

IV. Sous-thèmes 4 : les mathématiques, la science et la technologie de l'information et de la communication (STIC), les TICE :

Article 31. Outil numérique de haute précision pour la correction du spectre FFT

Olivier Riou ^{a,*}, Guy Marie Rakoto Razafindrato^b, Pierre Olivier Logerais^{un}, Jean Félix Durastanti^{un}

^{un} CERTES de laboratoire, Université Paris Est Créteil Val de Marne,
IUT Sénart Fontainebleau, Avenue Pierre Point 77127 Lieusaint - France

^b Institut Supérieur de Technologie Antananarivo - Madagascar

RÉSUMÉ

Au cours de la numérisation, fenêtrage modifie considérablement les signaux conduisant à fausses valeurs lors de l'analyse du spectre. La phase est particulièrement touchée en raison de ses valeurs fortement erronées. Cet article présente un outil numérique pour la correction de fréquence, amplitude et phase. La procédure repose sur le principe classique du barycentre en facteur de correction de calcul. On introduit une méthode utilisant des dérivés de points spectres successifs afin de détecter avec précision les sommets. Le code a été testé avec succès par le biais de signal avec les composantes de fermeture. Effets du bruit avec des degrés divers sont traités en particulier. Des résultats satisfaisants sont obtenus notamment en termes de résolution et la sensibilité au bruit.

Mots clés : correction spectrale, fenêtrage, amplitude, fréquence, phase, bruit

I. Introduction

De nos jours, en maintenance conditionnelle des machines tournantes, l'analyse du spectre de vibration constitue encore une des méthodes les plus utilisées. En effet, des changements dans le comportement dynamique d'un système mécanique produisent des modifications dans les formes de signaux vibratoires. Il est donc primordial de trouver le lien entre toute composante spectrale apparaissant ou évoluant et la cause.

Pour être traitées sur ordinateur, des signaux vibratoires mesurés doivent être numérisés, c'est-à-dire la fonction analogique continue issue des capteurs doit être transformée en données numériques. À cette fin, une série temporelle dans un intervalle fini est obtenue grâce à un fenêtrage adéquat. Malheureusement, cette opération modifie la nature et les caractéristiques des données obtenues. Ceci est dû au fait qu'on ne peut jamais avoir un nombre entier de périodes dans l'élément de signal étudié. Ainsi, après calculs de la transformation de Fourier rapide, une imprécision et même une certaine distorsion existent inévitablement dans le spectre. Ni la valeur d'amplitude, de fréquence ni celle de phase de n'importe quel composant de signal ne correspond donc pas rigoureusement à la réalité.

Beaucoup de œuvres ont été réalisées dans le domaine du spectre correction [1-7]. En revanche, la précision de plus en plus en raison du niveau élevé de la technologie sur l'instrumentation peut être obtenue. Nous présentons dans cet article une méthode classique qui a été implémentée avec succès sur une instrumental d'installation faite maison, obtention de précise et haute résolution pour n'importe quel type de séries de Fourier.

Après avoir rappelé des effets de la numérisation sur série de données, nous présentons les performances de l'algorithme d'interpolation existantes dont les limites principales se trouvent sur signal bruitée. Ainsi, en partie à la suite, l'efficacité de la méthode améliorée est alors démontrée à travers quelques exemples. Performances en termes de stabilité et de la sensibilité au bruit est soulignée. Enfin, nous concluons avec sa possibilité d'extension et d'autres applications sur l'analyse des vibrations.

II. Les effets de la numérisation

Au cours de la numérisation, le signal est tronqué par une fenêtrage de visualisation et devient discret, avec un certain nombre fini de points N . Si la fenêtrage contient un nombre entier de périodes, l'opération n'a aucune incidence sur le signal numérisé obtenu. Les deux formes sont parfaitement identiques. Dans le cas contraire, certaines discontinuités apparaissent aux extrémités du signal numérisé, ce qui entraîne des erreurs dues à fenêtrage [8]. Qui empêche la lecture claire du spectre et de la compréhension en termes d'amplitude, de fréquence et de phase.

Pour éliminer ce problème, une première approche consiste à utiliser windows apodisation qui (à l'exception de celle rectangulaire) assurer une continuité en annulant les extrémités du signal numérisé. Pour plus de détails, voir [3].

Mathématiquement, fenêtrage entraîne une multiplication du signal analogique par la fonction de fenêtrage dont la valeur est nulle en dehors d'un intervalle de largeur

$$\Delta T_e = (N-1) T_e \quad (1)$$

qui représente la durée de l'échantillonnage. Cette opération est illustrée à la figure 1.

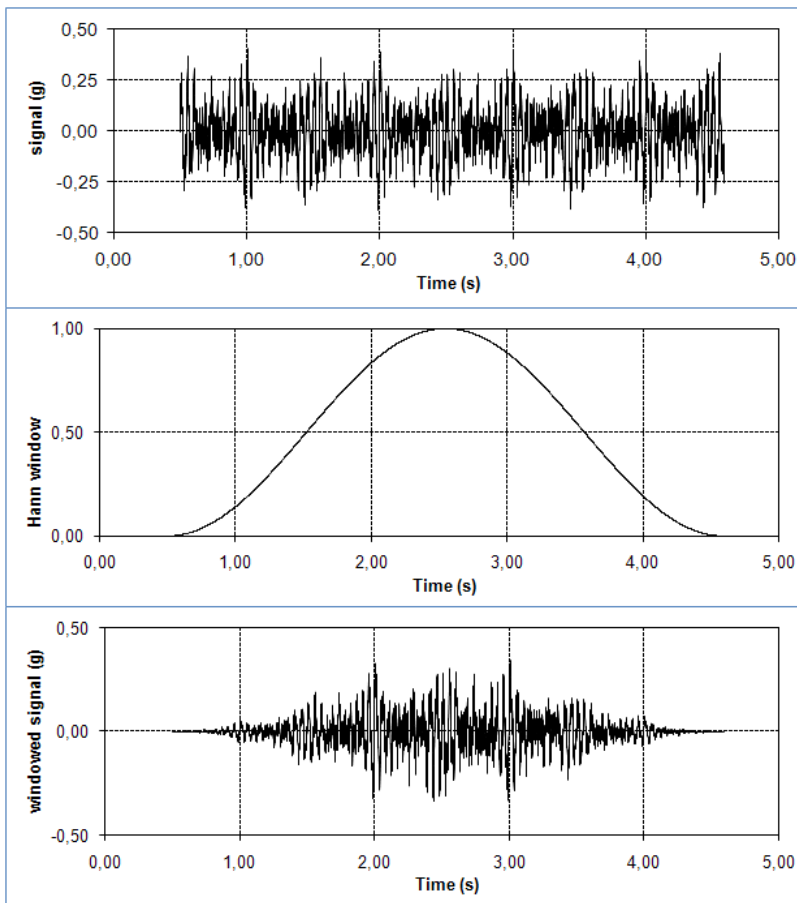


Figure 1 : Observation d'un signal à travers la fenêtre de Hann (échantillonnage d'une durée de 4 095 s correspondant à 4096 points échantillonnés à 1 000 Hz)

Les effets de fenêtrage sont généralement classés dans quatre paramètres : la largeur du lobe central, le ratio d'amplitude entre le lobe secondaire premier et celui du centre, la localisation du premier lobe secondaire et l'erreur maximale de mesure. Comparaison entre les fenêtres de pondération classique est donnée dans le [tableau 1](#), exprimées en dB pour amplitude et raies spectrales $\mathcal{J} = f_s / (N-1)$ pour la fréquence.

Table 1 Comparaison des effets de fenêtrage pour quelques windows classiques

Type of window	Width of the central lobe	Amplitude ratio between the first secondary lobe and the central one	Localization of the first secondary lobe	Maximal error of measurement on amplitude
	Number of δf	dB	Number of δf	dB
rectangular	2	- 13.3	1.4	- 3.80
Hann	4	- 31.5	2.4	- 1.40
Blackman	6	- 58.1	3.5	- 1.10
Kaiser Bessel	6	- 66.9	3.3	- 1.00
flat Top	10	- 82.9	5.3	- 0.01

Le choix du type de fenêtre résulte d'un compromis entre la précision du mesurande et l'aptitude de la séparation. La fenêtre « flat top » est généralement utilisée pour l'étalonnage des systèmes de mesure de vibration mais est insuffisante pour distinguer les deux valeurs de différence inférieure à $10\delta f$. C'est tout à fait différent de la fenêtre rectangulaire : son lobe central étroite particulière permet de bonne séparation des deux éléments voisins avec rapport d'amplitude comparable pour plus de $4\delta f$ de différence de fréquence. -20 dB du rapport d'amplitude, critères de séparation est considérée comme à $8\delta f$.

Néanmoins, son inexactitude est trop important pour la surveillance de bon spectre quantitative. Meilleur compromis est donnée par la fenêtre de Hann : environ 15 % d'inexactitude associé à $4\delta f$ de séparer la capacité pour un ratio d'amplitude supérieure à - 20 dB.

En ce qui concerne la phase, le problème réside son déplacement uniforme en raison de fenêtrage. Il se trouve entre deux raies spectrales à raison de 180° par unité de δf [2]. Donc, juste de 0,05 Hz (correspondant à 3rev/min) pour 0,25 Hz résolution conduit à environ 36° de décalage de phase. Dans presque le cas, l'écart est que tel que la phase précise ne peut être observée directement sur un spectre en phase.

Pour contourner ce problème, on peut remarquer que les effets de fenêtrage sont tout à fait déterministes et ainsi indifféremment utilisés à tous les signaux numérisés dans les mêmes conditions : différence de phases est supposé exact dans cette affaire [8]. Mais dans la pratique, c'est assez difficile car chaque canal d'entrée d'un convertisseur forme un tout système de mesure. Capteur et convertisseur ne voient pas exactement les mêmes signaux et transcrire pas de la

même manière, notamment en raison des différentes distorsions dans la chaîne de mesure (filtrage, amplification, etc.). Ainsi, la différence de phase ne sera pas très exacte. C'est pourquoi lors de changement de phase absolue, mesure, en comparant deux signaux temporels est toujours préférable. Par exemple, la position angulaire du déséquilibre apparent peut être donnée par décalage de phase entre un signal haut-tour et le déplacement radial du roulement. Malheureusement, pour des situations plus complexes, phase reste inaccessible en valeur absolue, même si elle contient beaucoup d'informations.

Dans la mesure où les erreurs induites par fenêtrage sont systématiques, ils sont en principe corrigible et peuvent être entièrement éliminés par approche analytique. En effet, la caractérisation d'un aucun signal harmonique bruitée requiert une quantité indépendante que trois : amplitude, de fréquence et de phase.

Approche de base consiste à identifier les deux raies spectrales centrées dans le composant recherché afin de former quatre équations, compte tenu de la dimension réelle et imaginaire du vecteur complexe. Il est alors possible de ces quatre équations [4] d'extraire les trois quantités.

Approche pour se débarrasser des erreurs de fenêtrage se compose généralement en interpolant dans l'espace de Fourier. Principe est le suivant : de la forme de distorsion introduite par fenêtrage, une interpolation basée sur le module du spectre est effectuée afin d'obtenir une valeur exacte de la fréquence, amplitude et phase. Correction de l'algorithme pour rectangulaire et Hann windows a été développé en [1, 2].

Satisfaisante dans de nombreux cas, cette méthode semble tout de même limité par sa sensibilité au bruit, réduisant considérablement la capacité de distinguer deux corrigeant les raies spectrales de soutien. Bien sûr, bruit temporel impose pour détecter un seuil dont la valeur est déclenchée par le bruit de fenêtrage. Ainsi, signal bruyant conduit à des difficultés sur la séparation des deux fréquences fermées. [4, 5] traitent des effets du bruit. Afin d'améliorer la sensibilité de la méthode, J. Wu [5] a développé un algorithme basé sur trois raies spectrales pour déterminer l'index de la plus proche à true composant. Une fois trouvé, une interpolation est réalisée. Une approche similaire a été faite par Y.F. Li [4]. Détails des algorithmes peuvent être vu dans ces deux références.

III. Algorithme d'interpolation

Fréquence d'un composant de signal est souvent situé entre deux raies spectrales, sans récupérer le centre lobe principal du spectre fenêtré. Le principe de l'interpolation consiste alors à calculer ce point (A de la Fig. 2) à l'aide de raies spectrales qui sont inclus dans le lobe central [1].

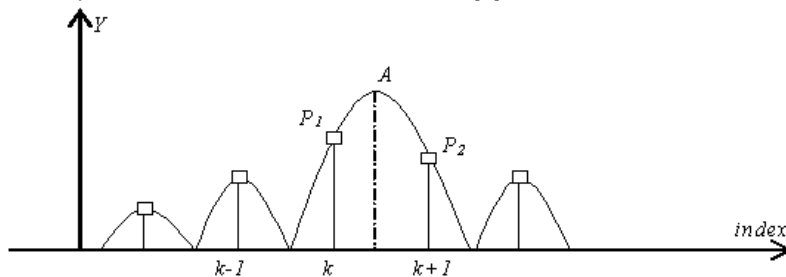


Figure 2 : Localisation du lobe principal par rapport aux lignes spectrales

Chaque type de fenêtré a sa largeur du lobe principal. Pour la fenêtré rectangulaire (celui plus étroit), il est $2\delta f$, tandis que Hann une étendue à $4\delta f$

Selon elle, il faut déterminer la fonction du lobe principal définissant la zone où la correction se fera. Technique la plus utilisée est la méthode de barycentre, disponible pour tout type de fenêtré. Détails avancés se trouvent dans [1].

Hauteur dans le point A est calculée par rapport à ceux de P1 et P2 en utilisant la relation :

$$x y(x) + (x + 1) y(x + 1) = 0 \tag{2}$$

où x et y sont respectivement fréquence et l'amplitude (indexée k et hauteur correspondante Y sur la Fig. 3).

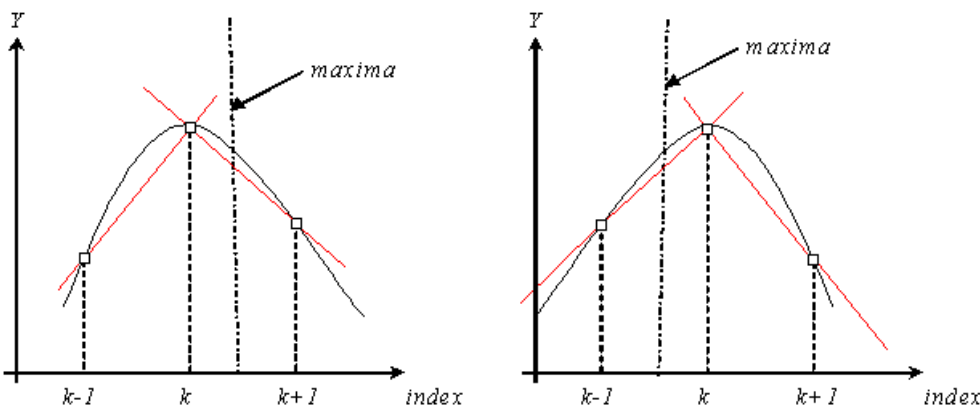


Figure 3 : Localisation des pics spectraux

De là, il peut être démontré que les formules de la fenêtré rectangulaire de corrections sont par exemple, comme suit :

- Frequency correction: $f_{corrected} = (k + \Delta k) \frac{f_e}{N}$ (3)

- Amplitude correction: $A_{corrected} = \frac{\pi \Delta k Y_k}{\sin(\pi \Delta k)}$ (4)

- Phase correction: $\Psi_{corrected} = \arctg\left(\frac{\text{Im}_k}{\text{Re}_k}\right) - \pi \Delta k$ (5)

où $\Delta k = \begin{cases} \frac{Y_{k+1}}{Y_k + Y_{k+1}} & \text{si } Y_{k+1} \geq Y_{k-1} \\ -\frac{Y_{k-1}}{Y_{k-1} + Y_k} & Y_{k+1} \leq Y_{k-1} \end{cases}$ (6)

Y_k est sur le point d'indice k , Im_k et Re_k sont partie respectivement imaginaire et réel de la quantité de complexe représentant le signal par transformation de Fourier d'indice k .

IV. Recherche des raies spectrales

Afin de corriger les pics représentant des composantes spectrales dans le domaine de la transformée de Fourier, il est nécessaire de bien localiser des valeurs maximales. Une méthode décrite dans cet article est basée sur les calculs des pentes lors du passage d'un point de spectral à l'autre.

Par ce raisonnement, changement des valeurs des dérivés de points successifs indique l'existence d'une crête. Mathématiquement, si le produit des deux dérivés est négatif, la raie spectral central est un sommet que la courbe monte et descend. À chaque pic trouvé, l'indice k est assigné. À distance de résolution spectrale δf qui l'entourent est respectivement $k-1$ et $k+1$ index. Puis, selon les valeurs relatives de Y_{k-1} et Y_{k+1} , pic spectral corrigée doit être soit à un côté ou d'un autre côté. Si $Y_{k+1} > Y_{k-1}$, alors le pic réel est à droite, dans le cas contraire, il doit être à gauche (Fig. 3). Une fois que les maxima ont été trouvés, méthode de correction peut être appliquée. Dans le cas contraire, le programme continue au prochain point

N'importe quel signal physique est toujours bruitée, condition de seuil d'amplitude doit d'abord être définie. Qui délimite une zone d'intérêt au-dessus duquel sont considérés uniquement les composantes spectrales dominantes. Seuil est évidemment défini ci-dessus valeur de bruit de RMS. Dans le processus de test, il sera fixé par la valeur minimale d'une amplitude qui donne un seul composant recherché sans ambiguïté.

V. 5. Applications aux différents signaux

Afin d'évaluer la sensibilité de résolution et le bruit de fréquence du processus de correction, nous testons deux cas différents : l'un par rapport à un signal distinct avec des composants de fréquence fermé et l'autre par rapport au signal bruitée.

5.1. Signal avec des composants de fréquence fermé

Capacité de la méthode sur la séparation des deux composants de fermeture est testée. Ce signal a l'expression générale:

$$x(t) = A_1 \cos((2\pi f_1 t) + \varphi_1) + A_2 \cos((2\pi f_2 t) + \varphi_2) \quad (3)$$

où la différence tend vers zéro. Ici, pour une résolution spectrale δf , une distance relative paramètre m est définie telle que:

$$f_2 - f_1 = m \delta f \quad (4)$$

En maintenant la f_1 à valeur fixe, nous changer la valeur de m de 1 à 8 par étape 1. Pour chaque fréquence f_{2corr} obtenue après correction spectrale, nous définissons l'erreur de fréquence en le comparant à $f_2 = f_1 + m \delta f$. Résultats sont indiqués sur la figure 4.

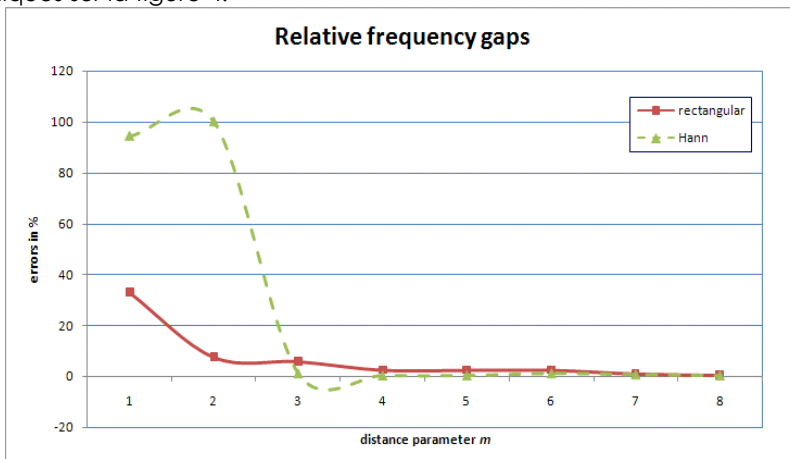


Figure 4 : Erreurs sur les intervalles relatifs en fonction du parameter de distance m

Si nous acceptons une erreur typique sur la détection étroitement séparé composants de 5 %, elle correspond au paramètre de distance minimale de 4. Au-dessus de cette valeur, il doit être désigné que Hann fenêtrage correction est plus précis et plus régulier que rectangulaire.

5.2. Signal de Noised

Un signal bruitée est obtenu par ajout de bruit à la force régulière. Il s'exprime par:

$$x(t) = A \cos(2\pi f t + \phi) + \frac{A}{SNR} \times noise \ function \tag{5}$$

où A, f et φ représente respectivement amplitude, de fréquence et de phase de chaque composant. SNR dénote approximative rapport signal sur bruit. Nous avons testé deux fonctions : bruit blanc et bruit gaussien. Tout d'abord, on utilise une fonction aléatoire et le dernier d'entre eux est traité selon l'algorithme de Box-Muller [9].

Dans cette section, nous utilisons un composant parfaitement non-synchrone dont la fréquence est $f = (n+0.5) f_s / (N-1)$ où n est un entier, f_s , la fréquence d'échantillonnage et N le nombre d'échantillons.

Le cas du SNR infinie, ce qui signifie signal non bruité, est présenté sur la table 2.

Tableau 2. Resultats de la correction spectrale sur l'amplitude, la fréquence et la phase pour le cas des signaux non bruités

	Error on amplitude (dB)	Location in relation to true frequency (Number of δf)	Rounded Relative error on phase angle (%)
Uncorrected rectangular window	-3.78	0.5	70 (69.70)
Corrected rectangular window	0.00	1.0	0.5 (0.48)
Uncorrected Hann window	-1.37	0.5	70 (69.86)
Corrected Hann window	-0.01	1.0	0.1 (0.09)

Avant corrections (spectre obtenu de FFT classique), erreurs d'amplitude dans le cas du rectangulaire et fenêtrage de Hann sont en accord avec le tableau 1. Effets de correction apparaissent clairement pour amplitude et surtout pour les valeurs de phase. Erreur résiduelle à la fréquence est sur l'ordre de 1δf : il provient de l'altération du bruit de l'amplitude relative A_{k-1} et A_{k+1} et semble être irréductible dans ce processus. Concernant la phase, le très grand fossé peut être observée entre les valeurs de spectres non corrigés et corrigés. En d'autres termes, aucune information importante n'est susceptible de phase de crue. Cependant, après correction, les erreurs sont presque annulés particulièrement pour fenêtrage de Hann.

En maintenant A, f et φ à valeurs fixes dans l'équation (9), nous avons fait varier SNR. Pour chaque amplitude, phase et fréquence obtenue après correction, nous définissons l'erreur relative en la comparant à la valeur true.

Avant application, une étape importante consiste dans la détermination du seuil utilisé pour détecter les composants du signal. De façon classique, elle est liée au SNU comme suit:

$$SNR \times threshold / A = cste \tag{6}$$

Ce chiffre exprime juste proportionnalité entre seuil et niveau de bruit. Ensuite, une valeur constante dépend seulement tous les deux sur le type de fenêtrage et le bruit caractéristique. Ce fait est conforme à nos observations. Le tableau 3 donne les valeurs trouvées dans ce cadre.

Table 3. Seuils selon les types de fenêtrage et de bruit

	White Noise	Gaussian Noise
rectangular window	0.2	0.1
Hann window	0.1	0.07

On observe que la fenêtrage de Hann est plus sensible que rectangulaire peu importe le type de bruits. Bruit gaussien semble être que moins influencés que blanc.

Différentes valeurs SNR, on applique systématiquement correction du signal non synchrone avec SNR une diminution de 5 à 0,3. Résultats sur l'amplitude et la phase apparaissent alors sur les figures 5 et 6 pour les cas respectifs de bruit blanc gaussien.

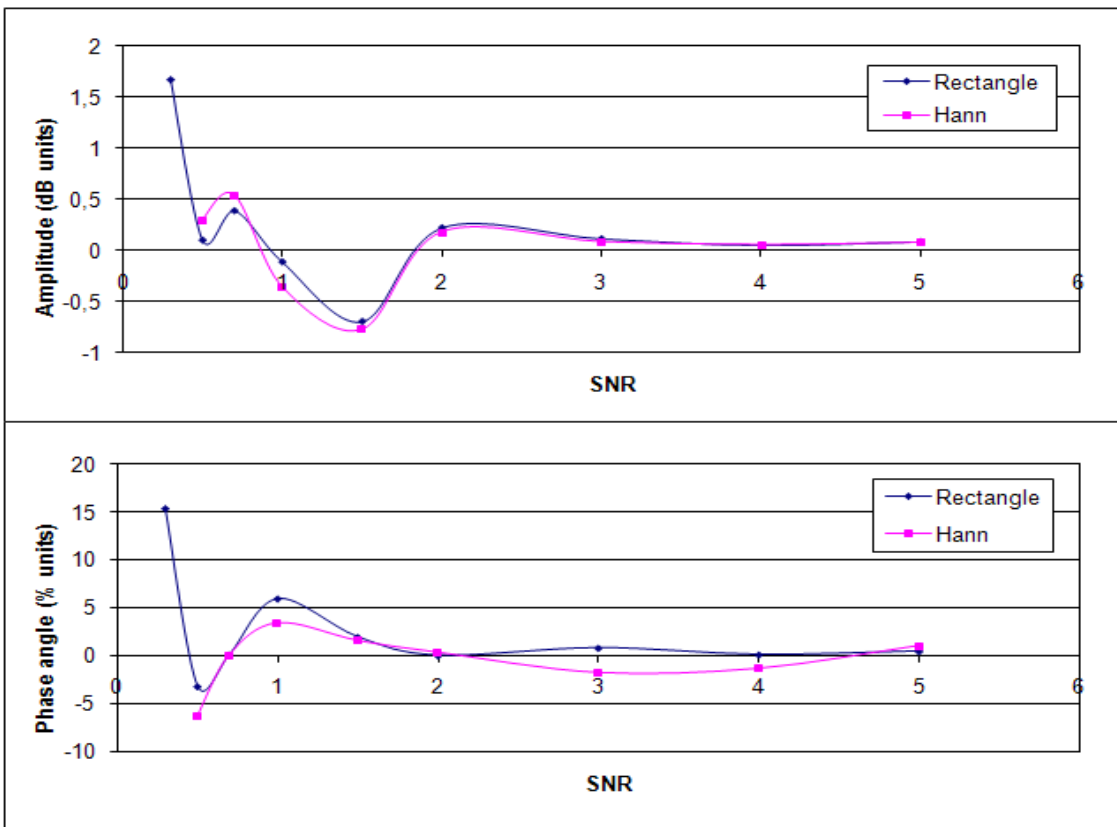


Figure 5 ; Résultats pour les signax à bruit blanc en termes d'amplitude (en haut) et de phase (en bas)

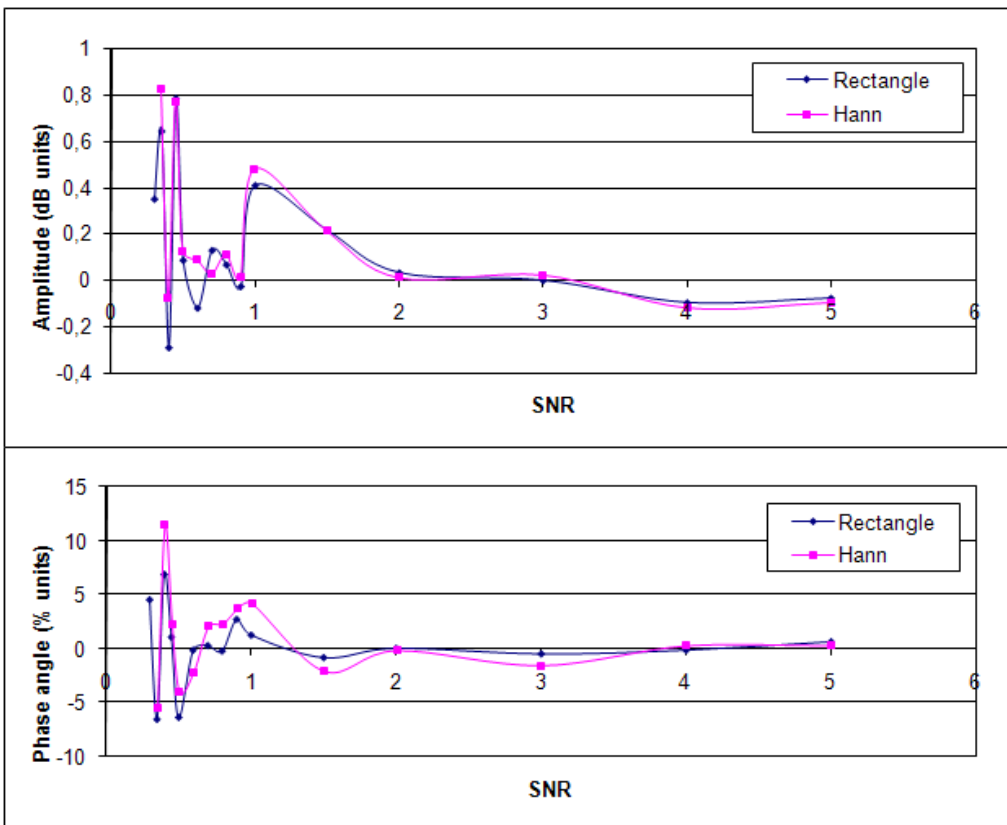


Figure 6 ; Résultats pour les signax à bruit gaussien en termes d'amplitude (en haut) et de phase (en bas)

Tout d'abord, il semble que ci-dessus SNR de 2, traitement du signal donne des résultats satisfaisants de l'ordre de ± 0.2 dB sur amplitude et ± 2 % sur la détermination de la phase. Dessous de SNR de 0,4, correction à l'aide de la fenêtre de Hann ne donne aucun résultat depuis amplitudes successives composantes A_{k-1} et A_{k+1} sont dans le même ordre que le bruit à cause du ratio entre le lobe secondaire premier et la centrale. Selon le tableau 1, c'est tout à fait différent en ce qui concerne la fenêtre rectangulaire : au-dessus de SNR de 0,3, elle permet une détection plus facile.

VI. Conclusion

Erreurs sur spectre FFT s'est produite quelque soin se fait, en raison de fenêtrage. Dans le domaine des vibrations, cela donne une analyse inexacte ou même diagnostic de panne. Pour y remédier, nous avons développé un outil qui s'adapte à n'importe quelle installation instrumentale. Au cours de l'interpolation, une nouvelle technique basée sur les produits dérivés entre points consécutifs entourant une pioche, est introduit. Bons résultats sont obtenus dans de nombreux cas et pour tout type de fenêtre, en particulier pour le paramètre de phase.

Au cours de l'implémentation de cet algorithme, il est établi que les valeur de seuil d'amplitude peut être choisie en cas de rectangulaire et Hann windows par $0,2 \times B$ où B représente la valeur de bruit efficace. En outre, la méthode semble très efficace et régulier au-dessus $SNR = 2$ pour n'importe quel type de bruit : valeurs typiques de ± 0.2 dB à amplitude et ± 2 % sur phase sont atteints. Il fonctionne toujours au $SNU = 0,3$ pour fenêtre rectangulaire et $SNR = 0,4$ pour un Hann avec moins de précision et stabilité. En ce qui concerne la résolution de fréquence, il est possible de la différence de fréquence séparée au-dessus de $4\delta f$ dans le cas de composantes du même ordre.

Une des applications intéressantes serait mis sur l'analyse de vibration. De cette façon, les valeurs exactes et fiables de la phase seront communiquées lors des fins de diagnostic.

References

- [1] Xie Ming, Ding Kang, Corrections for frequency, amplitude and phase in a fast Fourier transform of a harmonic signal, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 2, 10 (1996), pp. 211-221.
- [2] Huang Dishan, Phase error in fast Fourier transform analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 2, 9 (1995), pp. 113-118.
- [3] Howard A. Gaberson, A comprehensive windows tutorial, *Sound and Vibration*, Oxnard, California, (March 2006), pp. 14-23.
- [4] Yan Feng Li, Kui Fu Chen, Eliminating the pick effect of the fast Fourier transform, *Computer Physics Communication* 178 (2008), pp. 486-491.
- [5] Jing Wu, Wei Zhao, A simple interpolation algorithm for measuring multi-frequency signal based on DFT, *Measurement* 42 (2009), pp. 322-327.
- [6] Jaroslaw Gronczynski, Recursive Fourier transform algorithms with integrated windowing, *Signal Processing* 87, (2007), pp. 1003-1013.
- [7] Barry G. Quinn, Estimation of frequency, amplitude and phase from the DFT of a time series, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 45, n°3, (March 1997), pp. 814-817.
- [8] Alain Boulenger, Christian Pachaud, Analyse vibratoire en maintenance – surveillance et diagnostic des machines, Paris, Dunod (2003).
- [9] Ghazel A, Boutillon E, Danger JL, Gulak G, Laamari H. Design and performance analysis of a high speed AWGN communication channel emulator, *Computers And Signal Processing*. IEEE Pacific Rim Conference On Communications, (2001), vol 1 & 2, pp 374-377.