

Modélisation de l'équation de Navier-Stokes par éléments finis – Logiciel Agros2D

N. Randriatefison¹, O. Andrianarimanana¹,

¹Sciences Expérimentales et Valorisation des Ressources Naturelles, Laboratoire des Sciences
Expérimentales et Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Université d'Antananarivo,
Madagascar

Correspondant : randriatefison@yahoo.fr

Résumé

Ce travail étudie le mouvement de fluide par le biais de l'équation de Navier Stokes en utilisant la méthode de résolution par éléments finis et nous avons pris un cas concret en utilisant le logiciel AGROS2D, une application multiplateforme pour la résolution de problèmes multiphysiques. La modélisation applique les lois mathématiques de la dynamique des fluides par l'approche de Galerkin, puis, nous avons montré l'expression générale compacte du modèle matriciel suivant la transformation géométrique et maillage en étudiant les conditions aux limites imposées sur la frontière de l'écoulement de fluide et finalement, nous avons les éléments matriciels du modèle élaboré. Ce logiciel pratique de l'écoulement de l'air sur une maquette de voiture et les résultats montrent que les forces de pression dépendent de la forme du corps par rapport à la direction de la vitesse relative du flux d'air, ainsi, les forces s'exerçant sur une voiture sont la traînée, la portance.

Mots clés : fluide, Navier stokes, éléments finis, Agro2D, air.

Abstract

This work investigates the movement of fluid through the Navier Stokes equation using the finite element method and we took a concrete case using the AGROS2D software, a cross-platform application for solving multiphysics problems. The modeling applies the mathematical laws of fluid dynamics by the Galerkin approach, then, we showed the compact general expression of the matrix model following the geometric transformation and mesh by studying the boundary conditions imposed on the border of the fluid flow and finally, we have the matrix elements of the elaborated model. This software practices of the flow of air on a model car and the result show that the pressure forces depend on the shape of the body with respect to the direction of the relative velocity of the air flow, thus, the forces s exerting on a car are drag, lift.

Keys word : fluid, Navier stokes, finite elements, Agro2D, air.

I. Introduction

L'étude de fluide est un sujet de recherche en plein essor, elle montre les mouvements turbulents (tourbillonnaires) comme le comportement des océans, de l'atmosphère ou alors l'écoulement d'un fluide (air, eau) autour d'un véhicule (automobile, avion, bateau, sous-marin ...). Les problèmes abordés dans ce domaine sont très présents dans les applications industrielles impliquant en même temps des sous domaines, à titre d'exemple dans les situations suivantes:

- les phénomènes à étudier et la mise en équation de fluide
- comment résoudre les mouvements, analytiquement ou numériquement ?
- la compréhension de fonctionnement du logiciel numérique

De nombreux problèmes physiques sont modélisés par l'équation de Navier Stokes qui est à la base des problèmes du fluide compressible ou incompressible. En matière de modélisation, initialement les modèles utilisés se limitaient à des modèles analytiques simples qui ne répond pas exactement aux problèmes ou très difficiles à résoudre alors on demande à d'autres méthodes, ce sont les résolutions numériques. L'une des méthodes est l'élément finis, elle a connu un essor considérable ces vingt dernières années.

La méthode des éléments finis est à la base des codes de calcul utilisés en mécanique des solides et s'est avérée très efficace dans le traitement des problèmes basés sur l'équation de Navier Stokes. Les avantages de la méthode des éléments finis résident dans la possibilité de représenter facilement des domaines de forme géométrique compliquée et traiter de façon usuelle les conditions aux limites. Sa mise en œuvre est cependant sensiblement plus compliquée que dans le cas de la méthode des différences finies et elle coûte en général plus chère qui nous amène à étudier des quelques détails pour illustrer et exploiter facilement la compréhension, l'utilisation des logiciels éléments finis

Notre objectif est d'étudier le mouvement de fluide par le biais de l'équation de Navier Stokes en utilisant la méthode de résolution par éléments finis et devant la complexité de la méthode, nous avons pris un cas concret en utilisant le logiciel AGROS2D. Pour atteindre cet objectif, la résolution numérique se base sur une formulation variationnelle de l'équation appliquant la méthode de Galerkin, la transformation géométrique et maillage puis le modèle matriciel et à la fin, nous avons utilisé le modèle d'une maquette de voiture sous AGROS2D

II. Matériels et méthodes

II.1. équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes, qui régissent le mouvement des fluides visqueux, peuvent s'écrire selon différentes formulations dont la solution numérique peut être déterminée grâce à différentes méthodes : différences finies, volumes finis, éléments finis, etc.

Pour étudier les écoulements, les équations de Navier-Stokes instationnaires [1] sont résolues par la méthode des éléments finis [2]. L'équation de quantité de mouvement et l'équation de continuité sont exprimées par :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot [-p + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)] + F \quad (1)$$

$$\rho \nabla \cdot (u) = 0 \quad (2)$$

Avec:

- u : vecteur vitesse(en m/s)
- p : la pression(en Pa)
- F : densité volumique des forces extérieures(en N/m³)
- μ : viscosité turbulente(en Pa.s)
- ρ : masse volumique de l'eau(en kg/m³)
- t : variable temps(en s).

Remarque :

De façon générale, l'équation (2) doit être aussi complétée par l'équation locale de conservation de la masse dans le cas compressible,

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (3)$$

II.2. Description analytique

Le procédé de calcul de cette équation a été mis au point à partir de l'approche de Galerkin [3]. C'est un procédé qui convertit un problème continu en un problème spatialement discret. Il est utilisé dans la résolution numérique d'équations linéaires ou non linéaires. Soient u_h et p_h les solutions approchées des équations de Navier-Stokes données ci-dessous.

$$\begin{cases} u(x,t) \approx u_h(x,t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \psi_i(x) \\ p(x,t) \approx p_h(x,t) = \sum_{i=1}^m p_i(t) \phi_i(x) \end{cases} \quad (4)$$

Pour la pertinence du calcul, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Les conditions de Dirichlet imposent la valeur du champ de

vitesse : $u = u_D$ (la valeur de vitesse doit être égales à la vitesse du maillage et la structure solide, D : maillage) et celles de Neumann imposent les tractions :

$$\sigma \cdot n = \tau_N \quad (5)$$

avec :

- σ : tenseurs,
- n : la normale unitaire à la surface S dirigée vers l'extérieur du volume V ,
- τ_N : forces surfaciques sur la frontière.

Nous allons développer le mécanisme de modélisation numérique par éléments finis l'équation dans la présente section.

II.3. Elaboration de la modélisation par éléments finis

En considérant l'écoulement instationnaire d'un fluide Newtonien, visqueux et incompressible et dans un système de coordonnées cartésiennes de deux dimensions, les équations de Navier-Stokes peuvent s'exprimer sous la forme suivante [3][4][5][6] :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = F_{bx} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} = F_{by} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

où :

u et v sont les deux composantes des vitesses,

ρ : la masse volumique du fluide,

P : la pression,

μ : la viscosité dynamique du fluide,

F_{bx} et F_{by} : les composantes des forces par unité de volume.

A partir de l'équation (6), une formulation par éléments finis inclut trois variables nodales de la façon suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^n u_i(t) \psi_i(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i(t) N_i(x, y) \\ v(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^n v_i(t) \psi_i(x, y) = \sum_{i=1}^n v_i(t) N_i(x, y) \\ p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^n p_i(t) \phi_i(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(t) N_i^p(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

En appliquant la méthode de Galerkin au système (6), on trouve la forme intégrale suivante:

$$\begin{cases} \int_{A^e} N_i (\rho (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} - F_{bx}) dA = 0 \\ \int_{A^e} N_i (\rho (\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial y} - F_{by}) dA = 0 \\ \int_{A^e} N_i^p (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) dA = 0 \end{cases} \quad (8)$$

avec $i=1,n$. On déduit via intégration par partie :

$$-\int_{A^e} \mu N_i (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dA = -\int_{A^e} \mu [\frac{\partial}{\partial x} (N_i \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_i \frac{\partial u}{\partial y})] dA + \int_{A^e} \mu [\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] dA = 0 \quad (9)$$

En appliquant le théorème de Green-Gauss, on trouve que :

$$-\int_{A^e} \mu [\frac{\partial}{\partial x} (N_i \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_i \frac{\partial u}{\partial y})] dA = -\int_{S^e} \mu N_i (\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y) dS \quad (10)$$

où S^e est la frontière de l'élément et (n_x, n_y) sont les composantes du vecteur normal au frontière. Par conséquent, on trouve :

$$-\int_{A^e} \mu N_i (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dA = -\int_{S^e} \mu N_i (\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y) dS + \int_{A^e} \mu [\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}] dA \quad (11)$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation (11) représente un effort aux frontières de l'élément dû à l'effet de cisaillement. Ce terme s'annule au niveau de l'interface entre les éléments et ne doit être considéré que sur les frontières globales du problème étudié.

Sous forme matricielle, l'équation (11) devient :

$$\int_{A^e} \mu [\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y}] dA \{u\} = [K_{u\mu}] \{u\} \quad (12)$$

avec $[K_{u\mu}]$ représente une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse suivant l'axe des abscisses et l'effet de la viscosité. De la même façon, on trouve pour la composante des vitesses suivant l'axe des ordonnées la relation suivante:

$$\int_{A^e} \mu [\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y}] dA \{v\} = [K_{v\mu}] \{v\} \quad (13)$$

avec $[K_{v\mu}]$ représente une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse et l'effet de la viscosité.

Concernant le terme de gradient de pression suivant l'axe des abscisses, on trouve la forme matricielle suivante :

$$\int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial x} dA \{P\} = [K_{px}] \quad (14)$$

De façon similaire, on trouve suivant l'axe des ordonnées :

$$\int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial y} dA \{P\} = [K_{py}] \quad (15)$$

La contribution nodale des efforts de volume est donnée par :

$$\begin{cases} \{f_{bx}\} = \int_{A^e} [N]^T F_{bx} dA \\ \{f_{by}\} = \int_{A^e} [N]^T F_{by} dA \end{cases} \quad (16)$$

La contribution du terme de transport convectif à la forme discrétisée est définie par :

$$\begin{cases} \rho \int_{A^e} ([N]\{u\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{u\} + [N]\{v\} \frac{\partial [N]}{\partial y} \{u\}) dA \\ \rho \int_{A^e} ([N]\{u\} \frac{\partial [N]}{\partial x} \{v\} + [N]\{v\} \frac{\partial [N]}{\partial y} \{v\}) dA \end{cases} \quad (17)$$

En raison du caractère non linéaire de la contribution des termes convectifs dans la forme vibrationnelle, une procédure de linéarisation est nécessaire. On définit \bar{u} et \bar{v} les composantes des vitesses à l'itération non linéaire. Ce qui conduit aux formes:

$$\begin{cases} \rho \int_{A^e} ([N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial y}) dA \{u\} = [K_{uu}] \{u\} \\ \rho \int_{A^e} ([N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial y}) dA \{v\} = [K_{vv}] \{v\} \end{cases} \quad (18)$$

On définit les différents termes :

$$M\dot{U} = \rho \int_{A^e} [N]^T [N] dA \{\dot{u}\} \quad (19)$$

$$SU = \int_{A^e} \mu \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] dA \{u\} \quad (20)$$

$$N(U) = \rho \int_{A^e} ([N]\{\bar{u}\} \frac{\partial [N]}{\partial x} + [N]\{\bar{v}\} \frac{\partial [N]}{\partial y}) dA \{u\} \quad (21)$$

$$B^T P = \int_{A^e} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} dA \{P\} \quad (22)$$

$$F = \int_{A^e} [N]^T F_{bx} dA \quad (23)$$

II.4. Expression générale compacte du modèle matriciel [3][6][7].

Sous forme matricielle, le système s'écrit alors,

$$\begin{cases} M\dot{U} + SU + N(U) - B^T P = F \\ BU = 0 \end{cases} \quad (24)$$

avec :

M est la Matrice de la masse,

U est le vecteur solution des vitesses $(u_i)_1^n$,

P est le vecteur solution de la pression $(p_i)_1^m$,

SU est la discrétisation des termes visqueux,

N(U) est la discrétisation des termes non-linéaires convectifs,

BTP est la discrétisation du gradient de P,

Et BU est la discrétisation de la divergence de u et F représente toutes les sources aux conditions aux limites

II.5. Représentation de la référence de transformation géométrique et maillage [8, 9]

Nous avons besoin d'un repère adapté à la géométrie du problème pour optimiser le maillage de chaque élément géométrique. On peut procéder à une transformation d'un repère cartésien classique (Oxy) en repère d'autre repère curviligne. A chaque élément réel, on associe un élément de référence comme indiqué par la figure 4.

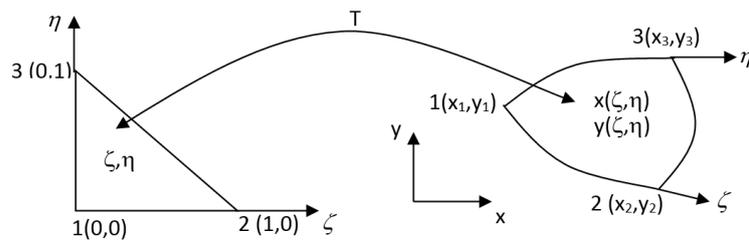


Figure 1 : Transformation géométrique.

Un domaine géométrique dont la dimension dépend de la théorie considérée, comme par exemple un polyèdre, un polygone ou un segment, un ensemble de points situés dans ce domaine ou sur son bord, nommés nœuds ;

Dans une simulation par éléments finis, le produit est modélisé par un maillage, c'est-à-dire un ensemble de nœuds et d'éléments. La construction du maillage doit donc respecter certains principes et prendre en compte quatre aspects : l'adaptation de la géométrie à la simulation proposée dans cette ressource, le choix des éléments, la

génération et le contrôle du maillage, et la modélisation du monde extérieur (ces trois points sont l'objet de trois autres ressources suivantes).

Pour être utilisable pour la simulation numérique, les maillages doivent :

- représenter suffisamment bien la géométrie
- comporter suffisamment d'éléments pour calculer précisément
- avoir des éléments de bonne qualité

Pour avoir un résultat proche de la réalité, on est souvent tenté d'utiliser un maillage fin. En effet, la méthode des éléments finis consiste à interpoler la valeur des fonctions à l'intérieur des mailles, donc plus la maille est grande, plus l'écart entre la valeur « réelle » de la fonction et sa valeur interpolée sera grand.

Les éléments définis dans toutes ces théories sont construits de façon similaire, et nous présentons les plus employés. Les triangles à 3 nœuds (en 2D) et tétraèdres à 4 nœuds (en 3D) sont les types d'éléments les plus simples. Leurs géométries de référence possèdent un angle droit (figure 3a) et leurs fonctions de base sont affines en coordonnées locales (figure 3b).

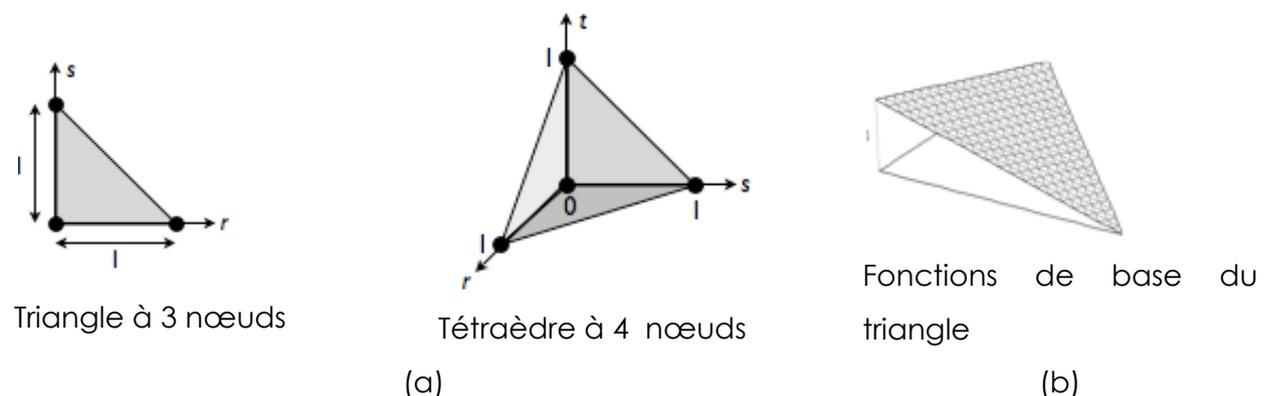


Figure 2 : Triangle et Tétraèdre du premier ordre : géométrie de référence (a) et fonction de base (b)

Cette transformation géométrique est nécessaire pour la mise en équation en tenant compte de sa forme géométrique non triviale. Les expressions analytiques de chaque élément sont définies dans les paragraphes suivants.

II.6. Définition de l'élément isoparamétrique

Les éléments de référence à l'élément réel sont :

$$\begin{cases} x(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) x_i \\ y(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\zeta, \eta) y_i \end{cases} \quad (25)$$

n est le nombre de nœuds de l'élément,

ζ et η sont les coordonnées d'un point de l'élément de référence,

$x(\zeta, \eta)$ et $y(\zeta, \eta)$ sont les coordonnées d'un point de l'élément de réel,
 x_i et y_i sont les coordonnées du i ème nœud de l'élément,
 $N(\zeta, \eta)$ sont les fonctions d'interpolation ou fonction de forme
 Nous avons les fonctions d'interpolation :

$$\begin{cases} N_1(\zeta, \eta) = 1 - \zeta - \eta \\ N_2(\zeta, \eta) = \zeta \\ N_3(\zeta, \eta) = \eta \end{cases} \quad (26)$$

La matrice jacobienne $[J(\zeta, \eta)]$ de la transformation est :

$$[J(\zeta, \eta)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (27)$$

L'expression du champ de déplacements de vitesse dans le domaine :

$$u(x, y; t) = [N(x, y)] \{U(t)\} \quad (28)$$

avec :

$$[N(x, y)] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$[B]$: la matrice d'opérateurs différentiels appliquées aux fonctions d'interpolations $[N]$

avec $[B] = [B_1 \ B_i \ B_n]$ défini par :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (31)$$

D : désigne la matrice d'élasticité

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

E : Module de Young (Pa)

ν : Coefficient de Poisson

Le calcul particulier permettant d'exprimer les éléments matriciels du modèle élaboré dans cette étude est donné dans cette section.

II.7. Eléments des matrices [2][4][5][10][11][12][13]

La matrice de la masse est donnée par :

$$\Rightarrow M\dot{U} = M \approx \rho \sum_{i=1}^{npi} [N(\zeta_i, \eta_i)]^T [N(\zeta_i, \eta_i)] \det [J(\zeta, \eta)] \omega_i \quad (31)$$

Nous définissons la matrice des termes visqueux :

$$SU = K \approx \mu \sum_{i=1}^{npi} [B(\zeta_i, \eta_i)]^T [D][B(\zeta_i, \eta_i)] \det [J(\zeta_i, \eta_i)] \omega_i \quad (32)$$

Cette force volumique peut être approximée par :

$$F \approx \sum_{i=1}^{npi} [N(\zeta_i, \eta_i)]^T \left\{ \begin{array}{l} f_{bx} \\ f_{by} \end{array} \right\} \det [J(\zeta_i, \eta_i)] \omega_i \quad (33)$$

Le gradient de Pest donné par :

$$B^T P \approx \sum_{i=1}^{npi} [N(\zeta_i, \eta_i)]^T [B(\zeta_i, \eta_i)]^T \{P\} \det J(\zeta_i, \eta_i) \omega_i \quad (34)$$

Les termes non-linéaires convectifs sont donnés par :

$$N(U) \approx \sum_{i=1}^{npi} \left\{ \begin{array}{l} [N(\zeta_i, \eta_i)] \bar{u} [B(\zeta_i, \eta_i)]_x^T + \\ [N(\zeta_i, \eta_i)] \bar{v} [B(\zeta_i, \eta_i)]_y^T \end{array} \right\} \det J(\zeta_i, \eta_i) \omega_i \quad (35)$$

avec :

npi est le nombre de points d'intégration,

ζ_i et η_i sont les coordonnées du ie point d'intégration,

ω_i est le poids du ie point d'intégration.

II.8. Condition aux limites :

Les conditions limites de sortie constituent une spécificité de l'étude numérique des écoulements fluides à laquelle se sont intéressés de nombreux chercheurs depuis plus de cinquante ans. Cette spécificité se manifeste par l'introduction de vitesses (v en $m.s^{-1}$) ou de forces (F en Nm^{-3}) à imposer sur la frontière en aval d'un écoulement de fluide. Il semble donc que la taille du domaine soit un facteur limitant de la résolution numérique d'écoulements des fluides. Mais en réduire simplement la dimension peut compromettre la stabilité du calcul et la précision des résultats.

Les conditions limites de sortie doivent être construites de manière à satisfaire les critères suivants :

- assurer la stabilité de la résolution du système d'équations ;
- ne pas perturber la réponse dynamique du système ;
- minimiser la taille du maillage et donc du système d'équations.

Pour illustrer nos études, nous avons utilisé le logiciel Agros2D pour ses conditions de logiciel libre et qui ne demande pas beaucoup d'espace de mémoire et facile à pratiquer.

II.9. Agros2D [14]

Agros2D est une application multiplateforme pour la résolution de problèmes multiphysiques, il est un logiciel libre, développée par le groupe de l'Université de Bohême de l'Ouest à Pilsen en République Tchèque, il peut donc être utilisé gratuitement ou sans aucune restriction

Il est important de comprendre que les éléments de l'interface (figure3) sont :

- barre de menu supérieure,
- fenêtre principale de visualisation du modèle,
- barre d'outils,
- Autres boutons (terminal python, pointeurs, paramètres du problème)

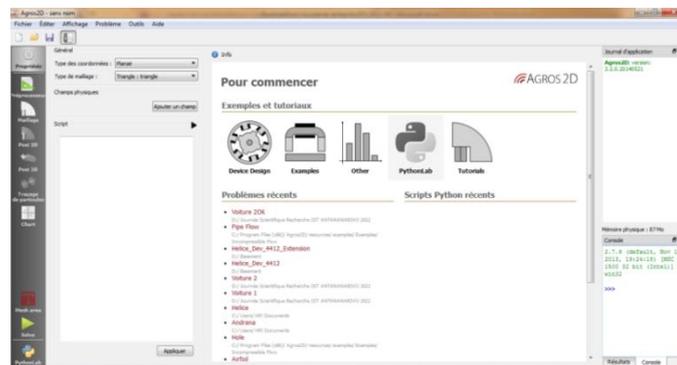


Figure 3 : Interface principale de l'Agros2D

La solution numérique au problème est définie dans les étapes suivantes :

- Type de problème défini
- Définition de la géométrie
- Définition des paramètres du matériel
- Maillage
- Résoudre le problème
- Analyse des résultats

Pour commencer vous pouvez par les champs d'étude (type de problème, Figure 4) prise en charge par Agros2D

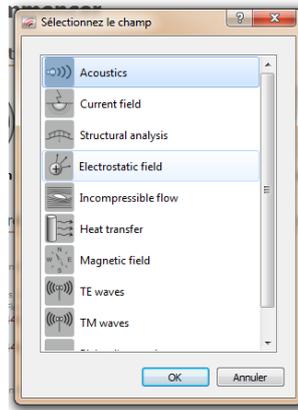


Figure 4 : Fenêtre pour sélectionner le type de problème

- Electrostatique
- Courants électriques
- Champs magnétiques
- Transfert de chaleur
- Mécanique de structure
- Acoustique
- L'écoulement d'un fluide

Dans la nouvelle version d'Agros2D a été introduit un nouvel éditeur de code source PythonLab ou de langage de programmation Python et dédiée aux avancés. Vous pouvez tester de nouvelles idées dans ce nouveau langage de programmation pour une extension des systèmes complexes et des problèmes éventuels liés aux caractères des phénomènes physiques couplés.

Nous allons présenter sur la figure 5: suivante exemple d'écriture de programmation en python :

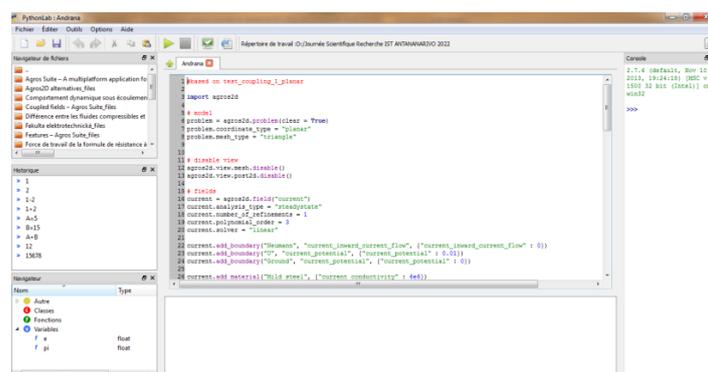


Figure 5 : fenêtre pour écrire un programme en python

Pour la géométrie des éléments, vous pouvez traiter dans le modèle de vue à plat 2D, il doit être traité comme une section transversale dans le modèle 3D infiniment long OX-OY. Un arrête peut-être connecté deux nœuds. De plus, pour le bord, vous pouvez définir un angle, c'est-à-dire un cercle passant par deux nœuds sélectionnés.

La réalisation de géométrie du phénomène étudié est dessinée sur la fenêtre suivante (figure 6) :

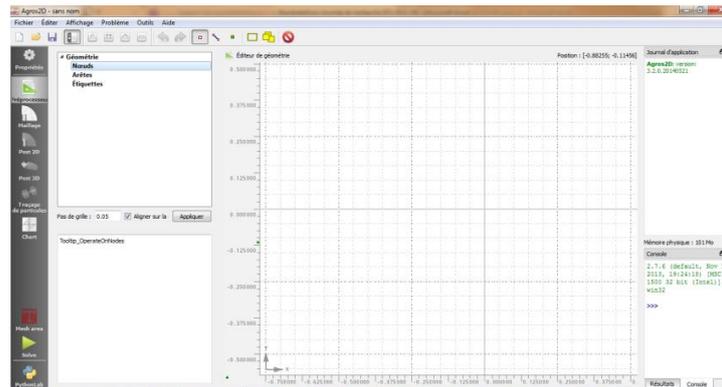


Figure 6 : fenêtre éditeur pour dessiner la géométrie des éléments

Après avoir décrit tous les équations nécessaires pour la modélisation et l'introduction de l'Agros2D, nous allons montrer dans la partie suivante les résultats obtenus par la compilation du logiciel.

III. Résultats

Pour pratiquer nos études, nous avons étudié l'air et même ceci est un fluide compressible, le logiciel Agros2D est bien compatible pour le phénomène. Nous avons défini les paramètres de fluide comme suit :

- la masse volumique ρ de l'air est considérée comme étant égale en moyenne à $1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- la densité volumique des forces extérieures $F = 0 \text{ Nm}^{-3}$
- la viscosité turbulente $\mu = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- la vitesse $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Les caractéristiques de matériel air sont décrites sur la figure 7 suivante

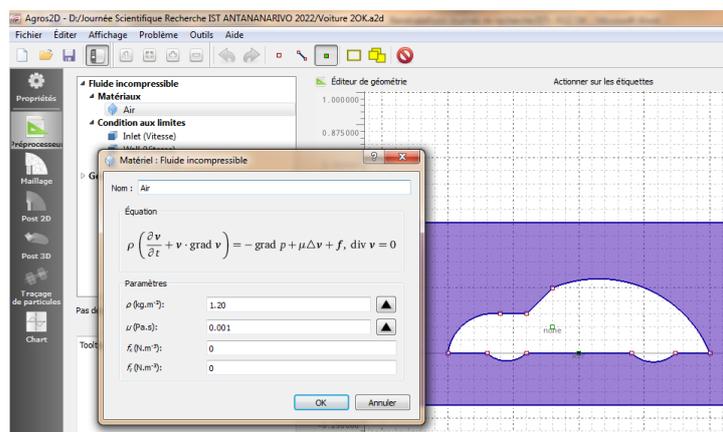


Figure 7 : définition des caractéristiques de matériel air

Nous avons dessiné une maquette de voiture de taille :

Longueur : 1,014m

Hauteur : 0,4 m

Insérer dans un rectangle de longueur 2 m et de hauteur 0,7m

Les conditions aux limites sont définies suivant les figures 8, 9, 10,11

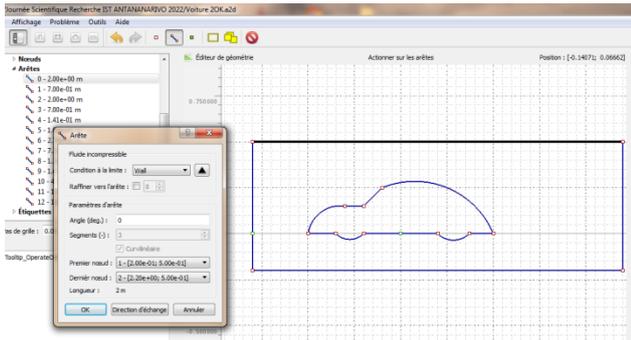


Figure 8 : longueur du rectangle définie comme mur

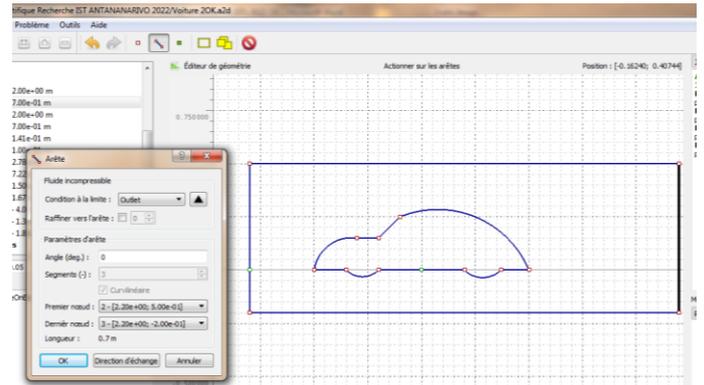


Figure 9: hauteur du rectangle définie comme sortie du fluide

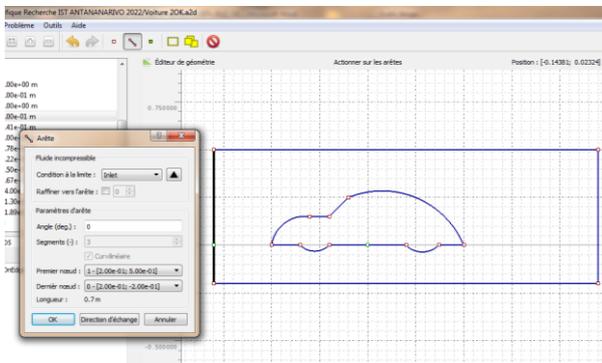


Figure 10 : hauteur du rectangle définie comme entrée du fluide



Figure 11 : conditions limites impliquées dans le système.

(Profil de voiture et la longueur du rectangle définis comme mur)

Après toutes configurations de notre modèle, Agros2D offre de nombreuses façons de calculer et visualiser les résultats sous un maillage triangulaire avec 580 éléments (Figure 12)

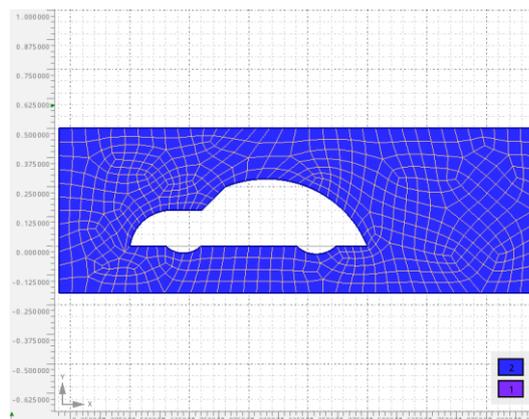


Figure 12 : Maillage du modèle

Après avoir compilé le logiciel Agros2D, nous pouvons afficher la distribution des vitesses sous forme des scalaires autour de la voiture (figure 13). Nous pouvons aussi

afficher le champ des vecteurs vitesses du fluide autour de la voiture (figure 14) puis voir les contours du module de la vitesse suivant la figure 15

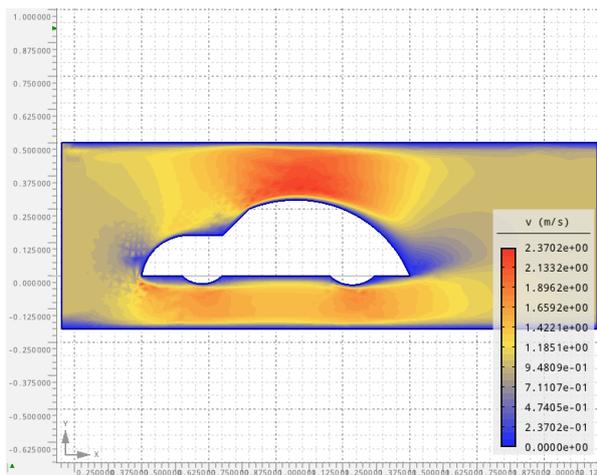


Figure 13 : Distribution des vitesses scalaires autour de voiture

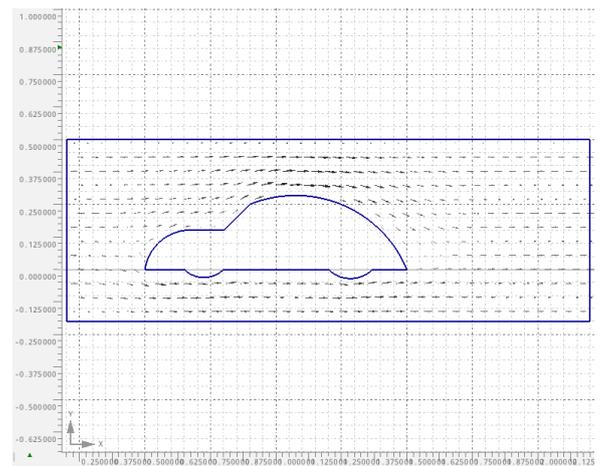


Figure 14 : le champ des vecteurs vitesses du fluide autour de la voiture

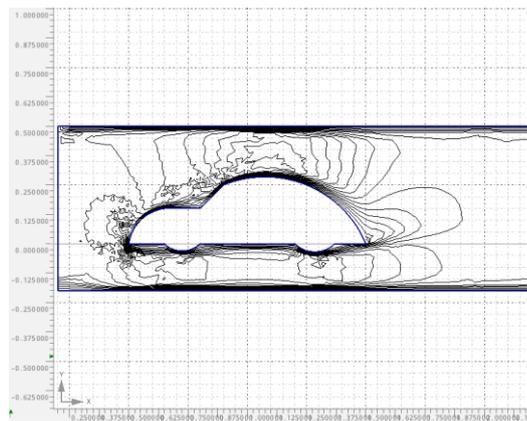


Figure 15 : contours du module de la vitesse

La figure 16 montre la distribution de la pression sur la maquette, On y montre une étendue des valeurs de pression ensuite nous allons montrer la représentation du contour de la pression sur la maquette (Figure 17).

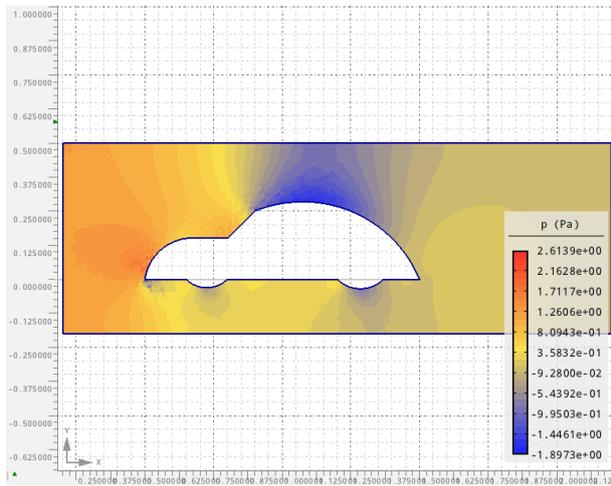


Figure 16 : Pression sur la maquette

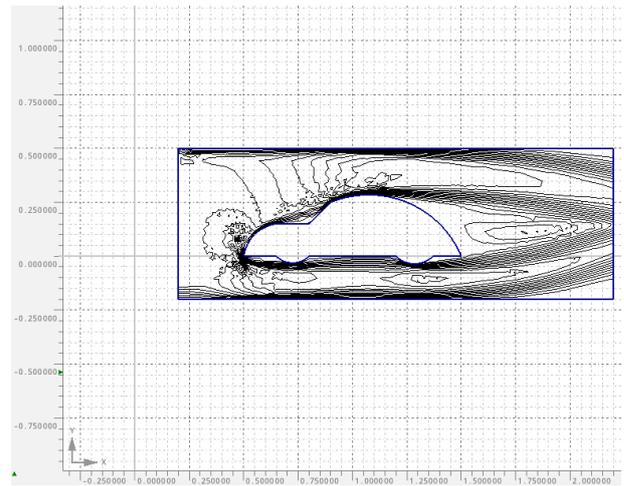


Figure 17 : Contours de la pression sur la maquette

IV. Discussions

La visualisation des lignes de courant de vitesse montre que l'écoulement amont qui passe dessus sous forme de courbe (suivant la forme de la carrosserie de la voiture) et qui marche descendante vers l'arrière de la voiture. L'écoulement d'air passe sous le véhicule est plus ou moins uniforme suivant la forme de là-dessous de la voiture (châssis), les deux écoulements se rencontrent derrière de la voiture, nous constatons que l'écoulement de l'air peine à contourner l'obstacle et qu'il se forme une surpression à l'avant et une dépression à l'arrière avec effet tourbillonnaire ou vortex générés à l'arrière d'une automobile selon les Figures 13, 14.

En mécanique des fluides, la traînée aérodynamique est la force qui s'oppose au mouvement d'un corps dans un fluide, Chaque corps en mouvement dans l'air est soumis de la part de celui-ci à une résistante qui tend à s'opposer à ce mouvement. Cette résistance a son origine dans les propriétés de l'air, mais dépend aussi des caractéristiques du corps concerné (surface, forme...). Les forces de pression dépendent de la forme du corps et sa disposition est plus occupée par rapport à la direction de la vitesse relative du flux d'air

En Aérodynamique Automobile, le principe de l'aérodynamique est de donner à un véhicule, une forme afin que les frottements avec l'air qu'il rencontre lors de son déplacement soient réduits le plus possible. Les constructeurs jouent donc entre une aérodynamique performante afin d'atteindre leurs objectifs (performances et faible consommation) mais également limité afin que la tenue de route du véhicule n'en soit pas affectée.

Les forces s'exerçant sur une voiture sont : la traînée, la portance, la poussée, le poids.

- La portance est le fait que des flux d'air ont tendances à tirer le véhicule vers le haut. Les flux d'air passent sous le véhicule et ont une direction verticale, a un sens vers le haut et son point d'application est le centre de gravité du véhicule, c'est d'ailleurs cette force qui permet l'envol des avions. Donc l'air qui passe dessus (courbe) doit parcourir plus de distance que celui qui est au-dessous (ligne droite) ; résultat l'air du dessus est plus rapide que celui du dessous (voir les Figures 13, 14). Cette différence de vitesse crée une dépression qui soulève la voiture. Les constructeurs automobiles essayent donc de réduire cette portance, voir même de créer une déportance ou appui aérodynamique (augmenter l'adhérence du véhicule) pour que le véhicule ne s'envole pas.
- La traînée est en automobile, la force qui s'oppose à l'avancement du véhicule dans l'air. Cette force est donc en rapport direct avec l'aérodynamisme. Il est donc dans l'intérêt des constructeurs de diminuer la traînée, force à l'origine d'une augmentation de la consommation en carburant et d'une dégradation de la vitesse de pointe en ligne. Cette force a une direction horizontale, un sens vers l'arrière et le point d'application est le centre de gravité du véhicule. Dans notre cas (Figures 13, 14, 15), on fixe la voiture par contre l'air est en mouvement alors nous pouvons observer le même phénomène que la voiture en mouvement.
- Pression (Figures 16, 17) : la pression à l'avant-corps du véhicule (en rouge) est source de traînée aérodynamique, même si cette traînée est paradoxalement compensée presque intégralement par les dépressions sur le reste de l'avant-corps, à la partie centre dessus de notre maquette, on remarque que la pression est presque nulle (en bleu), c'est la dépression. Derrière la voiture, la pression augmente un peu.

Comparaison avec la distribution des C_p sur une berline DrivAer fastback effectuée par Bernard de Go Mars (Figure 18) dans son plan de symétrie, nos résultats sont en accords, et qui vérifient nos méthodes et matériels dans la littérature et répondent aux problèmes posés dans l'introduction.

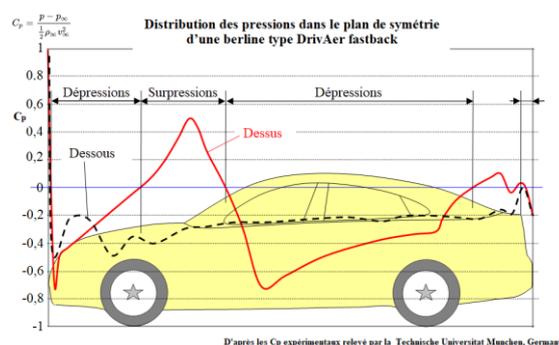


Figure 18 : la distribution des C_p sur une berline DrivAer fastback [15]

V. Conclusion

Ce papier présente une modélisation de l'équation de Navier Stokes en éléments finis, pour prédire les effets d'un fluide sur un objet à étudier. Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel Agros2D, développé par le groupe de l'Université de Bohême de l'Ouest à Pilsen en République Tchèque. Notre cas pratique sur Agros2D est l'étude des phénomènes aérodynamiques induits par l'écoulement de l'air autour d'une maquette de véhicule. La connaissance de ces phénomènes permet d'étudier les forces s'exerçant sur une voiture : leur traînée et portance et ainsi que les turbulences. De comparaison avec des résultats numériques obtenus avec une modélisation de la des C_p sur une berline DrivAer fastback a effectué, on note que les résultats obtenus par les simulations Agros2D sont en accord.

Désormais conçues par informatique (C.A.O - D.A.O. conception et dessin assistés par ordinateur) et la mécanique des fluides numérique (MFN): éléments finis, différences finis, volumes finis, plus souvent désignée par le terme anglais computational fluid dynamics (CFD), consiste à étudier les mouvements d'un fluide, ou leurs effets, par la résolution numérique des équations où les objets à étudier sont réalisés en maquette à échelle réduite, ce qui permet de réaliser des essais par expérience pour un coût réduit. Ensuite seulement, on produit une maquette grandeur nature.

Nous avons étudié le phénomène seulement à 2 dimensions avec des caractéristiques ou des variables limitées, pour perspectives de notre travail, nous allons exploiter la fenêtre d'écriture de programmation en python pour bien analyser des plusieurs variables à 3 dimensions.

VI. Références

- [1] Christophe Ancey, Mécanique des fluides, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, ENAC/IIC/LHE, pages 142, 143, 2020
- [2] Aymen Jendoubi, Méthodes d'éléments finis pour les interactions fluide-structure, Université Laval, Québec, Canada, 2016
- [3] Raux, Etude de conditions limites de sortie pour la méthode des éléments finis, Département de génie mécanique, Ecole Polytechnique de Montréal, 2017
- [4] Guergah C., Belouar A., Guenfoud M., Contribution à l'implémentation de lois de comportement sous Plaxis. Cas des matériaux visqueux, Nature & Technologie
- [5] N. Randriatefison, O. Andrianarimanana, N. M. Murad, E. J. R. Sambatra, V. Rakotondrainy, L. Rakotondrajaona, A. Jaomiary, B. Agnus, Modélisation et

- simulation de pôle artisanale d'hydrolienne de type NACA 4412, Journal International de Technologie, de l'Innovation, de la Physique, de l'Energie et de l'Environnement, vol. 7, n°1, 4, France, 2022
- [6] Manish K. Singh, K. Dhanalakshmi and S. K. Chakrabartty, Navier-Stokes Analysis of Airfoils with Gurney Flap, Computational and Theoretical Fluid Dynamics Division National Aerospace Laboratories,
- [7] S. Elouardi, R. El Maani, B. Radi, Maillage dynamique pour écoulement transitoire autour d'un profil NACA 0012, ISTE OpenScience, London, UK
DOI: 10.21494/ISTE.OP.2019.0434, 2019
- [8] A. Collin, C. Dobrzynski, Maillages pour le calcul scientifique, Bordeaux INP, France, EDUSCOL-STI , <http://eduscol.education.fr/sti/si-ens-paris-saclay>
- [9] L. Gendre, Quelques types d'éléments finis, Ecole Normale Supérieure, Paris France, 2013
- [10] Yves D., Méthode des éléments finis : élasticité plane, Université du Mans, 2011
- [11] Récan M. (1986), Application de la méthode des éléments finis à la simulation des transferts des eaux souterraines, Service Géologique National, Orléans
- [12] Belakroum R., Contribution à la modélisation des interactions fluides-structures, Université Mentouri-Constantine, Département de Génie Mécanique, Algerie, 2011
- [13] Zara F., Un peu de Mécanique des Milieux Continus, Faculté des Sciences et Technologies Département d'Informatique, Université Lyon 1, 2017
- [14] P. Karban, F. Mach, L. Korous, P. Kus, I. Dolezel, Code Agros and Possibilities of its Use for Modeling and Design Current Features and Outlook to the Future, Faculty of Electrical Engineering, University of West Bohemia, Czech Republic, 2015
- [15] Par Bernard de Go Mars — Travail personnel, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=84632534>