \sqrt{\sigma_e^2 + biais^2} \rightarrow MSE = \sigma_e^2 + biais^2 \quad (40)$$

Ainsi, un modèle jugé fidèle au travers du biais (proche de zéro) peut être très inexact (valeurs de RMSE et le MSE élevées) du fait de la variabilité des écarts ou de la justesse (valeurs de σ_e^2 élevées) [8].

II.4.2. Les indicateurs normalisés

Dans les indicateurs normalisés, une valeur de performance de référence ou une performance relative dans chaque indicateur est établie pour pouvoir normaliser l'évaluation du modèle.

Effectivement, la grande force des critères normalisés est d'être sans dimension, ce qui permet notamment de comparer des modèles entre eux. Dans la suite, nous allons présenter des indicateurs normalisés qui permettront d'amener plus d'informations sur la pertinence d'un modèle.

1. Critère de Nash-Sutcliffe

Le critère de Nash-Sutcliffe est un indicateur de performance construit à partir de la normalisation du MSE, dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle $]-\infty; 1]$.

Il permet d'estimer la capacité d'un modèle à reproduire un comportement observé.

Il se calcule comme suit :

$$NS = 1 - \frac{MSE}{\sigma_Y^2} \rightarrow NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{réel,i} - Y_{préd,i})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_{réel,i} - \bar{Y}_{réel})^2} \quad (41)$$

Plus la valeur obtenue pour ce critère est proche de 1, meilleure est l'adéquation du modèle aux valeurs observées. Il est généralement admis que le critère de Nash-Sutcliffe doit être supérieur à 0,7 pour pouvoir affirmer qu'un modèle est satisfaisant, c'est à dire que le modèle et les valeurs observées sont cohérents.

Un Nash en dessous environ de 0.6 démontre une mauvaise adéquation du modèle aux valeurs observées.

2. Critère RSR (RMSE standard deviation ratio)

Le RSR est un critère similaire au Nash-Sutcliffe, néanmoins moins utilisé, basé sur la normalisation du RMSE, au lieu du MSE. Il peut s'exprimer comme suit [7] :

$$RSR = \frac{RMSE}{\sigma_Y} \rightarrow RSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_{réel,i} - Y_{préd,i})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_{réel,i} - \bar{Y}_{réel})^2}} \quad (42)$$

→ Plus la valeur obtenue pour ce critère est proche de 0, meilleure est l'adéquation du modèle aux valeurs observées.

Une valeur qui indique une simulation acceptable devrait être inférieure à 0.2. Ce critère est interprétable comme le pourcentage de l'écart type σ_Y non-expliqué par le modèle.

3. Critère d'Erreur de Volume Relatif (RVE)

L'erreur de volume relatif est la somme des erreurs liées à la somme des valeurs observées, exprimées en valeur relative ou en pourcentage.

Pour cela, on divise le biais par le volume total de simulation comme suit :

$$RVE = \frac{\text{biais}}{\sum_{i=1}^n Y_{\text{réel},i}} \quad (43)$$

→ L'indicateur de RVE peut être interprété comme l'erreur sur le volume modélisé par rapport au volume total observé (en pourcentage, si on le souhaite). Plus le RVE est faible, meilleure est l'adéquation globale entre volume modélisé et observé.

III. Résultats et discussion

III.1. Apprentissage neuronal

L'apprentissage est de type supervisé. Sur les 70% de la base de données qui serviront d'apprentissage, une performance de $3.623 \cdot 10^{-7}$ est atteinte à 13816 epochs et l'équation de la droite de régression est de la forme **Output = 1*Target - 8.4*10⁻⁷** avec un coefficient de corrélation R=1. La figure 7 nous montre la performance du réseau :

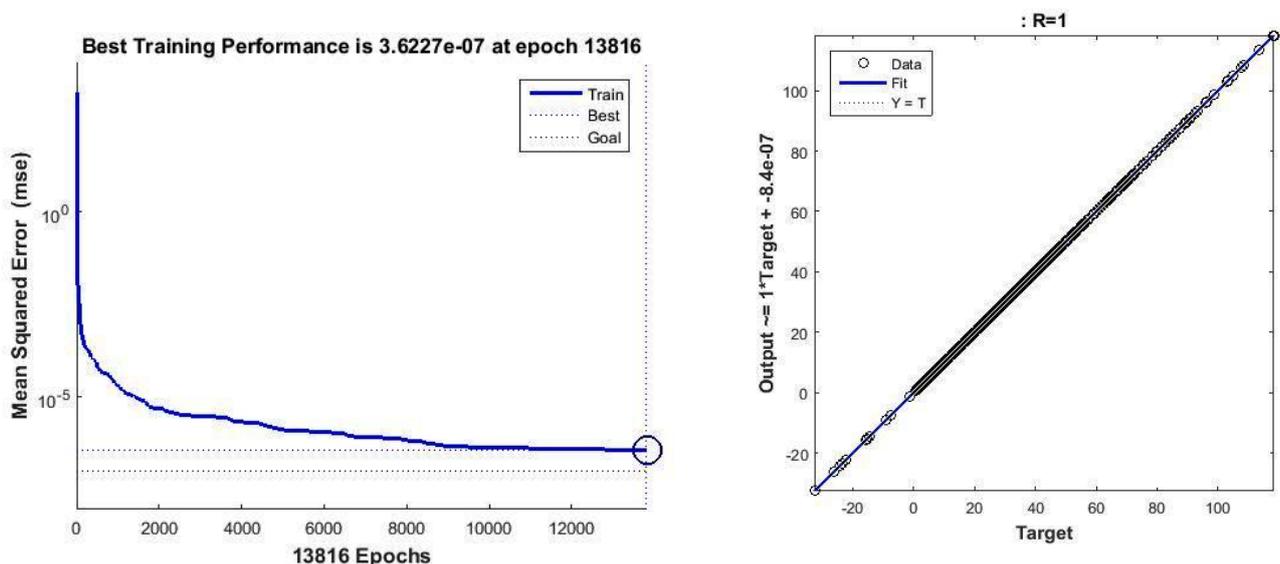


figure 7 : Performance du réseau MLP [5-50-1-1] et droite de régression

Afin d'analyser en détail la réponse du réseau, un autre moyen est d'effectuer la **régression linéaire** entre les sorties prédites par le réseau et les sorties cibles, qui peut être mesurée avec les paramètres [m, b, r] dont :

- **m** correspond à la pente, qui est meilleur pour une valeur égale à 1 ;
- **b** est l'intersection de la ligne droite optimale (liant les cibles aux sorties de neurones) avec l'axe y, qui est meilleur pour une valeur égale à 0 ;
- **r** est le coefficient de corrélation de Pearson, qui est meilleur pour une valeur égale à 1 (corrélation positive parfaite) ;

On a trouvé ainsi : $[m, b, r] = [1.0000, -8.420 \cdot 10^{-7}, 1.0000]$ et qui sont satisfaisants.

III.2. Phase reconnaissance ou Test

La phase test implique d'évaluer la performance du réseau sur des données qui n'ont pas été employées dans la phase d'apprentissage. Les solutions désirées et celles prédites par le réseau peuvent être comparées d'une façon qualitative, ou d'une façon quantitative en utilisant un test statistique.

Pour justifier la qualité prédictive du modèle, le réseau sera testé avec 143 échantillons tirés d'une manière aléatoire n'appartenant pas au modèle. La figure 8 indique les valeurs du moment résistant réel du modèle et celles prédites par le réseau MLP [5-50-1-1] :

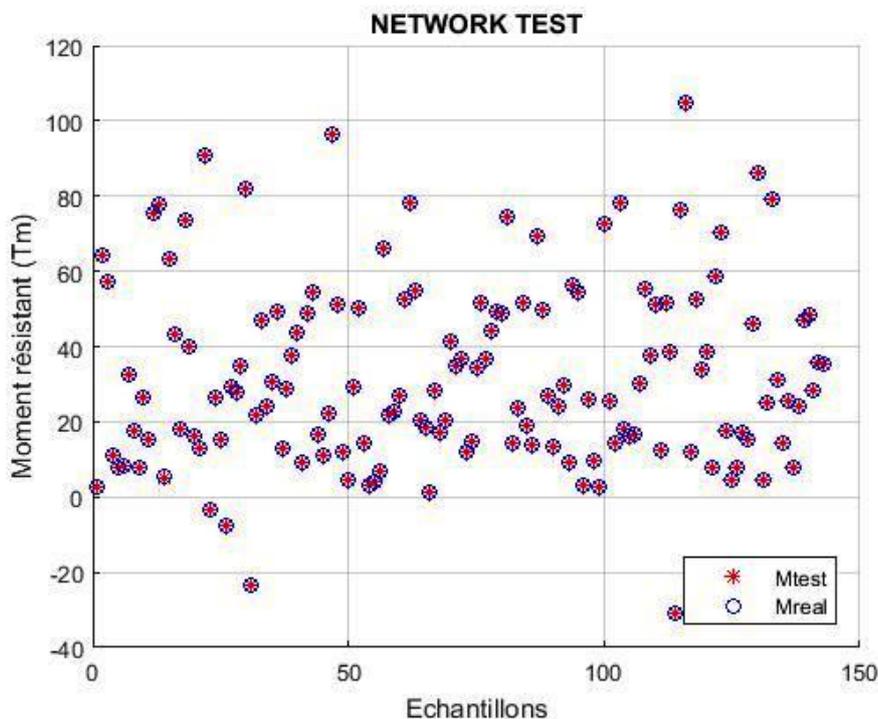


figure 8 : Graphique des sorties observées et des sorties prédites par le réseau MLP [5-50-1-1]

On voit bien que pour chaque échantillon testé, les valeurs prédites par le réseau (*) et les valeurs réelles (o) issues de l'équation (36) sont tous très rapprochées l'un de l'autre, justifiant ainsi la bonne qualité prédictive de notre réseau. Les erreurs de prédiction peuvent être évaluées qualitativement par la figure 8 :

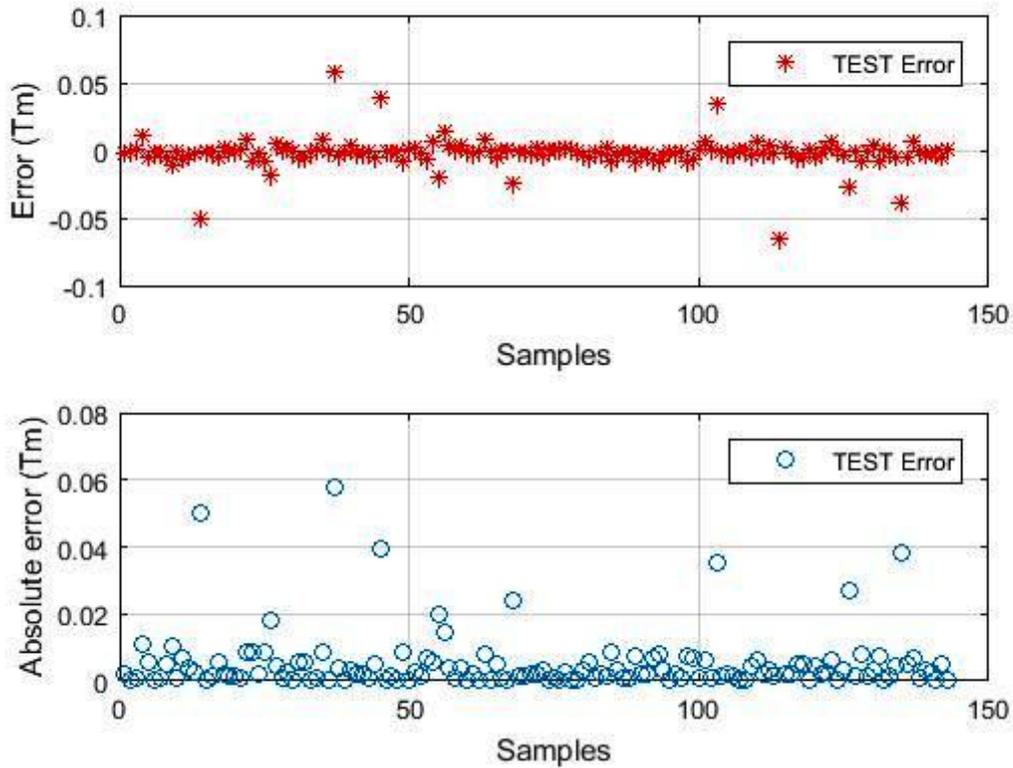


figure 9 : Erreurs de prédiction du réseau MLP [5-50-1-1]

Une erreur maximale de l'ordre de $0.06T_m$ en valeur absolue a été trouvée pour ces 143 échantillons. Les indices d'écart pour quantifier et mesurer l'erreur de prédiction du réseau pendant la phase test sont **MSE= $1.3120 \cdot 10^{-4}$** , **RMSE= 0.0115** et **MAE=0.0055**. Ils sont très satisfaisants avec un écart-type d'erreur **$\sigma_{\text{error}}=0.0114$** .

III.3. Phase validation

La validation de l'architecture neuronale MLP [5-50-1-1] consiste à juger sa capacité de prédiction en utilisant les poids et les biais calculés durant l'apprentissage, pour les appliquer à une autre base de données composée de 71 échantillons restants, qui n'ont pas participé à l'apprentissage et tests du modèle.

Le tableau 2 récapitule les résultats des sorties du réseau à partir des échantillons restants prises aléatoirement :

tableau 2 : Valeurs des sorties observées et sorties prédites par le réseau MLP [5-50-1-1]

N°	ENTREES					SORTIES		Ecart (Tm)
	f _{c28} (MPa)	f _e (MPa)	b (m)	h (m)	A _{st} (cm ²)	M _r (real) (Tm)	M _r (network) (Tm)	
1	25,7677	578,5720	0,2229	0,6367	0,8875	2,5281	2,5263	-0,0018
2	54,3122	466,3960	0,4340	0,6843	27,6335	64,3155	64,3149	-0,0005
3	25,0956	564,2458	0,3315	0,6346	27,3015	57,4749	57,4755	0,0006
4	56,4189	408,3393	0,4170	0,4654	7,6056	11,0387	11,0495	0,0108
5	37,4901	421,5313	0,4934	0,3164	8,0563	7,9920	7,9866	-0,0054
6	42,9167	519,0104	0,3615	0,2057	12,2163	8,4782	8,4782	0,0000
7	49,6999	505,9635	0,3503	0,4152	23,0970	32,7427	32,7417	-0,0009
8	38,8104	483,7615	0,2216	0,4012	13,8239	17,5268	17,5217	-0,0051
9	29,0592	467,0816	0,2805	0,4613	4,8973	7,8303	7,8199	-0,0105
10	24,2597	524,5039	0,3500	0,4392	19,1240	26,5699	26,5691	-0,0008
11	19,5526	487,6283	0,4038	0,4777	9,3985	15,3575	15,3508	-0,0067
12	48,4914	547,1764	0,4411	0,4717	48,1315	75,5857	75,5821	-0,0036
13	35,4176	503,6073	0,3143	0,5804	52,0716	77,9036	77,9011	-0,0025
14	22,9656	515,7717	0,2198	0,5562	2,4316	5,2510	5,2009	-0,0501
15	54,7172	529,0710	0,2864	0,5098	38,3663	63,4517	63,4515	-0,0002
16	28,0598	598,0449	0,4729	0,4130	31,4909	43,0430	43,0417	-0,0013
17	34,2263	563,9716	0,2640	0,3445	49,1899	17,9773	17,9716	-0,0057
18	29,0275	482,6402	0,3356	0,6869	36,6136	73,6136	73,6158	0,0022
19	43,6667	575,2535	0,4794	0,3669	30,1347	40,1951	40,1936	-0,0014
20	41,5129	564,7519	0,2075	0,3094	38,5470	15,9994	15,9981	-0,0013
21	42,3969	410,8949	0,3802	0,2329	21,3539	12,8060	12,8068	0,0009
22	27,6960	543,7274	0,4850	0,6914	38,1123	90,8058	90,8144	0,0086
23	28,5262	560,4341	0,2691	0,2639	45,2100	-3,4656	-3,4743	-0,0087
24	27,1579	547,2813	0,3645	0,3611	25,6633	26,3931	26,3908	-0,0023
25	30,4128	541,8264	0,4727	0,2355	51,5035	15,2864	15,2777	-0,0087
26	22,3432	508,1874	0,2400	0,3124	44,0601	-7,6524	-7,6702	-0,0178
27	23,2870	424,9648	0,3570	0,3968	53,8345	29,0444	29,0489	0,0045
28	58,4129	591,5295	0,4251	0,6481	9,5541	27,8054	27,8064	0,0010
29	58,2500	480,6513	0,4007	0,3727	28,6789	34,7779	34,7803	0,0024
30	24,2902	443,3902	0,3403	0,6924	51,7752	81,8562	81,8556	-0,0006

N°	f_{c28} (MPa)	f_e (MPa)	b (m)	h (m)	A_{st} (cm ²)	M_r (real) (Tm)	M_r (network) (Tm)	Ecart
31	17,0695	543,4552	0,2615	0,2144	35,6690	-23,6558	-23,6612	-0,0054
32	25,0004	598,8415	0,3472	0,3758	47,1669	21,7614	21,7558	-0,0056
33	46,7931	451,1228	0,3117	0,3905	53,1535	46,9757	46,9752	-0,0005
34	50,2986	534,2619	0,3432	0,5821	10,4196	24,1611	24,1620	0,0009
35	17,0091	519,8012	0,3098	0,6694	13,5526	30,6208	30,6292	0,0084
36	41,4172	543,4664	0,4514	0,3598	47,8509	49,0990	49,0984	-0,0006
37	16,0723	587,4699	0,4306	0,4162	49,6399	13,0076	13,0652	0,0576
38	38,6808	470,3620	0,2942	0,3351	41,5862	28,8605	28,8568	-0,0037
39	44,1510	450,7268	0,3718	0,6005	19,2004	37,6279	37,6274	-0,0004
40	59,3675	480,4945	0,2828	0,5191	25,5472	43,8821	43,8850	0,0030
41	27,4003	549,3021	0,3359	0,2343	33,5466	9,1762	9,1744	-0,0018
42	51,3099	544,8141	0,3059	0,5018	27,3292	49,0502	49,0480	-0,0022
43	54,3013	481,2216	0,3972	0,5978	26,3329	54,3159	54,3149	-0,0011
44	56,6010	597,8760	0,3111	0,2160	24,0246	16,4638	16,4585	-0,0053
45	16,0974	490,0999	0,3377	0,4277	47,6880	11,1964	11,2356	0,0392
46	36,6575	474,7617	0,4158	0,5951	10,5185	22,1651	22,1648	-0,0004
47	59,1846	541,9257	0,3239	0,6943	37,7442	96,5794	96,5779	-0,0015
48	33,5536	416,4917	0,4719	0,4920	38,6069	51,0161	51,0158	-0,0003
49	51,8042	479,6746	0,2541	0,2195	50,6696	11,8054	11,7968	-0,0086
50	40,0441	554,1762	0,4223	0,4232	2,4700	4,4597	4,4601	0,0004
51	49,9176	552,9502	0,3267	0,2941	35,5372	29,4285	29,4309	0,0025
52	37,3370	456,7719	0,3279	0,5135	35,0440	50,3683	50,3666	-0,0017
53	17,2809	437,9084	0,3903	0,3077	25,4472	14,5472	14,5407	-0,0065
54	19,8071	494,2502	0,3569	0,2755	3,2103	3,1832	3,1891	0,0059
55	20,9040	466,9612	0,3245	0,4681	2,4219	4,0170	3,9969	-0,0200
56	27,0548	546,9470	0,2004	0,2502	9,5484	6,8698	6,8841	0,0143
57	58,4563	437,8214	0,2277	0,5656	43,5599	66,1810	66,1851	0,0041
58	43,7977	466,2208	0,4128	0,6698	9,1715	21,7401	21,7411	0,0010
59	51,9330	568,8457	0,3573	0,6717	7,8727	22,8190	22,8226	0,0036
60	40,9076	523,0048	0,4088	0,3874	19,5277	26,8004	26,8003	-0,0001
61	43,9557	577,0528	0,4866	0,4979	26,6880	52,6078	52,6059	-0,0020
62	51,7237	595,3106	0,4049	0,5310	38,2917	78,1719	78,1719	0,0000
63	56,7740	567,3817	0,2159	0,4553	43,9195	54,9952	55,0033	0,0081

N°	f_{c28} (MPa)	f_e (MPa)	b (m)	h (m)	A_{st} (cm ²)	M_r (real) (Tm)	M_r (network) (Tm)	Ecart
64	56,1556	436,1649	0,2927	0,4354	14,8401	20,3568	20,3563	-0,0005
65	52,2917	523,6821	0,3778	0,2044	49,8140	18,7526	18,7473	-0,0053
66	20,1449	495,2218	0,2705	0,2339	1,5674	1,3473	1,3484	0,0011
67	31,8861	480,8313	0,4895	0,4174	20,7361	28,3206	28,3211	0,0006
68	17,5624	548,3767	0,4835	0,4157	11,1864	17,0024	16,9784	-0,0240
69	40,0398	565,1867	0,4545	0,2929	18,9774	20,3719	20,3707	-0,0013
70	51,0303	536,6460	0,3417	0,4649	24,4903	41,2027	41,2014	-0,0014
71	18,2503	427,8543	0,4524	0,4995	27,4303	34,7522	34,7503	-0,0018

Une erreur maximale de l'ordre de 0.0576Tm en valeur absolue a été trouvée pour ces 71 échantillons. Les indices d'écart pour quantifier et mesurer l'erreur de prédiction du réseau pendant la phase validation sont **MSE= 1.4095*10⁻⁴**, **RMSE= 0.0119** et **MAE=0.0059**. Et qui sont très satisfaisants avec un écart-type d'erreur $\sigma_{error}=0.0119$.

III.4. Analyse de la performance du modèle MLP [5-50-1-1]

Pour pouvoir valider la fiabilité du réseau MLP [5-50-1-1] entraîné, il fallait évaluer les indicateurs d'écart et analyser la performance du modèle à partir des 71 échantillons restants. Le tableau 3 montre les indicateurs d'écart entre la sortie observée et la sortie prédite par le modèle :

tableau 3 : indicateurs d'écart entre la sortie observée et la sortie prédite

N =	71	Nombre d'observations
SSE =	0,01001	somme des carrés des résidus (Sum of Squared Errors)
MSE =	0,000141	carré moyen des erreurs (Mean Squared Error)
RMSE =	0,0119	erreur quadratique moyenne (Root Mean Squared Error)
MAE =	0,0059	erreur absolue moyenne (Mean Absolute Error)
MAPE =	0,047 %	erreur absolue moyenne en pourcentage (Mean Absolute Percentage Error)
r =	0.9859	coefficient de corrélation de Pearson

Le coefficient de corrélation Pearson entre $Y_{réel}$ et $Y_{préd}$ mesure la force de la relation linéaire entre la sortie observée et la sortie prédite. Il est donné par la formule 44 :

$$r = \frac{COV(Y_{réel}, Y_{prédit})}{\sqrt{VAR(Y_{réel}) * VAR(Y_{prédit})}} \quad (44)$$

Le tableau 4 récapitule les valeurs des indicateurs de performance du modèle :

tableau 4 : indicateurs de formance du modèle MLP [5-50-1-1]

indicateurs généraux	Critère de fidélité	biais =	0,000797	~ 0 : modèle fidèle
	Critère d'exactitude	RMSE=	0,011872	~ 0 : meilleur modèle évalué en termes d'exactitude
		MSE=	0,000141	
	Critère de justesse	$\sigma e^2=$	0,000140	~ 0 : meilleur justesse
indicateurs normalisés	Critère Nash-Sutcliffe	NS=	0,9999998	> 0,7 : meilleure adéquation du modèle aux valeurs observées
	Critère RSR	RSR=	0,000474	< 0,2 : simulation acceptable
	Critère RVE	RVE=	0,000036%	~ 0 : meilleure adéquation globale entre volume modélisé et observé.

Pour chaque indicateur d'écart évalué, on conclut une meilleure adéquation entre la sortie réelle et la sortie prédite par RNA.

IV. Conclusion

Dans cette étude, l'apprentissage du modèle neuronal MLP développé a été effectué en déterminant les poids et les biais, à l'aide de l'algorithme de Rétropropagation du gradient d'erreur. L'architecture étudiée et retenue de ce modèle est l'architecture MLP [5-50- 1-1], qui a permis d'obtenir une erreur quadratique moyenne de 0,0119 et un coefficient de corrélation de Pearson égal à 0.9859, ce qui représente le meilleur résultat.

Après l'analyse et évaluation des différents critères de performance définis, on a un modèle qui est à la fois fidèle, exacte et juste. Le Nash-Sutcliffe calculé est égal à 0,9999998, ce qui indique une meilleure adéquation du modèle aux valeurs observées.

Pour conclure, notre modèle MLP [5-50-1-1] est très performant et peut être utilisé et exploité par nos ingénieurs pour pouvoir évaluer le moment résistant d'une poutre en béton armé avec un taux de fiabilité élevé.

V. Références

- [1] B. Mohammed, Z. Abdeldjalil et D. Abdelkader (2015). " Prédiction de l'indice CBR par une approche neuronale ». *in ResearchGate*.
- [2] Mohamed Nohair, André St-Hilaire et Taha. B. Ouarda (2008). Utilisation des réseaux de neurones et de la régularisation bayésienne en modélisation de la température de l'eau en rivière. *Érudit/Revue/Revue des sciences de l'eau / Journal of Water Science/Volume 21, numéro 3, 2008, p. 259-382*.
- [3] N. BOURAHLA et R. TALEB (2003). Prédiction des mécanismes de ruine dans les portiques sous l'action sismique par les réseaux de neurones. *In Colloque International Risque*. Alger, Algérie.
- [4] H. EL BADAQUI , A. ABDALLAOUI et S. CHABAA (2014). Perceptron Multicouches et réseau à Fonction de Base Radiale pour la prédiction du taux d'humidité. *International Journal of Innovation and Scientific Research ISSN 2351-8014 Vol. 5 No. 1 Jul. 2014, pp. 55-67*
- [5] Y. B. KOFFI, K. E. AHOUSI, A. M. KOUASSI, O. KOUASSI, L. C. KPANGUI et J. BIEMI (2014). Application des réseaux de neurones formels pour la prévision des débits mensuels du Bandama blanc à la station de Tortiya.*in Afrique SCIENCE*. Côte d'Ivoire
- [6] Rumelhart D.E. McClelland, J.L. (1986), *Parallel Distributed Processing, Explorations in the Microstructure of cognition. I & II*, Cambridge: MIT Press.
- [7] Moriasi et al. (2007), *Model Evaluation Guidelines for Systematic Quantification of Accuracy in Watershed Simulations*,
- [8] Pierre Gy, (1998), *Sampling for Analytical Purposes*, The Paris School of Physics and Chemistry
- [9] M. Outanoute, Y. El Afou, M. Guerbaoui, A. Selmani, A. Lachhab, A. Ed-Dahhak et B. Bouchikhi (2014). Utilisation des réseaux de neurones artificiels pour la prédiction de la température sous serre. *Congrès Méditerranéen des Télécommunications. Mohammedia, Morocco*.
- [10] A. Delaplace, F. Gatuingt et F. Ragueneau (2008). *Mécanique des structures*. Dunod, Paris, 2008 ISBN 978-2-10-053958-1
- [11] B. Boudebouz, I. Manssouri, A. Mouchtachi, T. Manssouri et Bachir El kihel (2015). Utilisation des réseaux de neurones artificiels de type RBF pour la modélisation du régime normal à point de fonctionnement variable d'une installation industrielle. *European Scientific Journal June 2015 edition vol.11, No.18 ISSN: 1857 – 7881 (Print) e - ISSN 1857- 7431*