QUELQUES MODES DE CONSTRUCTIONS DES CONIQUES PROPRES A L'AIDE D'UNE REGLE ET D'UN COMPAS

André TOTOHASINA
Ecole normale supérieure pour l'enseignement technique (ENSET)
Université d'Antsiranana. 201- Madagascar
E-mail : totohasina@yahoo.fr

INTRODUCTION

Dans le souci de défendre la pertinence et la faisabilité de l'apprentissage précoce des coniques propres, nous rappelons ci-après les quelques algorithmes simples de constructions des coniques propres adaptés au niveau des élèves des deux dernières années de l'Enseignement Fondamental II (i.e ; classes de $4^{ième}$ et $3^{ième}$). En effet, ils mobilisent juste les matériels tels une règle et un compas. Nous renvoyons à notre propre texte [1] (dans ce même numéro), pour une analyse plus approfondie de cette motivation, ainsi que pour les enjeux socio-éducatitifs de cette suggestion d'amendement du programme scolaire de géométrie.

1. Obtention d'une ellipse à partir d'un cône

Etant donné un cône de révolution (Γ) à une nappe de sommet S de génératrice AS et dont la base est un disque de centre O et de rayon R= OA (Fg. 1).

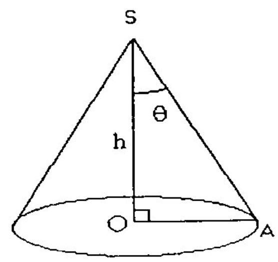


Fig. 1 : un cône (Γ)

1.1 SECTION EMPIRIQUE ET SIMPLE

On coupe ce cône de façon inclinée comme dans la figure Fig. 2 de l'introduction de [1]: on obtient un bord qui réalise une ellipse.

Définition : Le bord de cette section est appelé une ellipse.

1.2 SECTION GEOMETRIQUE

On coupe ce cône par un plan de coupe π ne passant pas par le sommet S et qui coupe les génératrices conformément à la figure Fig. 5 de l'introduction de [1].

Observation : on voit que le bord de cette section est une ellipse.

Calquons ce bord et faisons apposer sur un plan horizontal, on a la figure suivante.

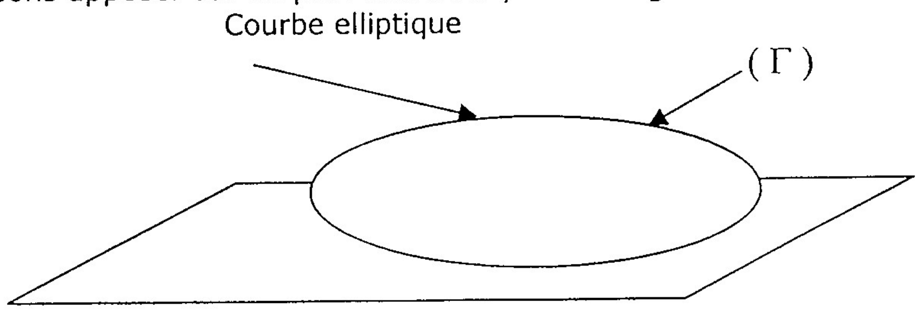
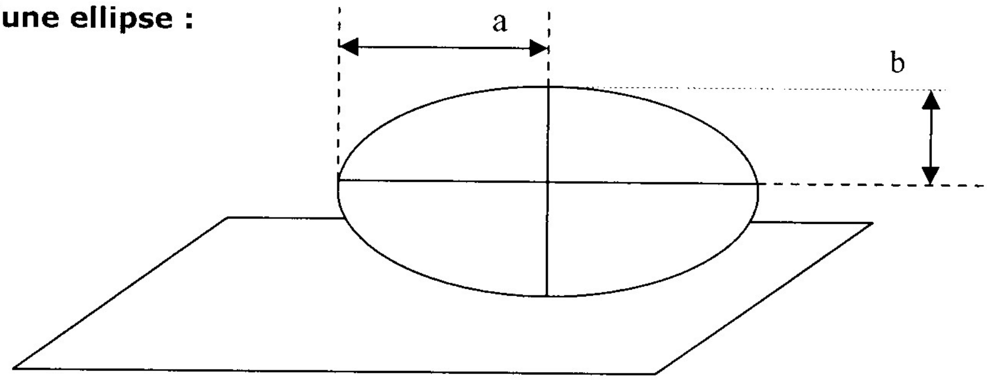


Fig. 2

a- Définition

Une ellipse est un bord de section lorsqu'on coupe un cône de révolution à une nappe par un plan de coupe ne passant pas par le sommet S et coupant les génératrices de ce cône.

Aire d'une ellipse :



En s'inspirant d'une surface d'un cercle de rayon R = a, on a :

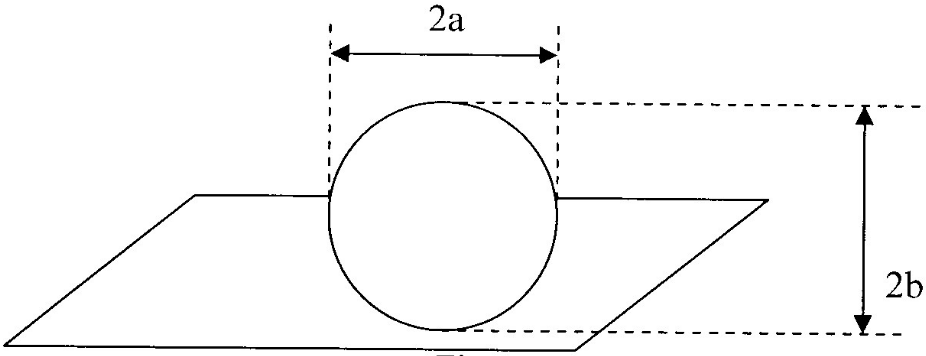


Fig. 4

Aire(C) = π x R^2

= π x a x b

Aire (C) = π x a x b, avec a = b =R **:** notons qu'ici a x b = R^2 = Aire du carré de côté R.
Soit Aire (C) = **π x Aire(carré de côté R).**
Or dans le cas d'ellipse, a $\neq$ b et a x b = aire du rectangle de cotés a et b ; et l'on admet par analogie, que l'aire d'un ellipse dont les axes mesurent respectivement a et b vaut :
Aire(Γ) = π x Aire (rectangle de côtés a et b).
D'où : Aire(Γ) = π x a x b.

1.3OBTENTION D'UNE PARABOLE À PARTIR D'UN CÔNE

1.3.1 SECTION SIMPLE ET EMPIRIQUE

Coupons le cône de révolution à une nappe de sommet S de génératrice SA par un plan de coupe parallèle à cette génératrice comme indique sur la figue Fig.3 de l'introduction.
Interprétation : Le contour de cette section constitue une parabole.

1.3.2 SECTION GÉOMÉTRIQUE

On coupe ce cône par un plan de coupe π ne passant pas par le sommet S et qui coupe les génératrices conformément à la figure Fig. 6 de l'introduction.

Définition : Le bord de cette section est appelé une parabole.

a- Définition :

En coupant un cône de révolution à une nappe par un plan de coupe parallèle à une génératrice de ce cône, on obtient une parabole.

- La section n'est plus une réduction de la base.
- Le sommet de la parabole ainsi obtenu est l'intersection de l'axe parallèle à une génératrice et l'autre génératrice de ce cône.

b- Théorème :

Toute section d'un cône de révolution à une nappe par un plan de coupe parallèle de ce cône forme toujours une parabole.

1.4 OBTENTION D'UNE HYPERBOLE À PARTIR D'UN CÔNE

On donne un cône de révolution à deux nappes, des deux génératrices (Cf. Fig. ci-contre).

1.4.1 Section simple et empirique

Coupons ce cône suivant comme dans la figure Fig. 4 : *Les deux bords d'une section constituent une **hyperbole équilatère.***

Définition : L'ensemble des deux bords d'une telle section est appelé une hyperbole.

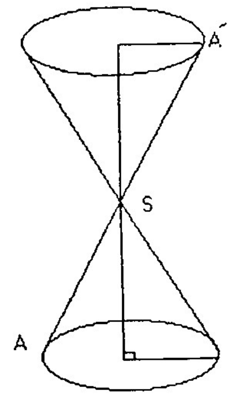


Fig. 5

1.4.2 Section géométrique

On coupe ce cône par un plan de coupe perpendiculaire aux cercles de base du cône à deux nappes comme indiqué sur la figure Fig. 9.

Observation : L'ensemble des bords de cette section forme bien une hyperbole.

Faisons apposer ce bord sur un plan horizontal, on a :

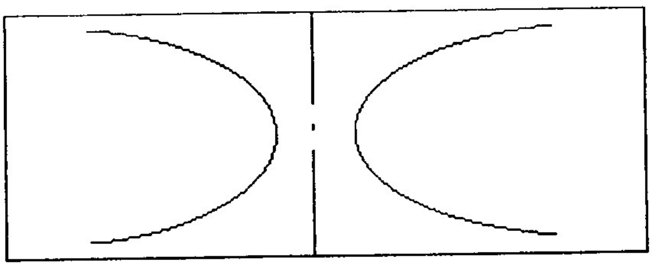


Fig. 6

a- Propriétés

En coupant un cône de révolution par un plan de coupe perpendiculaire aux cercles de base à deux nappes, on obtient une hyperbole.

- La section n'est jamais une réduction de la base.
- Les deux hyperboles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

b- Définition

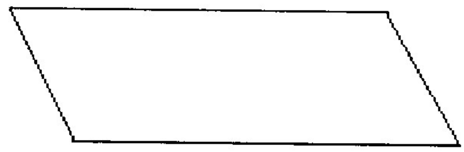
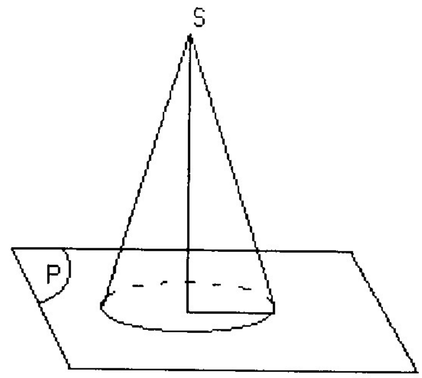
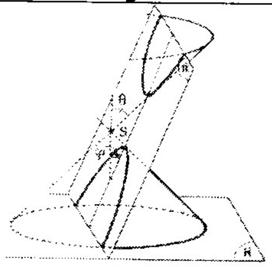
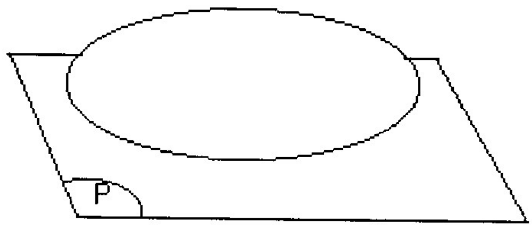
Toute section d'un cône de révolution à deux nappes par un plan de coupe perpendiculaire aux cercles de base donne une hyperbole (Cf. Fig. 7).

2. CONSTRUCTIONS DES CONIQUES

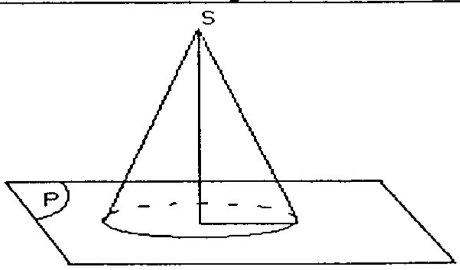
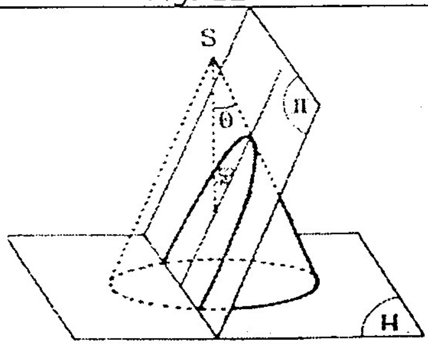
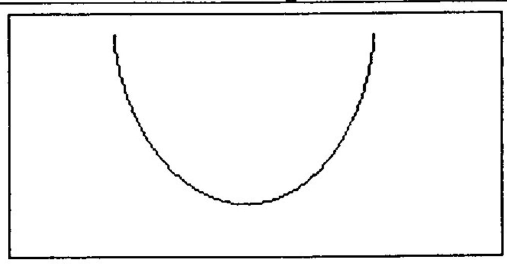
Certes, il existe divers modes pour construire géométriquement des coniques, mais il suffit dans cette phase d'initiation aux coniques propres de choisir les modes les plus simples et plus adaptés au niveau des élèves sortants de la classe de quatrième.

2-1 CONSTRUCTION DIRECTE

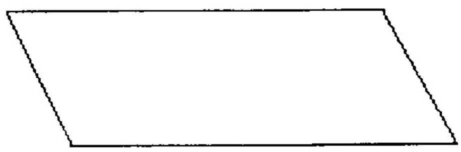
2.1.1 Construction d'une ellipse.

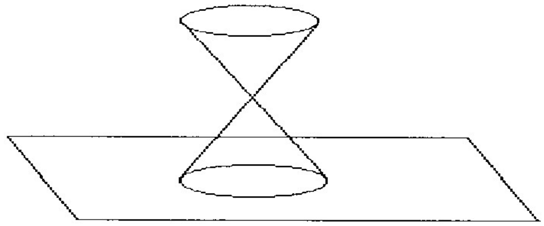
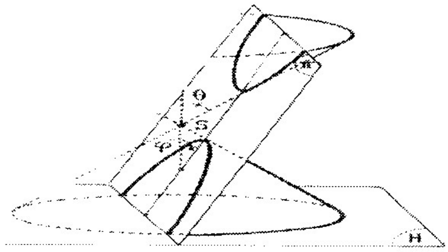
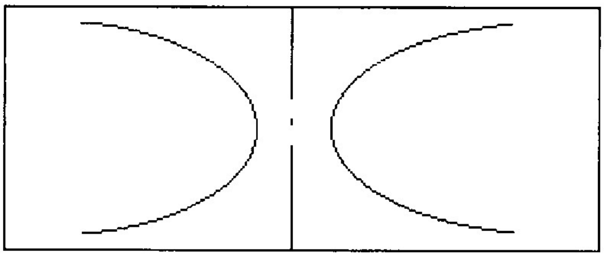
ALGORITHME	**FIGURE**
1- Prendre un plan de base	 Fig. 7
2- Mettre le cône à une nappe sur ce plan ; la hauteur étant perpendiculaire au plan.	 Fig. 8
3- couper ce cône par un plan de coupe ne passant pas par le sommet et coupant la génératrice de cône (Fig. 9).	 Fig. 9
	 Fig. 10

2.1.2 Construction d'une parabole.

ALGORITHME	**FIGURE**
1- Prendre un plan de base	 Fig. 11
2 – Mettre le cône à une nappe sur ce plan.	 Fig. 12
3- Couper ce cône par un plan de cône parallèle à une génératrice de cône (Fig. 13).	 Fig. 13
4 – Calquer le bord de cette section et faire apposer sur un plan horizontal (Fig. 14).	 Fig. 14

2.1.3 Construction d'une hyperbole.

ALGORITHME	**FIGURE**
1 – Prendre un plan de base.	 Fig. 15

2- Mettre un cône à deux nappes sur ce plan.	 Fig. 16
3- Couper ce cône par un plan de coupe perpendiculaire aux cercles de base du cône à deux nappes (Fig. 17).	 Fig. 17
4 – Calquer le bord de cette section et faire apposer sur un plan horizontal (Fig. 18).	 Fig. 18

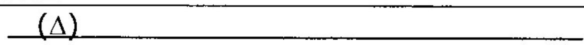
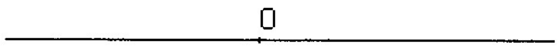
2.2 CONSTRUCTIONS POINTS PAR POINTS

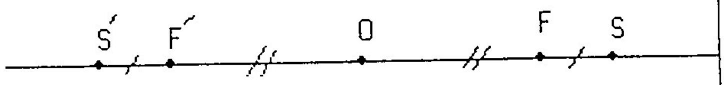
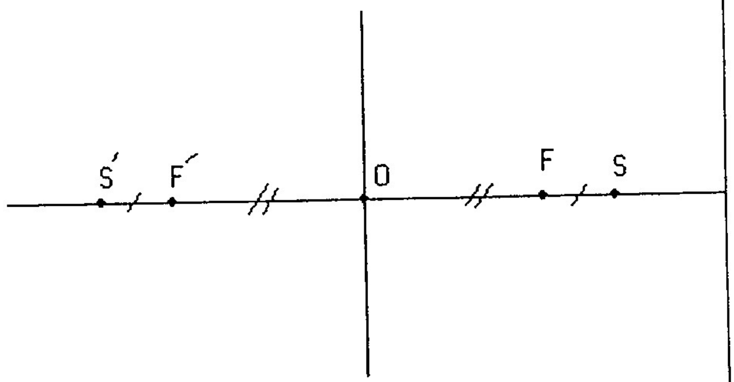
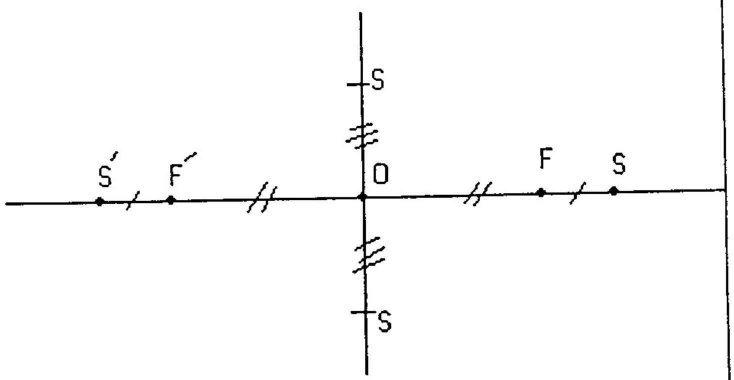
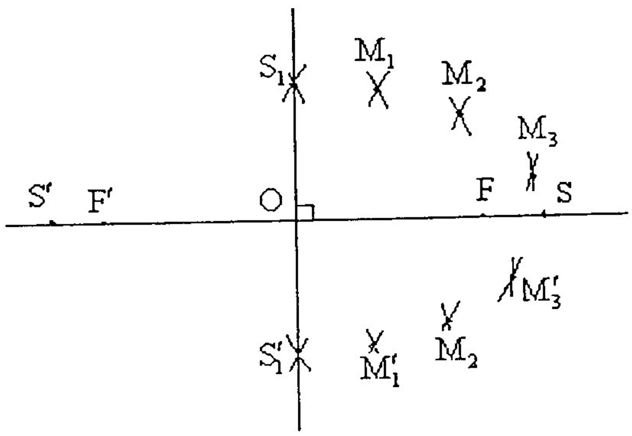
2.2.1 Cas d'une ellipse qui est une conique bifocale

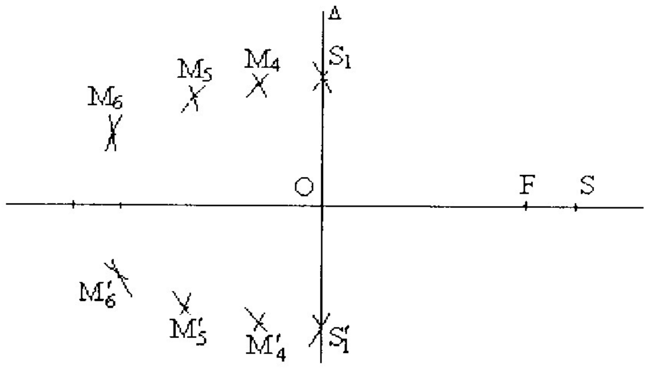
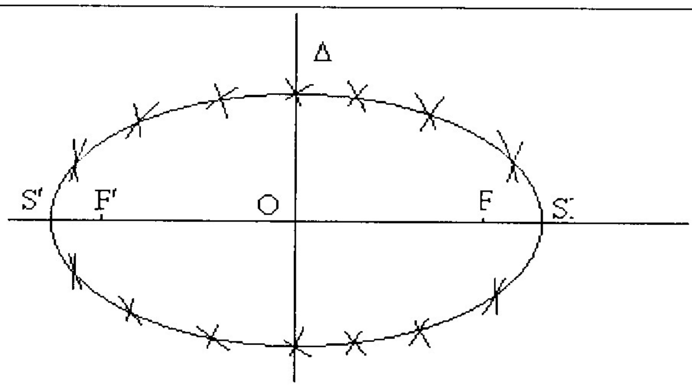
Soient F et F' deux foyers de l'ellipse et M un point quelconque de l'ellipse tel que :

$$MF + MF' = 2a \text{ où } a \in IR.$$

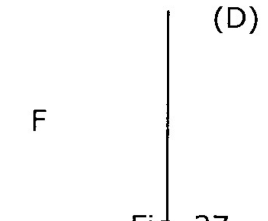
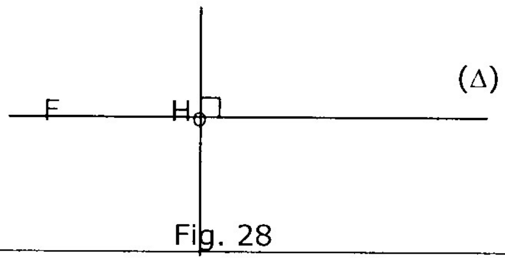
Le réel 2a indique la distance de sommets sur l'axe focal.

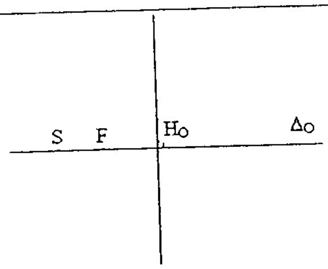
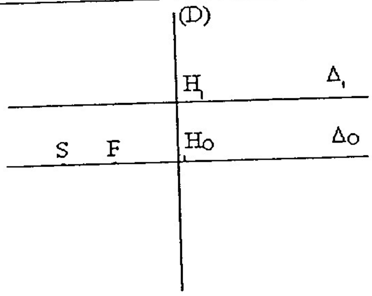
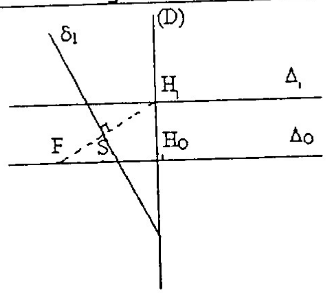
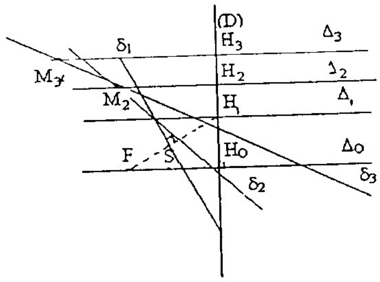
ALGORITHME	**FIGURE**
1- Tracer l'axe focal.	 Fig. 19
2- Placer le point O comme centre de l'ellipse tel que : O = $\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S' = \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}F'$	 Fig. 20

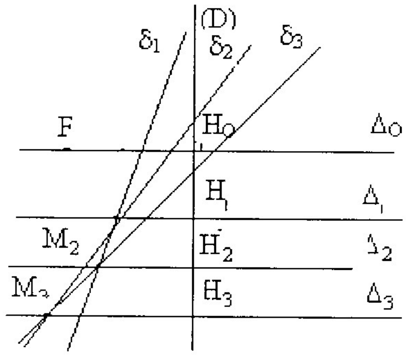
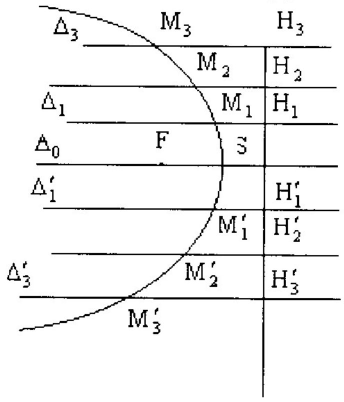
3- Placer sur cet axe les deux foyers F et F^I ainsi que les sommets S et S^I tels que : $[FF^I] \subset [SS^I]$ et $SF = SF^I$	 Fig. 21
4 – Construire la médiatrice (Δ) de $[FF^I]$ ou celle de $[SS^I]$ passant par O.	 Fig. 22
5 – Placer sur (Δ) les deux autres sommets S_1 et S_2 tels que : $OS_1 = OS^I$ et $a = S_1F = SF^I = S_I^IF = S_I^IF^I$, $a \in IR$	 Fig. 23
6- Choisir un réel x_i avec $i \in IN$ et $x_i \leq OF = OF^I$ - Tracer un arc de cercle de centre F^I et de rayon $a + x_1$ sur le cadran formé par $[OS_1]$et $[OS_2]$. - Tracer un autre arc de centre F et de rayon $a - x_1$ sur le même cadran. - Marquer M_1 l'intersection de ces deux arcs 7- Prendre les mêmes centres et rayons pour avoir M_1^I le symétrique de M_1 par rapport à FF^I sur le cadran déterminé par [OS] et $[OS^I]$. 8- Faire le même procédé, mais de rayon $a+x_2$ et $a-x_2$ pour obtenir M_3 et M_3^i, en prenant les rayons $a+x_3$ et $a-x_3$.	 Fig. 24 $\begin{cases} F'M_I = F'M_i' = a + x_i \\ FM_I = FM_I' = a - x_i \end{cases}$; $x_i \in [O, OF]$, $i \in IN^*$. $a = OS = OS'$

9- Sur le même cadran que [OS_1] et [OS^I] : - Tracer un arc de cercle de centre Fet de rayon $a+x_4$, puis un autre arc de centre F^i et de rayon $a-x_4$. - Marquer le point M_4 comme point d'intersection de deux arcs de cette ellipse. - Répéter plusieurs fois pour obtenir les points M_5, M_6.. Et leurs symétriques M_5^i, M_6^i.. En faisant varier les rayons suivant les indices des points à trouver.	 Fig. 25 $\begin{cases} FM_i = FM'_i = a + x_i \\ F'M_i = F'M'_i = a - x_i \end{cases} \quad i = 4,5,6,.....$
10- Joindre ces points pour avoir une ellipse.	 Fig. 26

2.2.2 Cas d'une parabole définie par son foyer et sa distance

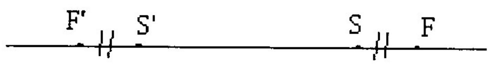
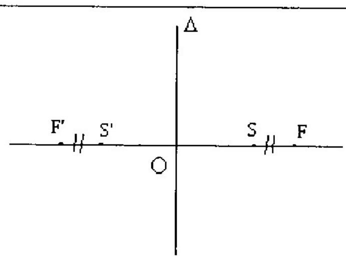
ALGORITHME	**FIGURE**
1- Tracer la directrice (D) et placer le point focal F	 Fig. 27
2- Tracer l'axe focal Δ_0 passant par F et noter H_0 son intersection avec (D)	 Fig. 28

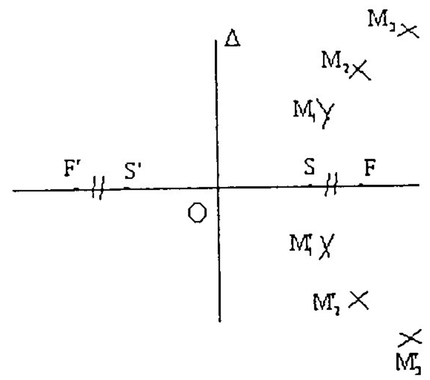
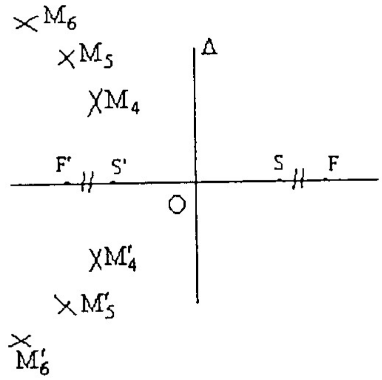
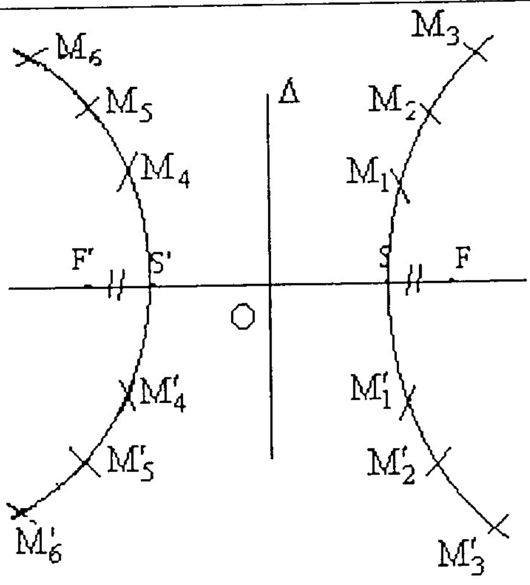
3- Placer le sommet S au milieu de segment $[FH_0]$, $S \in P$: $S=\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}H_0$.	 Fig. 29
4- Prendre un point quelconque H de (D) et tracer le perpendiculaire Δ_1 à (D) passant par ce point : $H_1 \in (D) - \{H_0\}$.	 Fig. 30
5- Construire la médiatrice (δ_1) de $[FH_1]$; son intersection notée M_1 avec la perpendiculaire à (D) passant par H_1 est parmi les points de P : $\{M_1\} = \Delta_1 \bigcap \delta_1$	 Fig. 31
6 - Répéter plusieurs fois les actions en prenant (δ_1), (δ_2) les droites passantes respectivement par les points $M_1, M_2, \ldots$	 Fig. 32

7- Même procédé pour leurs symétriques par rapport à (Δ_o) : $M_i' = S_{\Delta o}(Mi)$; i = 1,2,3,....	 Fig. 33
8-Joindre les points $M_1, M_2, ..., M_1', M_2', ...$ pour donner la parabole P.	 Fig. 34

2.2.3 Cas d'une hyperbole à partir de la définition bifocale.

Etant donnée une hyperbole H de foyers F et F', de distance de sommets 2a avec a∈ IR tel que $|MF' - MF|$ =2a (Fig. 35).

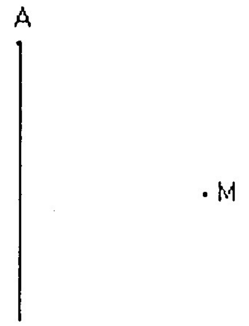
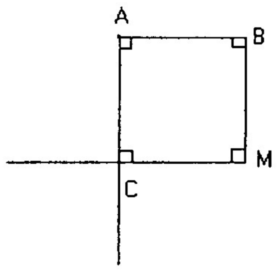
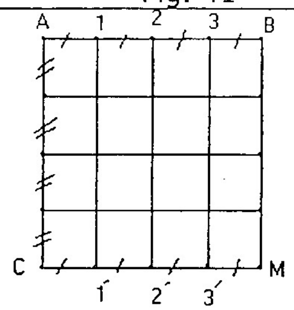
ALGORITHME	**FIGURE**
1- Tracer l'axe focal et y placer les foyers F et F' ainsi les sommets S et S' tels que $[SS'] \subset [FF']$ et $SF = S'F'$	 Fig. 35
2 – Construire la droite (Δ) médiatrice de $[FF']$ ou celle de $[SS']$ et noter O comme centre de (H) de point d'intersection Δ avec l'axe focal tel que $OS = OS' = a, S, S' \in H$	 Fig. 36
3 – Choisir un réel positif x_i (i ∈N) avec $x_i \geq SF = S'F'$; sur le demi-plan contenant [SF]	

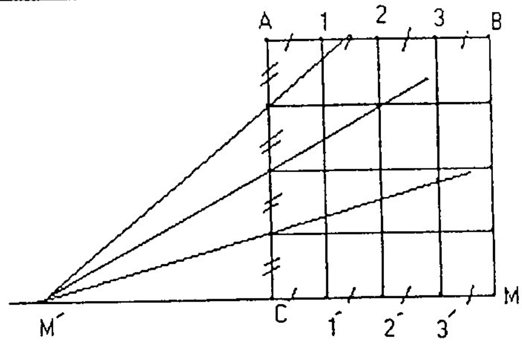
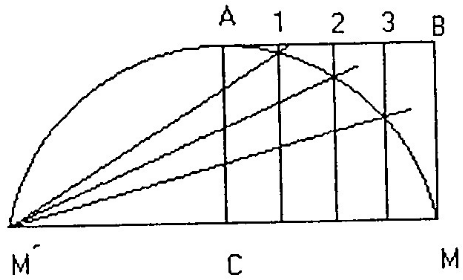
- Tracer un arc de cercle de centre F et de rayon x_i, puis un autre arc de centre F' et de rayons $2a+x_1$ sur le même demi-plan. Les deux points d'intersection de deux arcs appartiennent à (H) et sont symétriques par rapport à l'axe focal. - Noter M_1, M_2,.. , Les points obtenus au-dessus de l'axe focal et $M'_1, M'_2,$........ leurs symétriques. $\begin{cases} FM_I = x_i = FM'_I \\ F_I M_I = 2a + x_i = F'M'_I \end{cases}$ i = 1,2 3, ... 2a = SS'	 Fig. 37
4 – Tracer deux axes de cercles de centre F, F' et de rayons respectivement x_4, $2a+x_4$, sur le demi-plan contenant [$S'F'$] . - Marquer M'_4etM_4 comme point d'intersection de deux arcs. - Répéter plusieurs fois pour obtenir des points M_5,M_6, ... et leurs symétriques respectifs, par rapport à l'axe (Δ) Varier les rayons selon les indices des points.	 Fig. 38
5 – Joindre les points pour former l'hyperbole.	 Fig. 39

2- 3 CONSTRUCTION DE LA PARABOLE DEFINIE PAR SON AXE, SON SOMMET ET PASSANT PAR UN POINT M.

Exemple : Soit à construire une parabole P de sommet A et d'axe (AC), passant par un point M.

Voici l'algorithme correspondant :

ALGORITHME	**FIGURE**
1- Parabole P de sommet A passant par un M.	 Fig. 40
2- Construire le rectangle ABMC, (AC) étant l'axe focal.	 Fig. 41
3- Partager [AB] et [AC] en un même nombre de partages égaux. Par les points de division 1,2,3,...... de[AB], mener des parallèles à l'axe.	 Fig. 42
4- Placer le point M' symétrique de M par rapport à l'axe focal (AC). -Joindre le point M' aux points de division $1',2',3'$ de [AC]. -Pointer-les d'intersection des parallèles et des obliques comme point de la parabole. -Les points de l'autre moitié s'obtiennent par symétrie orthogonale	

par rapport à l'axe focal.	 Fig. 43
5- Joindre les points obtenus à main levée pour obtenir la parabole (Fig. 44).	 Fig. 44

****

Bibliographie

TOTOHASINA A. A propos de l'apprentissage des formes et constructions géométriques dans un plan : un plaidoyer aux pertinence et faisabilité de l'introduction précoce des coniques. *In DIDAKTIKA, 2, Antananarivo : CIRD,*2004.

============x============