



Journées de Recherche des ISTs et leurs partenaires internationaux – 02 au 04 décembre 2020, Antsiranana
« *L'innovation et le développement durable : perspectives, enjeux et défis sociétaux* »

Article 31 : Etude de la loi de distribution du coefficient de variation de Sharma

J. M. Tovoherly¹, A. Totohasina², D. R. Feno³

¹Ecole Doctorale Thématique « Science, Culture, Société et Développement » de
l'Université de Toamasina

²Ecole Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique de l'Université
d'Antsiranana

³Faculté de Droit, d'Économie, de Gestion, de Mathématiques, d'Informatique et
Applications de l'Université de Toamasina

Correspondant : josoamicheltovoherly@gmail.com

Résumé

Le coefficient de variation (CV) de Pearson est devenu aujourd'hui l'une des mesures de dispersion largement utilisées par les chercheurs, malgré ses faiblesses et sa nature trompeuse. Face à ce problème, en 2011, Sharma et son équipe ont tenté de trouver un autre coefficient de dispersion via la normalisation de la variance. Bien que cette nouvelle mesure de dispersion semble meilleure et plus efficace que le coefficient de variation de Pearson, son utilisation est encore limitée. Ainsi, cet article contribue à l'étude de la loi de distribution de CVS afin de favoriser son application aux différents domaines scientifiques.

Mots clés : Coefficient de variation, loi de Gumbel, loi de Fisher, produit des deux lois de Gumbel, produit des deux lois de Student

1. INTRODUCTION

Le coefficient de variation (CV) de Pearson est une mesure de dispersion qui préoccupe les chercheurs aujourd'hui. Ce fait se caractérise par une large application de cette

mesure dans plusieurs domaines scientifiques : actuellement, les laboratoires l'utilisent pour calculer l'incertitude des résultats de mesure [1] ; Les chercheurs agronomes s'en servent pour certifier les épandeurs [2], les techniciens professionnels des usines de production l'emploient pour réaliser des cartes de contrôle très sophistiquées afin de pouvoir agir sur la qualité des produits [3] et [4] ; les chercheurs en médecine l'utilisent pour évaluer ou quantifier la douleur ressentie par les patients [5] et pour traiter les images échographiques [6] ; les chercheurs en psychologie ont trouvé son application dans le choix d'une décision sous risque [7] ; Les chercheurs en énergie renouvelable en profitent pour mesurer la variabilité du rayonnement solaire global entre deux sites différents [8]. Cependant, certains chercheurs dénoncent que cette mesure pose un énorme problème. Elle pourrait être trompeuse dans plusieurs cas, notamment lorsque la variable réelle étudiée prend sa moyenne au voisinage de 0. De plus, son interprétation mathématique pose des problèmes. Par conséquent, en 2011, Sharma et son équipe ont proposé un nouveau coefficient de variation normalisé qui présente de meilleures caractéristiques que le CV de Pearson.

Malgré l'efficacité de cette nouvelle mesure de dispersion de Sharma, elle n'est pas encore exploitée par les chercheurs d'aujourd'hui. Ainsi, il s'avère utile d'étudier la loi de distribution de cette mesure de dispersion normalisée afin de favoriser son usage dans divers domaines. D'où notre actuel intérêt dans ce papier.

Le reste de notre article est organisé comme suit : la section 2 donnera la loi de distribution exacte et la loi de distribution approximée du coefficient de variation de Sharma, et discutera leur ressemblance en fonction du paramètre de la loi exacte ; la section 3 terminera notre présentation par une brève conclusion.

2. CONTENU

Afin de trouver la loi exacte du CVS, nous proposons d'investir les résultats dans [9]. Après, nous essayons de découvrir la loi approximée du CVS à l'aide des résultats dans [10]. Ensuite, nous discutons la similitude des résultats trouvés à l'aide du test d'ajustement de Kolmogorov. Nous utilisons le logiciel de statistique R pour faire tous les calculs nécessaires et la construction des différents graphes.

2.1. Matériels et méthodes

Dans cette sous-section, nous allons présenter, d'abord, les deux mesures de dispersion CV de Pearson et CVS de Sharma, puis nous énumérons les deux lois de distribution des

variables aléatoires qui nous aident à trouver facilement la loi exacte et la loi approximée de distribution de CVS.

2.1.1. Coefficient de variation de Pearson

Définition 1. Le coefficient de variation de Pearson d'une série de valeurs X_1, \dots, X_n est la quantité $CV(X)$ définie par :

$$CV(X) = \frac{S(X)}{\bar{X}} \quad (1)$$

où :

$$S(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2)$$

est l'écart – type de la série étudiée.

Il semble difficile de trouver directement une interprétation mathématique de $CV(X)$, mais la seule interprétation que partagent les statisticiens est : si $CV(X) > 0,3$, alors les valeurs de la série étudiée sont dispersées [11].

Proposition 1. Propriétés du coefficient de variation de Pearson

1) $CV(X)$ n'est pas une mesure normalisée. Selon [12], on a : $CV(X) \leq \sqrt{n-1}$.

2) $CV(X)$ n'est pas stable par une transformation linéaire :

$$\forall a \in R, CV(X + a) \neq CV(X) \quad (3)$$

3) $CV(X)$ est stable par une multiplication avec un scalaire :

$$\forall k \in R, CV(k.X) = CV(X) \quad (4)$$

4) $CV(X)$ n'est pas définie pour une série possédant une moyenne nulle ou très proche de 0.

5) $CV(X)$ est influencé par la moyenne et donne deux valeurs différentes pour deux séries à valeurs symétriques. En effet, soient, par exemple, $X = \{1 ; 2 ; 3 ; 10\}$ et $Y = \{1 ; 8 ; 9 ; 10\}$. On a : $\bar{X} = 4$, $\bar{Y} = 7$, $CV(X) = 0.88$ et $CV(Y) = 0.51$. Cette différence de coefficient de variation est due à la différence de la moyenne. D'où la propriété 5).

6) Loi de distribution de $CV(X)$: si X suit la loi normale $N(\mu, \sigma)$ et si on suppose que $\delta = \frac{\sigma}{\mu}$, alors $\frac{\sqrt{n}}{CV(X)}$ suit la loi de Student non centrée avec $n - 1$ degrés de liberté et de paramètre de décentrage égale à $\frac{\sqrt{n}}{\delta}$ [13].

Les propriétés 4) et 5) montrent que $CV(X)$ pourrait être trompeur. De plus, il est important de savoir que la variance est encore meilleure comme mesure de dispersion que le coefficient de variation de Pearson. Cette affirmation est en outre étayée par la classification des tests d'hétéroscédasticité trouvés dans [14]. Ce travail montre clairement que les tests basés sur la comparaison des variances sont plus sensibles à la

détection d'une éventuelle hétéroscédasticité d'un modèle de régression linéaire que celles basées sur la comparaison des coefficients de variation de Pearson.

Pour pallier ce problème de CV(X) de Pearson, en 2011, Sharma et son équipe ont proposé dans [15] un nouveau coefficient de variation qui semble meilleur que le CV(X) de Pearson.

2.1.2. Coefficient de variation de Sharma

Sharma et son équipe ont voulu trouver un coefficient de variation possédant les propriétés de la variance. Ainsi, afin de normaliser la variance, ils ont appliqué la propriété de majoration de variance trouvée par Muilwijk en 1966 [15] : pour toute variable aléatoire réelle X , on a :

$$0 \leq S^2(X) \leq [Max(X) - \bar{X}][\bar{X} - Min(X)] \quad (5)$$

Par conséquent, on a :

$$0 \leq \frac{S(X)}{\sqrt{[Max(X) - \bar{X}][\bar{X} - Min(X)]}} \leq 1 \quad (6)$$

Définition 2. Le coefficient de variation de Sharma d'une variable aléatoire réelle X est la quantité CVS(X) définie par :

$$CVS(X) = \begin{cases} \frac{S(X)}{\sqrt{[Max(X) - \bar{X}][\bar{X} - Min(X)]}}, & \text{si } Max(X) \neq \bar{X} \text{ ou } Min(X) \neq \bar{X}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

Ainsi, CVS(X) est l'écart-type normalisé de X .

Proposition 2. Propriétés du coefficient de variation de Sharma

- 1) CVS(X) n'est pas influencé par la moyenne. Il mesure la dispersion de deux séries à valeurs symétriques par une même valeur. Reprenons encore l'exemple précédent : soient $X = \{1; 2; 3; 10\}$ et $Y = \{1; 8; 9; 10\}$. On a : $\bar{X} = 4$, $\bar{Y} = 7$, $CVS(X) = 0.83$ et $CVS(Y) = 0.83$.

- 2) CVS(X) est normalisé : Pour toute variable aléatoire réelle X , $0 \leq CVS(X) \leq 1$.

- 3) CVS(X) est stable par une transformation linéaire :

$$\forall a \in R, CVS(X + a) = CVS(X) \quad (8)$$

- 4) CVS(X) est stable par une multiplication avec un scalaire :

$$\forall k \in R, CVS(k.X) = CVS(X) \quad (9)$$

Corolaire :

$$\forall (k, a) \in R^2, CVS(k.X + a) = CVS(X) \quad (10)$$

2.1.3. Loi du produit des deux variables suivant une loi de Gumbel

En 2005, Nadarajah a donné dans [9] la loi des variables aléatoires :

$$S = X + Y \quad (11)$$

$$D = X - Y \quad (12)$$

$$P = XY \quad (13)$$

$$R = X/Y \quad (14)$$

telles que X et Y sont des variables aléatoires réelles suivant la loi de Gumbel bivariée. Dans cet article, l'auteur a même donné les tables des quantiles de ces quatre variables aléatoires. Nous rappelons ci – dessous les astuces nécessaires pour la loi de l'équation (13).

Si X et Y sont des variables aléatoire dont la fonction de densité jointe est définie par :

$$\forall x > 0, y > 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 1, f(x, y) = \{(1 + \theta x)(1 + \theta y) - \theta\} \exp\{-(x + y + \theta xy)\} \quad (15)$$

et la fonction de répartition jointe est définie par :

$$\forall x > 0, y > 0 \text{ et } 0 \leq \theta < 1, F(x, y) = \exp\{-(x + y + \theta xy)\} \quad (16)$$

alors, (X, Y) est dite une variable aléatoire suivant la loi de Gumbel bivariée.

Théorème 1 : Si la distribution conjointe de X et Y est définie selon (15), alors la fonction de densité de l'équation (13) est :

$$f_p(p) = 2 \exp(-\theta p) \{ \theta \sqrt{p} K_1(2\sqrt{p}) + (1 - \theta + \theta^2 p) K_0(2\sqrt{p}) + \theta \sqrt{p} K_{-1}(2\sqrt{p}) \} \quad (17)$$

avec :

$$0 \leq p < \infty \quad (18)$$

et

$$K_v(x) = \frac{\sqrt{\pi} x^v}{2^v \Gamma(v+1/2)} \int_0^{+\infty} \exp(-xt) (t^2 - 1)^{v-1/2} dt \quad (19)$$

La fonction de densité (17) peut aussi s'écrire comme :

$$f_p(p) = \exp(-\theta \cdot p) \{ \theta \cdot I_0 + (1 - \theta + \theta^2 \cdot p) I_1 + \theta \cdot p \cdot I_2 \} \quad (20)$$

avec :

$$I_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^k} \exp\left(-x - \frac{p}{x}\right) dx \quad (21)$$

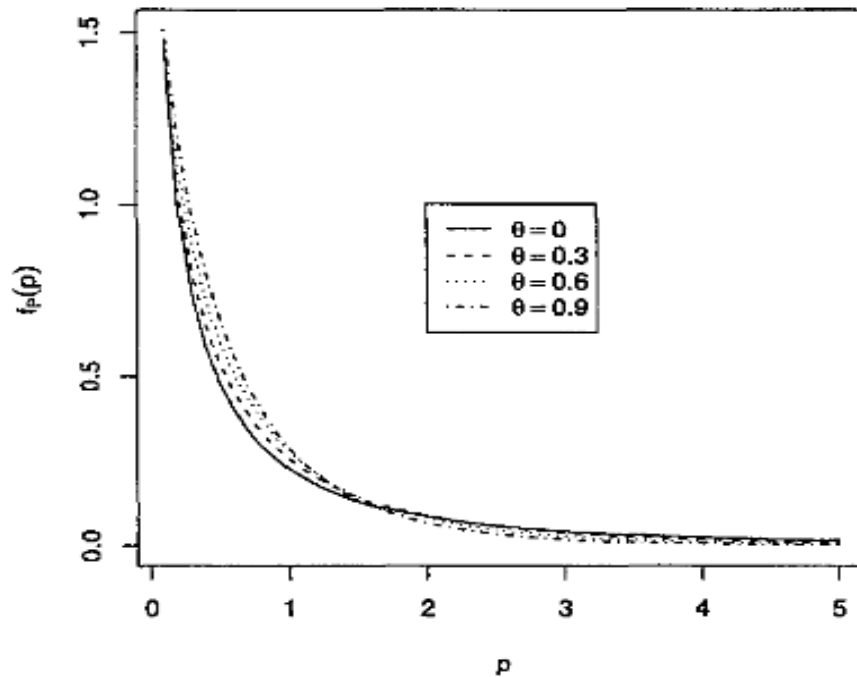


Figure 42 : Courbe de la fonction (1) pour $\theta = 0$, $\theta = 0.3$, $\theta = 0.6$ et $\theta = 0.9$ (Source [9], p.503)

Théorème 2 : Si la distribution conjointe de X et Y est définie selon (15), alors le moment d'ordre n de la variable aléatoire $P = XY$ est défini par :

$$\mathbf{E(P^n)} = \frac{(n!)^2}{\theta^n} \phi\left(n, 1, \frac{1}{\theta}\right), \text{ pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Avec :

$$\phi(a, b, x) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} G(a-b+1; 2-b; x) + \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma((a-b+1))} G(a, b, x) \quad (23)$$

et

$$G(\alpha, \beta, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{x^k}{k!} \text{ et } (n)_k = n(n+1) \dots (n+k-1) \quad (24)$$

2.1.4. Loi du produit des deux variables aléatoires suivant une loi de Student

En 1980, Wallgren a déjà étudié dans [10] la loi d'un produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Student en introduisant la variable aléatoire

$$W = \frac{XY}{S^2} = \left(\frac{X}{S}\right) \left(\frac{Y}{S}\right) \quad (25)$$

telle que X et Y suivent respectivement les lois normales $N(\mu_1, \sigma)$ et $N(\mu_2, \sigma)$. On note par ρ le coefficient de corrélation linéaire de X et Y, et par $f(w, \rho)$ la fonction de densité de W. Wallgren a évoqué les propriétés suivantes ([10], p. 997) :

- a) $f(w, \rho) = f(-w, -\rho)$;
- b) Dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0$, si $n \rightarrow +\infty$ et $\rho \rightarrow 1^-$, alors la distribution de W tend vers la loi de Fisher à 1 et n degré de liberté, qu'on note par $F_{(1,n)}$.

2.2. Résultats

Les trouvailles précédentes nous permettent d'avoir les deux résultats cités dans les deux propositions suivantes.

Proposition 3. La loi de distribution exacte de $\frac{n}{\text{CVS}^2(X)(n+1)}$ est définie par la fonction de densité (17), et ses moments d'ordre n sont donnés par l'équation (22).

Preuve :

Soit $E_n = x_1, \dots, x_n$ un échantillon de n valeurs d'une variable aléatoire réelle X suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , notée $N(\mu, \sigma)$. Alors, les variables aléatoires

$Y_1 = X - \bar{X}$ et $Y_2 = \bar{X} - X$ suivent la loi normale $N\left(0, \sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$. Ainsi, les variables aléatoires

$$U_1 = \frac{Y_1 \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n+1}} = \frac{(X - \bar{X}) \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n+1}} \quad (26)$$

et

$$U_2 = \frac{Y_2 \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n+1}} = \frac{(\bar{X} - X) \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n+1}} \quad (27)$$

suivent la loi normale centrée réduite $N(0,1)$.

Comme la variable aléatoire $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ suit la loi de Khi – deux à n degrés de liberté, alors les variables aléatoires $Z_i = \frac{U_i}{(\sqrt{n} s / \sigma) / \sqrt{n}}$, $i = 1, 2$, suivent la loi de Student à n degrés de liberté.

Après simplification, on a :

$$Z_1 = \frac{(X - \bar{X}) \sqrt{n}}{s \sqrt{n+1}} \quad (28)$$

et

$$Z_2 = \frac{(\bar{X} - X) \sqrt{n}}{s \sqrt{n+1}} \quad (29)$$

Toutefois, on peut remarquer que :

$$W_1 = \text{Max}(Z_1) = \frac{\text{Max}(X) - \bar{X}}{s} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad (30)$$

et

$$W_2 = \text{Min}(Z_2) = \frac{\bar{X} - \text{Min}(X)}{s} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad (31)$$

Ainsi, on a :

$$\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{W}_2 = \frac{n}{\text{CVS}^2(X)(n+1)} \quad (32)$$

Pourtant, on sait que « les lois de Student appartiennent en majorité au domaine d'attraction de la loi de Fréchet » ([16], p.11). « Cependant, on peut démontrer que si une distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull ou de Fréchet, alors elle appartient aussi au domaine d'attraction de Gumbel. C'est l'une des raisons pour laquelle l'on retient fréquemment la distribution de Gumbel dans les applications. C'est aussi pour cette raison que la distribution de Gumbel sert de référence pour définir

l'hypothèse nulle dans les tests de diagnostic des lois asymptotiques des maxima » ([11], p.15). Ainsi, on peut dire sans doute que les variables aléatoires W_1 et W_2 suivent toutes la loi de Gumbel pour n suffisamment grand. Alors, la variable aléatoire $W_1 \cdot W_2 = \frac{n}{\text{cvs}^2(X)(n+1)}$ est un produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Gumbel. D'où la proposition 3.

Proposition 4. La variable aléatoire $\frac{n}{\text{cvs}^2(X)(n+1)}$ suit approximativement la loi de Fisher $F_{(1,n)}$ pour n suffisamment grand.

Preuve :

En effet, l'approximation de la loi de Gumbel la plus utilisée est la loi normale ([17] et [18], p. 203). De plus, si les deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi $N(0, \sigma)$, où σ est très faible, alors la loi de $Z = \text{Max}(X, Y)$ peut être approximée par la loi normale $N(0, \sigma)$ ([17], p.211).

Comme X suit la loi normale $N(\mu, \sigma)$, alors, si l'on suppose que $\text{Max}(X)$ et $\text{Min}(X)$ suivent approximativement la loi $N(\mu, \sigma)$, alors

$$V_1 = \text{Max}(X - \bar{X}) = \text{Max}(X) - \bar{X} \quad (33)$$

Et

$$V_2 = \text{Min}(\bar{X} - X) = \bar{X} - \text{Min}(X) \quad (34)$$

suivent la loi normale $N(0, \sigma\sqrt{(n+1)/n})$. Si on pose $D = S(X) \cdot \sqrt{(n+1)/n}$, alors on a une variable aléatoire identique à celle que Wallgren a étudié dans [10] :

$$P = \left(\frac{V_1}{D}\right) \left(\frac{V_2}{D}\right) = W_1 \cdot W_2 \quad (35)$$

Pourtant, on a :

$$Z_1 = \frac{(X - \bar{X})\sqrt{n}}{S\sqrt{n+1}} \quad (36)$$

Et

$$Z_2 = \frac{(\bar{X} - X)\sqrt{n}}{S\sqrt{n+1}} \quad (37)$$

De plus, on a :

$$W_1 = \text{Max}(Z_1) \text{ et } W_2 = \text{Min}(Z_2) \quad (38)$$

Cependant, on a : pour toute variable aléatoire réelle U , $\text{Min}(U) = -\text{Max}(-U)$.

Toutefois, on a : $Z_1 = -Z_2$. Donc, on a :

$$W_2 = \text{Min}(Z_2) = -\text{Max}(-Z_2) = -\text{Max}(Z_1) = -W_1 \quad (39)$$

Par conséquent, le coefficient de corrélation de W_1 et W_2 tend vers -1^+ . Ainsi, d'après les propriétés (a) et (b) de la fonction de répartition du produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Student citées ci-dessus, on peut approximer la loi de $W_1 \cdot W_2 = \frac{n}{\text{cvs}^2(X)(n+1)}$ par la loi de Fisher $F_{(1, n)}$ pour n suffisamment grand. D'où la proposition 4.

2.3. Discussions

Dans cette section, nous allons discuter, à l'aide du test d'ajustement de loi de Kolmogorov, la similitude de la loi de distribution exacte et de la loi de distribution approximée de la variable $W_1.W_2 = \frac{n}{CVS^2(X)(n+1)}$ selon les valeurs du paramètre θ de la fonction de densité (17), qui n'est autre que le coefficient de détermination de W_1 et W_2 . Le test d'ajustement de loi de Kolmogorov consiste à comparer le maximum des écarts entre la fonction de répartition F_p du produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Gumbel et la fonction de répartition $F_{1,n}$ de la loi de Fisher à 1 et n degrés de liberté avec une valeur critique déjà tabulée. Ainsi, on considère l'écart maximal : $D_{\max} = \max(|F_p(x_i) - F_{1,n}(x_i)|)$, $i = \overline{1, m}$. Si $D_{\max} \leq \text{valeur_critique}(\alpha)$, alors on accepte au niveau de confiance $(1 - \alpha)100\%$ que F_p est approximativement égale à $F_{1,n}$.

Le tableau 1 suivant donne les valeurs de D_{\max} obtenues selon la taille de l'échantillon n et le paramètre θ de la loi du produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Gumbel.

Tableau 1 : Valeur des D_{\max} obtenues selon la taille n de l'échantillon et le paramètre θ de la loi du produit de deux variables suivant la loi de Gumbel

	$\theta = 0.01$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.6$	$\theta = 0.9$	Valeurs critiques $\alpha = 0.05$
$n = 15$	0.08104466	0.1116648	0.1531556	0.1919846	0.33760
$n = 30$	0.08114414	0.1118202	0.1531556	0.1920343	0.24170
$n = 50$	0.08127642	0.1118862	0.1531589	0.1922692	0.18841
$n = 80$	0.0813458	0.1118887	0.1531664	0.1923784	0.14960
$n = 100$	0.0813458	0.1118887	0.1531589	0.1923784	0.13403

Selon le tableau 1, nous pouvons conclure que la loi de Fisher $F_{1,n}$ peut approximer la loi du produit des deux variables aléatoires suivant la loi de Gumbel pour $\theta \leq 0.3$. De plus, Les Figures 2, 3 et 4 illustrent encore cette affirmation.

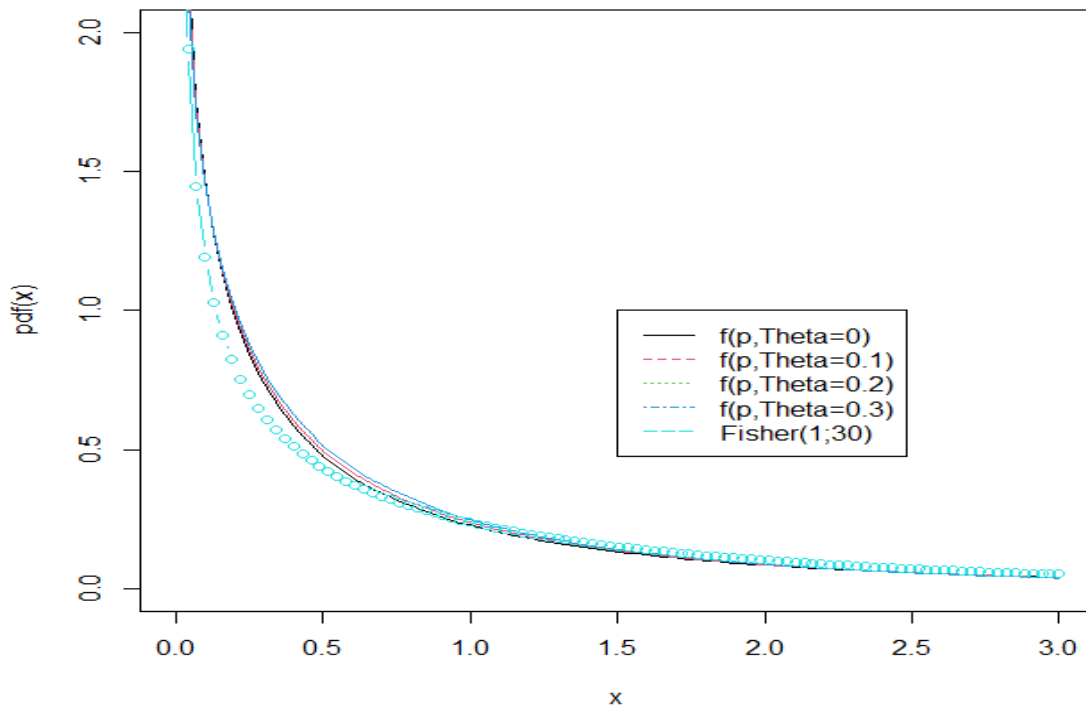


Figure 43 : Fonction de densité exacte de $W_1.W_2$ pour $\theta = \{0 ; 0.1 ; 0.2 ; 0.3\}$ et fonction de densité de la loi de Fisher à 1 et 30 degré de liberté

Fonctions de répartition

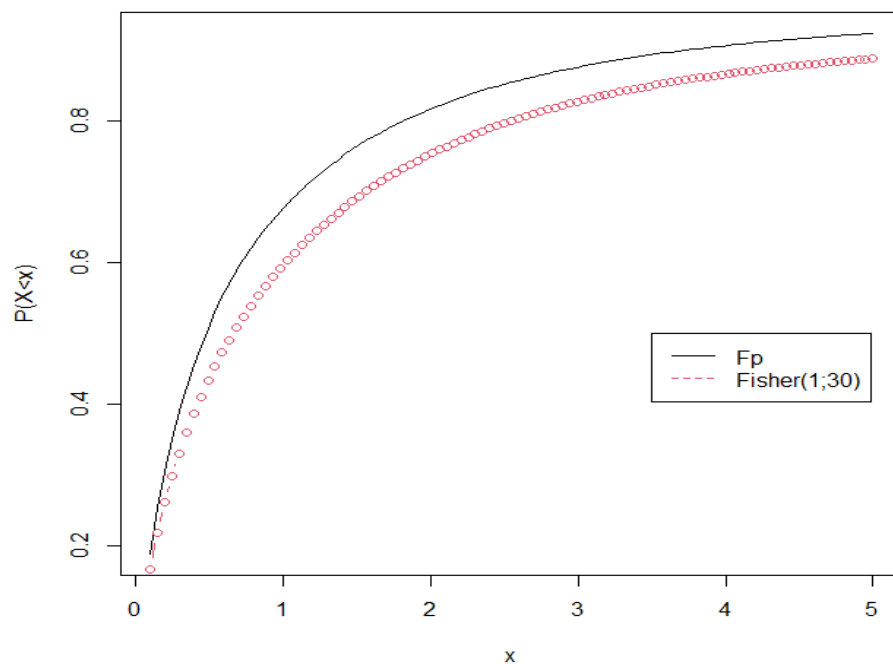


Figure 44 : Fonctions de répartition F_p obtenue à partir de l'équation (16) et $F_{1;30}$ pour $\theta = 0.01$

Fonctions de répartition

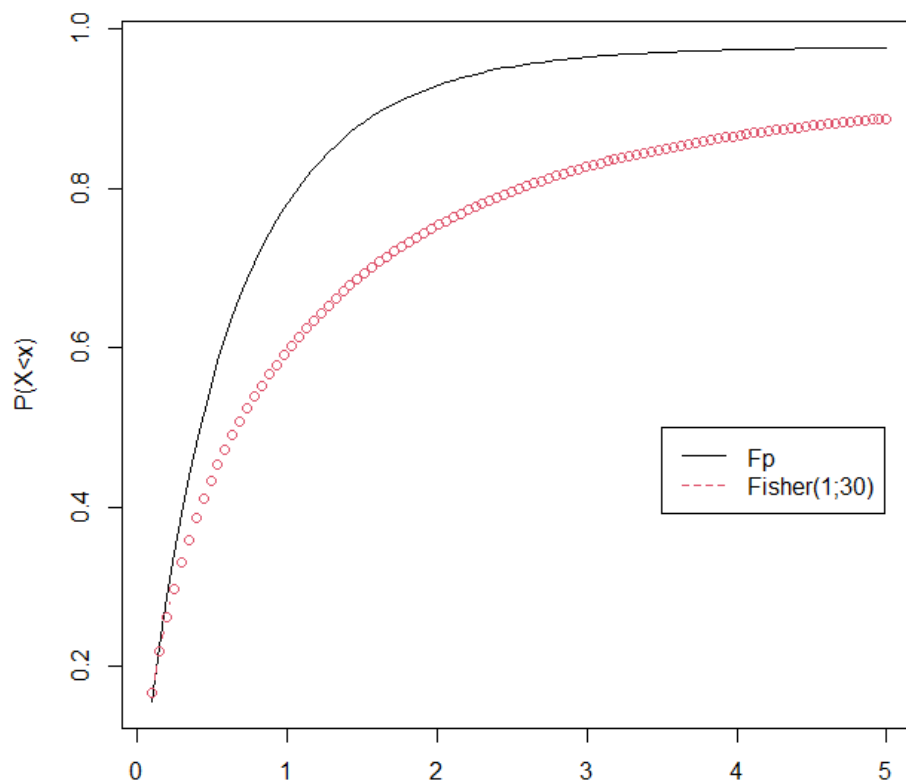


Figure 45 : Fonctions de répartition F_p obtenue à partir de l'équation (16) et $F_{1;30}$ pour $\theta = 0.9$

3. CONCLUSION

Au terme de cette analyse, nous sommes amenés à conclure que la loi de la distribution exacte de $J = \frac{n}{CVS^2(X)(n+1)}$ est la loi du produit de deux variables aléatoires suivant la loi de Gumbel. Les quantiles de cette loi sont déjà tabulés par Nadarajah dans [9]. Vu la complexité de cette loi, nous avons essayé de trouver la loi de distribution approximative de J . Ainsi par approximation, on arrive à trouver que la loi de distribution approximative de J est la loi de Fisher $F_{1,n}$ pour n suffisamment grand et pour $\theta \leq 0.3$.

La suite logique de notre travail est de trouver un test d'égalité de deux ou plusieurs coefficients de variation de Sharma, afin de trouver une application de cette mesure à la comparaison des dispersions de deux populations différentes, au test d'hétéroscédasticité comme ce que nous avons proposé dans [14] avec le CV de Pearson, et au test de changement de structure d'un modèle de régression linéaire. Ensuite, il est aussi important de trouver l'application de cette mesure dans le domaine de contrôle de qualité : conception d'une carte de contrôle de type (\bar{X}, CVS) .

N'est-il pas mieux de travailler avec une mesure normalisée et dont la conception est claire, que travailler avec une mesure trompeuse et dont l'interprétation est douteuse ?

Références

- [1] Centre d'expertise en analyse environnementale du Québec. Guide d'estimation de l'incertitude des mesures pour les analyses chimiques. DR-12-INC, Québec, Ministère du Développement durable, de l'Environnement et de la Lutte contre les changements climatiques. 2016
- [2] S. Villette, E. Piron et D. Miclet. Hybrid centrifugal spreading model to study the fertiliser spatial distribution and its assessment using the transverse coefficient of variation, Science Direct, Computers and Electronics in Agriculture, 2017
- [3] A. Achouri, Cartes de contrôle pour le coefficient de variation. Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, Angers Le Mans, 2014
- [4] A. J. X. Lim, M. B. C. Khoo, W. L. Teoh et A. Haq, Run sum chart for monitoring multivariate coefficient of variation, Science Direct, Computers & Industrial Engineering, 2017
- [5] D. J. Charier, D. Zantour, V. Pichot, F. Chouchou, J. M. Barthelemy, F. Roche et S. B. Mollieux, Assessing Pain Using the Variation Coefficient of Pupillary Diameter, Science Direct, The Journal of Pain, 2017
- [6] J. J. J. Babu et G. F. Sudha. Adaptive speckle reduction in ultrasound images using fuzzy logic on Coefficient of Variation, Science Direct, Biomedical Signal Processing and Control, 2015
- [7] J. C. Cox et V. Sadiraj, On the coefficient of variation as a criterion for decision under risk, Science Direct, Journal of Mathematical Psychology, 2010
- [8] R. Calif, T. Soubdhan, On the use of the coefficient of variation to measure spatial and temporal correlation of global solar radiation, Science Direct, On the use of the coefficient of variation to measure spatial and temporal correlation of global solar radiation, 2015
- [9] S. Nadarajah, Sums, products, and ratios for the bivariate Gumbel distribution, Mathematical and computer modeling, Science direct, 2005, Doi : 10.1016/j.mcm.2005.02.003
- [10] C. M. Wallgren, The distribution of the product of two correlated t variates. Journal of the american statistical association, Vol.75, n°.372, pp.996-1000, 1980, <http://www.jstor.org/stable/2287194>
- [11] C. E. Brown, Coefficient of variation, Applied statistics in geohydrology and related sciences, Springer, pp.155-157, 1998, DOI : 10.1007/978-3-642-80328-4_13
- [12] W. Reh et B. Scheffier, Significance Tests and Confidence Intervals for Coefficients of Variation. The statistical software newsletter, pp.449-452, 1996, [https://doi.org/10.1016/0167-9473\(96\)83707-8](https://doi.org/10.1016/0167-9473(96)83707-8)

- [13] A. Achouri, Cartes de contrôle pour le coefficient de variation. Thèse de doctorat de l'Université de Nantes, 2014
- [14] J. M. Tovohery, A. Totohasina et D. R. Feno. Application of equality test of coefficients of variation to the heteroskedasticity test, *American Journal of Computational Mathematics*, 10, pp.73-89, 2020, <https://doi.org/10.4236/ajcm.2020.101005>
- [15] R. Sharma, R. G. Shandil et G. Kapoor, A note on Karl Pearson's coefficient of dispersion, *Himachal Pradesh University Journal*, 2011, <https://pdfs.semanticscholar.org/229c/6e64c38e0b39773b03b82f458d8779e1f638.pdf> ou <https://studylib.net/doc/8762538/a-note-on-karl-pearson-s-coefficient-of-dispersion>
- [16] S. Avouyi –Dovi et D. Guegan, Valeurs extrêmes et séries temporelles : application à la finance, Document de recherche EPEE, Université d'Evry, 2001
- [17] S. Nadarajah et S. Kotz, Exact distribution of the Max/Min of two gaussian random variables, *IEEE transactions on very large scale integration (VLSI) systems*, Vol.16, No.2, pp.210-212, Doi : 10.1109/TVLSI.2007.912191, February 2008
- [18] R. D. Gupta et R. C. Gupta, Analyzing skewed data by power normal model, Doi : 10.1007/s11749-006-0030-x, 2007