

Mots clés : Éléments finis, poutre sur base élastique, fondation de Winkler, fondation à 02 paramètres.

Résumé

Généralement pour le calcul des problèmes de fondation, sur base élastique, on considère la formulation de Winkler qui est une formulation simplifiée du phénomène d'interaction entre la poutre et le sol de fondation. La majorité des modèles ne prend en compte que des (déflexions) déplacements verticaux de l'ensemble (poutre et sol de fondation). Néanmoins, il existe des modèles de sols faisant apparaître les déformations horizontales et qui prennent en compte la continuité du sol pour les deux axes principaux. Ce sont des modèles dits à deux paramètres. La modélisation permet l'étude et la caractérisation de l'interaction par 02 paramètres k_1 et k_2 .

L'étude présente une évaluation de l'effet de l'interaction k_2 sur les éléments de réductions et des déplacements.

1- Introduction :

La stabilité des structures de génie civil est majoritairement liée aux fondations. La fondation a pour rôle principal la transmission des charges au sol support. Pour le calcul des fondations, on se réfère aux dispositions constructives. Lors des transmissions, on constate au niveau du sol des tassements instantanés. L'étude de ce type de problème a été réalisée depuis un certain nombre d'années [1]. L'approche de Biot[2] de la poutre sur base élastique a posé les bases pour la formulation. L'étude se divisera en 4 parties, la méthodologie, une partie validation, une simulation et finalement une partie discussion.

2- Méthodologie

Dans cette première partie, mets en exergue les hypothèses en partant des définitions, des différents types de fondations ainsi que de la formulation du modèle.

a- Type de fondations

i- Fondation de Winkler

La fondation de Winkler repose sur l'idéalisation du comportement du sol[1], [3]. D'une part, le sol est considéré comme une couche uniforme. D'autre par, la réaction du sol est ramenée à des ressorts qui n'interagissent pas entre eux, mais agissent sur la poutre comme plusieurs éléments distincts.

$$p(x) = k \cdot w(x) \quad (1)$$

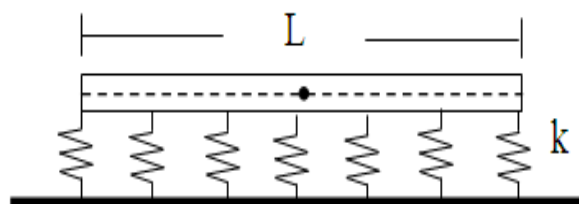


Figure 1 : Fondation de Winkler

ii- Fondation de Pasternak

Vu l'absence d'interaction horizontale entre les éléments, Pasternak [4] introduit une couche de cisaillement pour mieux représenter la réalité.

$$p(x) = k_w \cdot w(x) - k_G \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (2)$$

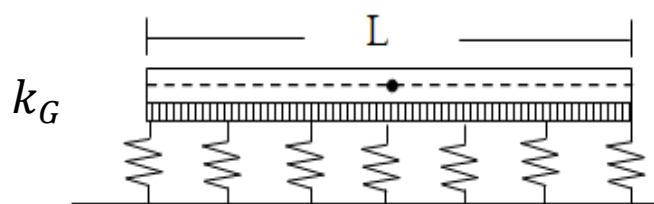


Figure 2 : Fondation de Pasternak

iii- Winkler généralisé

$$m(x) = k_0 \frac{dw(x)}{dx} \quad (3)$$

La combinaison de l'équation (1) et (3) induit à la formulation généralisée la fondation de Winkler.

$$p(x) = k.w(x) - k_0 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4)$$

Il existe d'autres modèles de fondations comme celle de Vlasov [5]. Mais ces modèles sont mathématiquement équivalents à celle de Winkler généralisé et celle de Pasternak.

b- Formulation

La formulation variationnelle est basée sur une interpolation de type polynomial Cubique[6]. L'utilisation d'un polynôme de plus haut degré augmente la précision pour les calculs, mais introduit des termes qui n'ont pas physiquement de sens et c'est pour cela que notre modèle utilisera une fonction d'interpolation type spline cubique d'Hermite.

- Équation d'équilibre pour la poutre sur base élastique

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_w w = q(x) \quad (5)$$

- Formulation intégrale

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L [E.I.(w'')^2 + N(w')^2 - k_s(w')^2 + k_w w^2 - 2.q(x)w] dx \quad (6)$$

- Formulation en élément fini

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_e [u^T K_1 u + u^T K_2 u + u^T K_3 u + u^T K_4 u - 2u^T C]^e \quad (7)$$

- Formulation élément fini

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \quad (8)$$

- Équation sous forme matricielle :

$$K.U = F \quad (9)$$

- Équation d'interpolation d'Hermite, type C1

$$\begin{aligned} w(x) &= H_1 U_1 + H_2 U_1' + H_3 U_2 + H_4 U_2' \\ H_1(r) &= 2r^3 - 3r^2 + 1 \\ H_2(r) &= (r^3 - 2r^2 + r)L \\ H_3(r) &= (r^3 - r^2)L \end{aligned} \quad (10)$$

- Matrice de rigidité

$$K_1 = \frac{E.I}{L^3} \begin{vmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (11)$$

- Pour l'interaction sol-fondation

$$K_2 = \frac{-N}{30L} \begin{vmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & 36 & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (12)$$

- Pour la couche de cisaillement

$$K_3 = \frac{k_s b}{N} K_2 \quad (13)$$

- Pour le paramètre k_w de Winkler

$$K_4 = \frac{k_w b}{L^3} \begin{vmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 12 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{vmatrix} \quad (14)$$

c- Indicateurs

Pour l'estimation de l'écart entre les modèles, on utilisera le pourcentage absolu moyen d'erreur (MAPE). V_x et F_x représente respectivement les valeurs au nœud «i» pour la poutre à 01 et 02 paramètres.

$$M = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n \left| \frac{V_x - F_x}{V_x} \right| \tag{15}$$

3- Résultats :

La première partie des résultats est sur la validation du modèle avec un (01) paramètre, avant de pouvoir simuler avec deux (2) paramètres.

d- Validation du modèle :

La validation du modèle a été effectuée en comparant les résultats obtenus par une approche purement analytique avec nos résultats de simulations. Cette étude analytique a été menée par Borak & co [7] : «Beams on Elastic Foundation Using Modified Betti's Theorem».

i- Structure de référence

La structure est une poutre sur base élastique avec efforts ponctuels, répartie et moments.

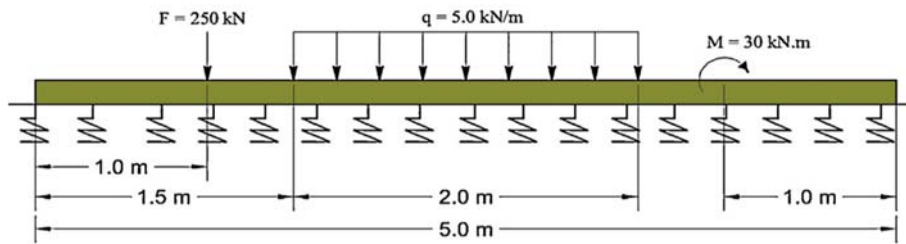


Figure 3 : Structure de validation

Les caractéristiques de comparaisons sont les caractéristiques fournies par l'article[7].

Tableau I-1 : Caractéristiques

Caractéristiques		
Largeur de la poutre	b	0,40 m
Hauteur de la poutre	H	0,20 m
Paramètre N° 2 de Winkler (Effet des efforts normaux)	k_s	0 N/m ³
Paramètre N° 1 de Winkler	k_w	10 ⁸ N/m ³
Module d'élasticité	E	21 0 ¹¹ Pa

Pour la validation, la discrétisation a été faite en divisant la structure en dix (10) éléments de longueurs égales. Les résultats de comparaison sont sur les 11 nœuds.

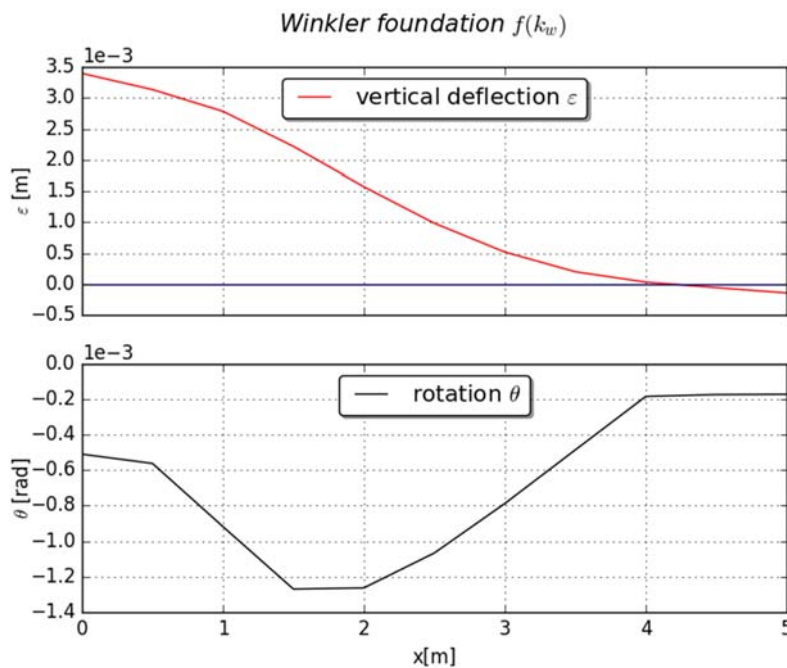


Figure 4 : Déplacements de la structure

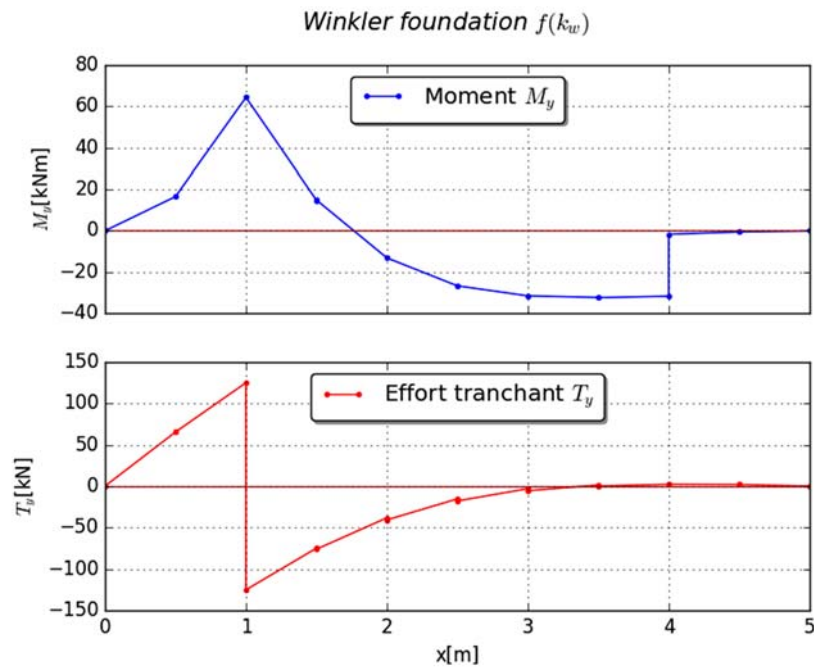


Figure 5 : Efforts dans la structure
Tableau I-2 : Comparaison du modèle et de la référence

L(m)	w (m)		Q (kN)	
	Réf.	Présent	Réf.	Présent
0	3,390E-03	3,395E-03	2 800	0,000
0,5	3,130E-03	3,134E-03	66 700	65 338
1	2,790E-03	2,783E-03	124 200	124 803
1			- 125 200	- 125 197
1,5	2,220E-03	2,217E-03	-73 500	-74 912
2	1,570E-03	1,572E-03	-39 100	-38 278
2,5	5,200E-04	5,190E-04	-16 800	-15 371
3	2,000E-04	2,010E-04	-3 700	-3 064
3,5	4,000E-05	3,300E-05	-0,100	0,132
4	-6,000E-05	-5,600E-05	1,800	2 219
5	-1,400 E-04	-1,420 E-04	-0,100	0,000

ii- Conclusion :

Comme on peut le remarquer, il n'y a pratiquement pas de différence au niveau des déplacements que ce soit la rotation ou bien la déflexion verticale. Par contre au niveau des points d'application des forces, il existe une différence entre ce qui concerne l'effort tranchant, ce qui est dû à l'imprécision numérique et au nombre assez réduit d'éléments de réduction. De ce fait on peut considérer que notre modèle est valide.

d- Simulation et influence du second paramètre

Pour la simulation avec deux paramètres, la structure précédemment décrite avec les efforts externes sera reprise avec ajout du second paramètre de Winkler. Dans la suite pour l'évaluation de l'influence de la couche de cisaillement, on prendra $k_s = \frac{k_w}{10} = 10^7 N/m^3$.

i- Simulation de la structure à deux paramètres.

Afin d'augmenter la précision, le modèle a été discrétisé à 100 éléments, soit un nœud tous les 5 cm. Après simulation, sur les figures 6 et 7, la structure avec le second paramètre est représentée en traits continus.

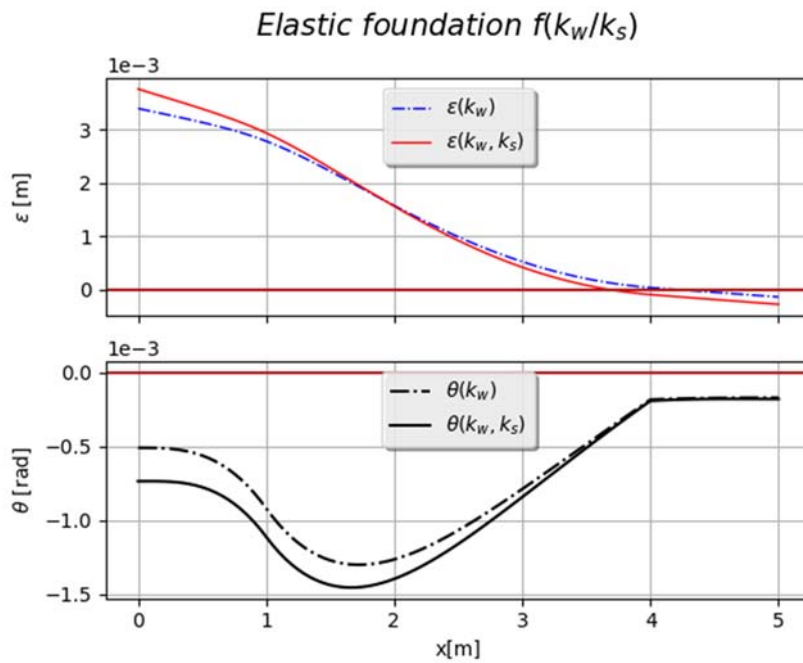


Figure 6 : Déflexion et rotation

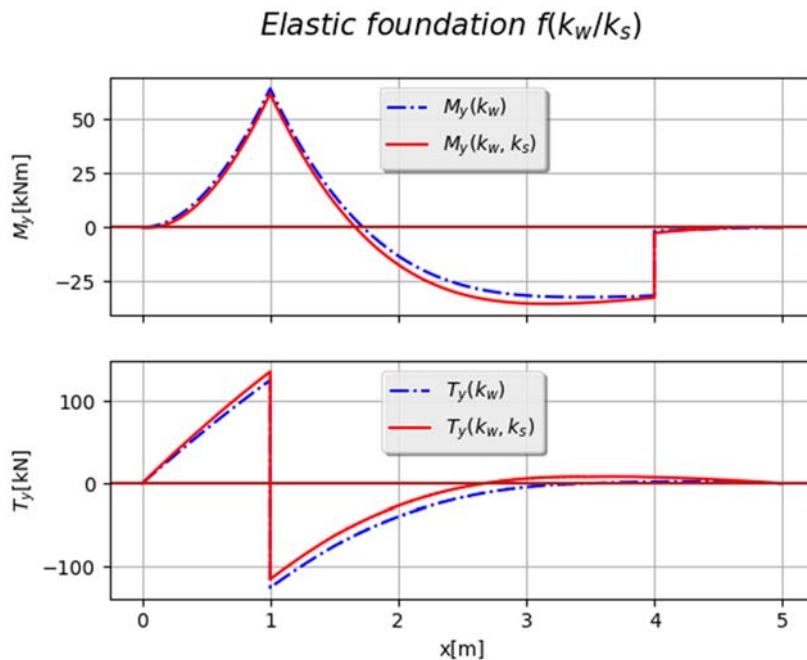


Figure 7 : Moment et effort tranchant

ii- Estimations des erreurs

Les erreurs calculent sur tous les nœuds et pour toutes les grandeurs disponibles.

Tableau I-3 : Différence entre une formulation à un (1) et deux (2) paramètres :

Désignation	MAPE [%]
Effort tranchant	2,01
Moment de flexion	2,79
Rotation de la section	13,70
Déflexion de la poutre	25,38

4- Discussion et conclusion

Les erreurs sur les efforts internes (moments et efforts tranchants) sont négligeables, de l'ordre de 3 %. Par contre en ce qui concerne les déplacements (déflexions et rotations), ces erreurs ne sont pas assez importantes. Ces différences au niveau des déplacements s'expliquent par la présence de l'interaction au niveau de la couche de cisaillement, celle-ci exerce une force de compression sur le sol suivant l'axe horizontal.

En ce qui concerne la poutre sur base élastique, la fondation de Winkler à 1 paramètre permet de bien approximer les efforts internes. Par contre pour la stabilité de la structure (tassement) il est recommandé d'utiliser un modèle à deux paramètres.

Afin de mieux reproduire le comportement de l'interaction de la fondation avec le sol, nos prochains travaux se porteront sur l'intégration du comportement non linéaire des coefficients caractéristiques du sol.

Référence :

- [1] F. Zhaohua and R. D. Cook, "Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, no. 6, pp. 1390–1402, 1983.
- [2] M. A. Biot, "Bending of an infinite beam on an elastic foundation," *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 2, no. 3, pp. 165–184, 1922.
- [3] S. C. Dutta and R. Roy, "A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system," *Computers & Structures*, vol. 80, no. 20–21, pp. 1579–1594, Aug. 2002.
- [4] P. L. Pasternak, "On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants," *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture*, Moscow, 1954.
- [5] V. Z. Vlasov and N. N. Leont'ev, *Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations: (Balki, Plity i Obolochki Na Uprugom Osnovanii)*. Israel Program for Scientific Translations, 1966.
- [6] J. E. Akin, J. R. Whiteman, and J. H. Davenport, *Finite Elements for Analysis and Design: Computational Mathematics and Applications Series*, Pap/Dsk edition. London: Academic Press, 1994.
- [7] L. Borák and P. Marcián, "Beams on elastic foundation using modified Betti's theorem," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 88, pp. 17–24, Nov. 2014.