LES CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES A LA REGLE A CURSEURS ET AU COMPAS

Jean Emile RAKOTOSON

Université de Fianarantsoa

jemilrako@yahoo.fr

1. LA REGLE A CURSEURS

1.1 DEFINITION. DESCRIPTION DE CET INSTRUMENT

Une règle à curseurs est un instrument à deux côtés parallèles dont le premier côté joue le rôle de la règle et l'autre porte des curseurs considérés comme des points situés sur une même droite (voir Fig. 1)

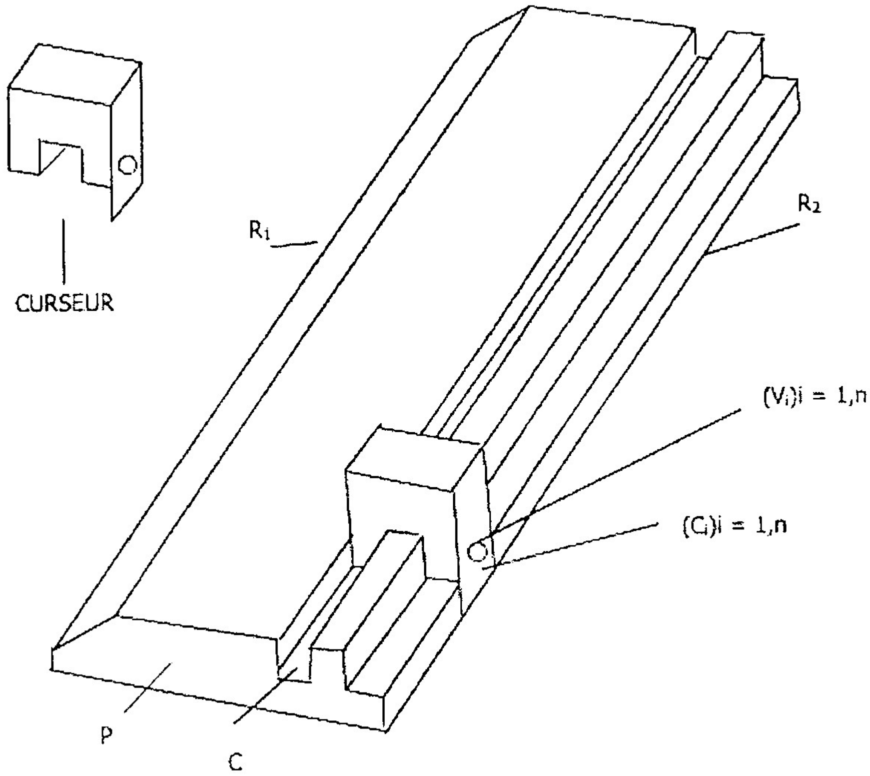


Figure 1 - LA REGLE A CURSEURS

Description de cet instrument

P : une plaque

R_1 : une règle

R_2 : une règle qui porte les curseurs

C_i : les curseurs

V_i : vis qui fixe les curseurs sur P

C : canal où peut glisser le curseur

1.2 FONCTIONNEMENT

Les curseurs C_i peuvent glisser dans le canal C et sur le deuxième côté R_2. La distance des deux curseurs C_i et C_j est la distance de deux points que se confondent sur C_i et C_j. La règle à curseurs peut lier des points alignés.

2. CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES POSSIBLES A LA REGLE A CURSEURS ET AU COMPAS.

2.1 CONSTRUCTION D'UNE CONCHOÏDE DE NICOMEDE

Une conchoïde de Nicomède est une courbe introduite par Nicomède pour donner une résolution de la trisection de l'angle.

Définition Une conchoïde d'une courbe

Soit un point O donne du plan affine euclidien. Soit une courbe L ou un arc paramétré et un nombre réel 1>0

A tout point Q $\in$ L, associons les points M et M' de la droite (OQ) tel que $\|\overrightarrow{QM}\|$ $\|\overrightarrow{QM'}\| = 1$

L'ensemble des points M et M'est appelé conchoïde de L par rapport au point O et le module 1.

D'après cette définition, on peut opérer dans un repère de coordonnés polaires de pole 0. En choisissant un axe polaire Do, or $p=f(\theta)$ est l'équation polaire de L

Alors (1) $p=f(\theta)\pm1$ est l'équation polaire d'une conchoïde de L

Remarquons que $f(\theta+\pi)=-f'(\theta)$

Si (p,θ) est une solution de $p=f(\theta)+1$ (2) alors $[-p,\theta+\pi]$ est une solution de $p=f(\theta)-1$ de sorte que (2) est l'équation polaire de L tout entier.

Soit une droite (D) perpendiculaire à l'axe polaire Do

Si la courbe L est une droite (D), alors le conchoïde d'une droite (D) par rapport au pole O et de module I est appelé une conchoïde de Nicomède.

Prenons un point O comme origine.

L'équation polaire d'une droite (D) est de la forme $p=a/\cos\theta$ avec à l'abscisse d'un point d'une droite (D).

Donc l'équation polaire d'une conchoïde de Nicomède par rapport au pôle O et de Module I>0 est de la forme $p=\dfrac{a}{\cos\theta}\pm1$ avec $\theta\in]-\pi/2,\pi/2[$

Notons N la conchoïde de Nicomède (voir Fig. 2)

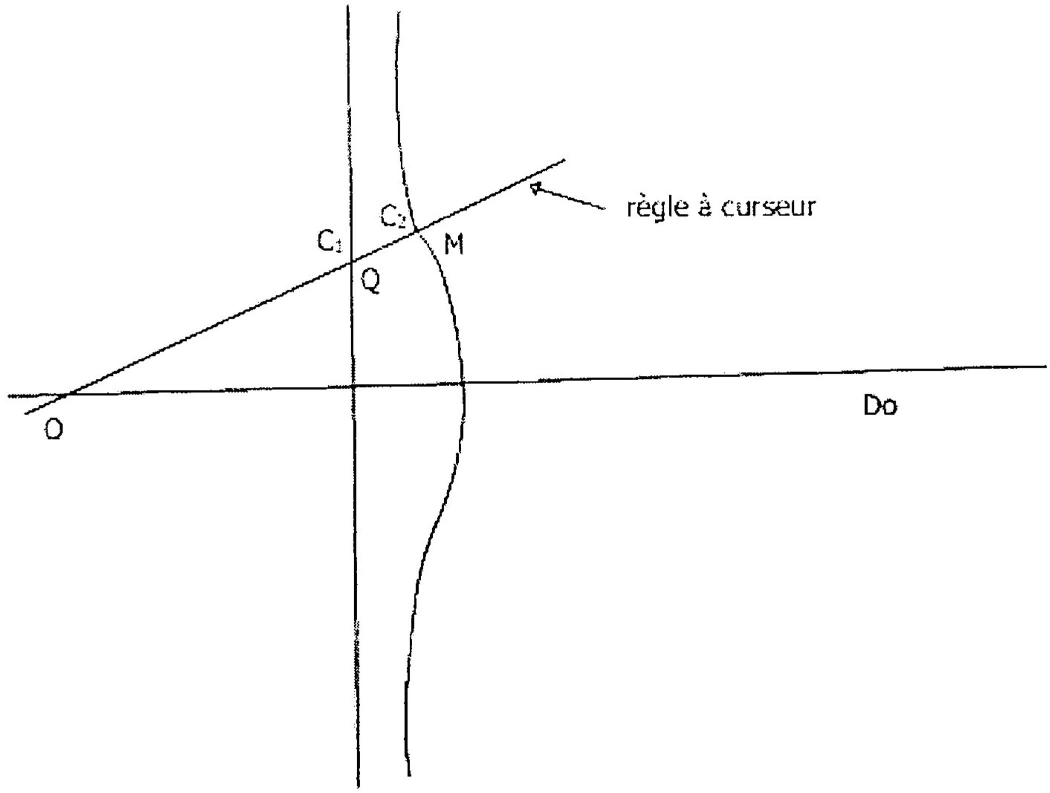


Figure 2

Remarquons que la conchoïde N peut être tracée point par point à la règle à curseur et au compas en identifiant les deux points Q et M comme les deux curseurs C_1 et C_2 de cette règle et passant par un point 0.

2.2 CONSTRUCTION D'UNE ELLIPSE D'EQUATION $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Soient deux droites (d) et (d') orthogonaux à un point O.

Les deux points A et B se déplacent respectivement sur les deux droites (d) et (d') et le point M est dans le segment |A,B|, tel que $\|\overrightarrow{MA}\|=b$ et $\|\overrightarrow{MB}\|=a$ avec $a\neq 0$, $b\neq 0$ (voir Fig. 3)

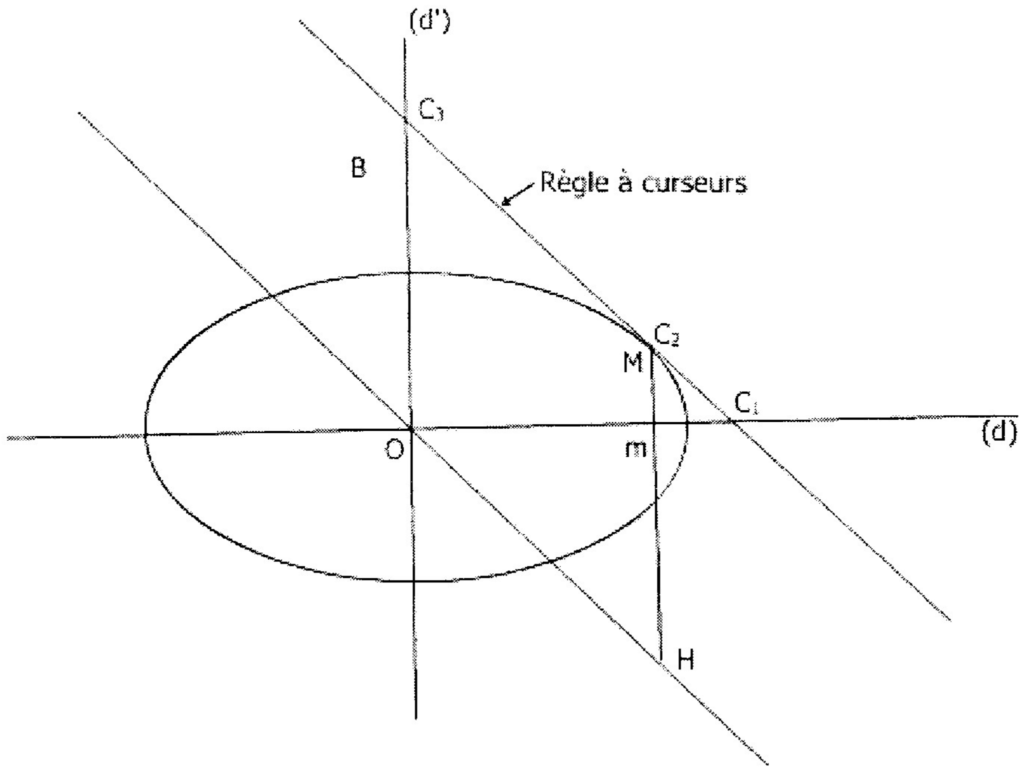


Figure 3

C'est-à-dire la longueur du segment |A,B| est fixe. Soit m le projeté orthogonal du point M sur (d) et un point H le point d'intersection d'une droite (Mm) et la parallèle à la droite (AB) passant par un point O.

D'après le théorème de Thalès on a $\frac{\overline{MA}}{\overline{mA}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{mO}}$ ou

$$\frac{\overline{mA}}{\overline{mO}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \qquad (1)$$

Or les triangles AmM et OmH sont deux triangles semblables

On a

$$\frac{\overline{mA}}{\overline{mM}} = \frac{\overline{mO}}{\overline{mH}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{mA}}{\overline{mO}} = \frac{\overline{mM}}{\overline{mH}} \qquad (2)$$

En égalisant (1) et (2), on obtient $\overline{mM} = \overline{mH} \cdot \overline{mA} / \overline{mB}$ (3)

Soit (O,i,j) un repère orthonormé tel que $\vec{I}$ et $\overrightarrow{OA}$, $\vec{J}$ et $\overrightarrow{OB}$ soient respectivement colinéaire, de même sens.

Considérons x, y les coordonnés de M dans ce repère

Par une certaine transformation de l'équation (3), on obtient l'équation de l'ellipse de la forme

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ donc le point M décrit une ellipse.

D'après le calcul, la règle à curseur et un compas peut tracer point par point une ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en identifiant les trois points A, B et M comme les trois curseurs C_1, C_2, C_3 de cette règle.

2.2.3 Résolution des quelques problèmes célèbres des constructions géométriques à la règle à curseur et au compas.

D'après le premier paragraphe, nous savons que la trisection, la duplication du cube sont impossibles, en général, à la règle et au compas. Puisque nous possédons la règle à curseur, ces problèmes sont presque résolubles à cette règle et au compas.

I) La trisection de l'angle à la règle à curseur et au compas.

Soit M un point du cercle C de centre O et de rayon $\|\overrightarrow{OI}\|=1$

Soit un angle θ formé par les trois points I, O, M tel que $\theta = IOM$

Il suffit de faire la trisection pour l'angle aigu, car l'angle droit (π/2rad) et l'angle plat (πrad) sont deux angles trisectables (d'après le premier paragraphe).

Considérons un repère orthonormé direct (O,i,j) (voir figure 17)

Traçons la droite parallèle (d) à (OI) passant par M qui coupe (OJ) en K et parallèle (d') à (OJ) passant par M qui coupe (OI) en H.

Considérons une conchoïde d'une droite (d') par rapport au pole O et de module 2. Cette conchoïde peut tracer point par point à la règle à curseur. Donc le point d'intersection A d'une droite (d) et de cette conchoïde est constructible à la règle à curseur (choisissons deux curseurs C1 et C2 tels que C1 est appliqué à (d') et C2 sur la droite (d).

Le point B est le point d'intersection de deux droites (d') et (OA)

Soit T le milieu du segment [BA]. Traçons la parallèle (δ) à la droite (d') passant par T telle que T'soit le point d'intersection de (d) et (δ) (voir Fig. 4).

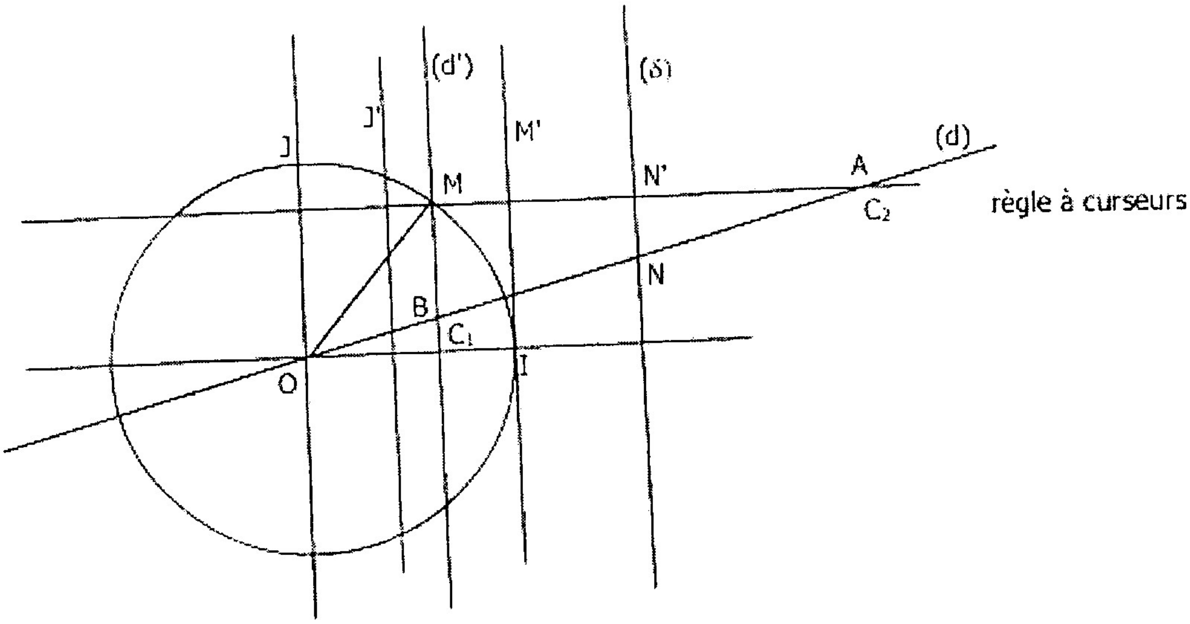


Figure 4

D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{\overline{AN'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}/2}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$ car N est le milieu de [BA]

D'où $\overline{AM} = 2\overline{AN'}$ c'est à dire N'est le milieu de [M,A] donc la droite (δ) est la médiatrice du segment [m,A]. On obtient $\|\overrightarrow{MN}\| = \|\overrightarrow{NA}\| = 1$; les triangles ANM et MNB sont deux triangles isocèles.

<u>Remarque</u> : la somme des angles du triangles est un angle plat

$MAN + NAM + ANM = \pi$ or MAN = NMA

D'où ANM = π - 2MAN

Et ANM + MNO = π

Donc on a MNO = π- ANM = π - (π - 2MAN) = 2MAN

On obtient IOM = ION + NOM = MAN + 2MAN = 3MAN

Car ION et MAN sont deux angles alternes internes

On peut conclure que l'angle θ = IOM est trisectable à la règle à curseurs et au compas IOM = 3ION

II) La duplication de cube

La duplication du cube c'est la recherche d'une longueur de l'arête de celui-ci dont son volume est égal à deux. Ce nombre est $\sqrt[3]{2}$ qui n'est pas constructible à la règle et au compas (d'après le résultat de WANTZEL). Ce problème est résoluble à la règle à curseurs et au compas.

Considérons un plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J)

Soient les trois points A, B, C de coordonnées respectives ($\sqrt[3]{2}$,0) (2,0) (1/2,1/2).

La droite (D) passant par un point O, parallèle à la droite (CB) coupe la droite (CA) en E (voir Fig. 5)

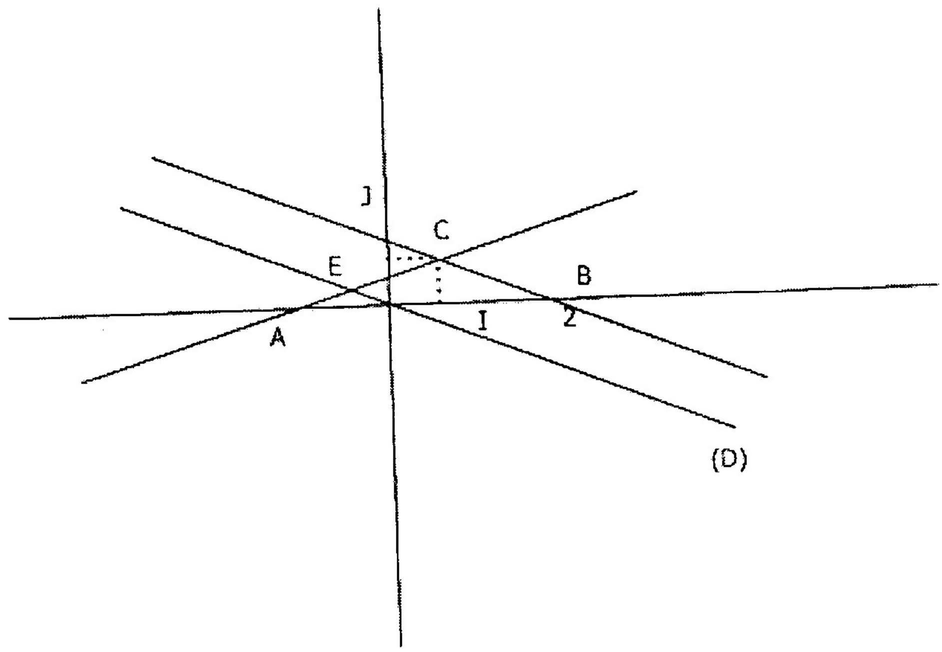


Figure 5

D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ ou } \overline{AE} = \overline{AO} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Posons $\alpha = \sqrt[3]{2}$ alors $\overline{AO} = \alpha$, $\overline{AB} = \alpha + 2$ et

$$\overline{AC} = \sqrt{(\alpha + 1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1/2}$$

$AC^2.AO^2 = (\alpha^2+\alpha+1/2)\alpha^2=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2/2$ or $\alpha^3=2$

$=2\alpha+2+\alpha^2/2=1/2(\alpha+2)^2$

Cela résulte que $\overline{AC} = (\alpha + 2)/\sqrt{2\alpha}$ et $\overline{AE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où on a une conchoïde d'une droite (D) par rapport au pôle C et de module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui peut tracer point par point à la règle à curseurs et au compas. Donc le point d'intersection A d'une droite (OI) de cette conchoïde est constructible à la règle à curseurs et au compas.

2.4 Résolution d'une équation du $3^{ème}$ degré à la règle à curseurs et au compas

D'après le résultat de WANTZEL, les problèmes de degré 3 ne sont pas résolubles à la règle et au compas. Mais à l'aide de la règle à curseurs, cela devient possible.

Supposons que l'équation du $3^{ème}$ degré ayant trois racines réelles et nous cherchons les conditions pour que cette équation ait des racines réelles. Cela exige de faire l'étude d'une fonction f de la forme x^3+px+q avec $(p, q) \in R^2$

i) L'étude d'une fonction f de la forme x^3+px+q avec $(p,q) \in R^2$

Soit f une fonction numérique définit par $x \rightarrow f(x)= x^3+px+q$ avec $p,q \in R^2$

f est continue et dérivable sur R car f est un polynôme.

Alors la dérivée de f est de la forme $f'(x)=3x^2+p$

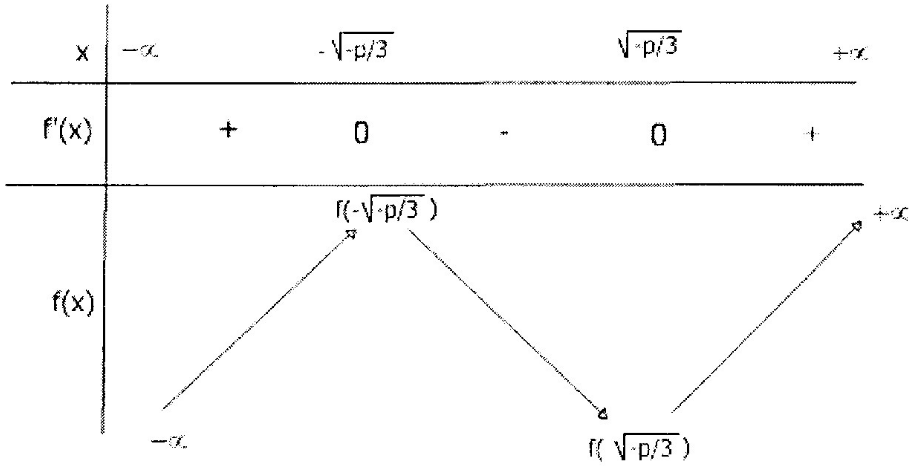
1^{er} cas : $P \geq 0$, $\forall x \in R$, $f(x) \geq 0$

Donc f est strictement croissante et on a une seule racine réelle

$2^{ème}$ cas $p<0$

Si $f'(x) = 0$ on a $x = -\sqrt{-p/3}$ ou $x = \sqrt{-p/3}$

Tableau des variations de f



Avec $f(-\sqrt{-p/3}) = -(2p\sqrt{-p/3})/3+q$ $\quad f(\sqrt{-p/3}) = (2p\sqrt{-p/3})/3+q$

Supposons que $f(-\sqrt{-p/3})\ \ f(\sqrt{-p/3}) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $c \in \left]-\sqrt{-p/3}, \sqrt{-p/3}\right[$ tel que $f(c) = 0$

D'après ce tableau, $f(-\sqrt{-p/3}) > 0$ et $f(\sqrt{-p/3}) < 0$ et alors on a trois racines réelles.

CONCLUSION

Pour qu'une équation $x^3+px+q = 0$ admette trois racines réelles, il faut et il suffit que $p<0$ et $4p^3+27q^2<0$

ii) Théorème de Viète

Etant donné une équation du troisième degré à coefficients réels dont les trois racines sont réelles, il est possible à l'aide de la règle, de compas et du trisecteur de construire des points ayant pour abscisses les racines de cette équation, ses coefficients étant donnés géométriquement.

Nous comprenons que la règle à curseurs est un trisecteur, dont on peut donner un théorème équivalent : il est possible à l'aide de la règle à curseurs et au compas de construire des points ayant pour abscisses les racines de l'équation du troisième degré.

Preuve

Soit une équation du troisième degré $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ qui peut se ramener à l'équation $x^3 + px + q = 0$ par la substitution de $x \to x - a/3$

Ici il suffit de faire la résolution sur l'équation $x^3 + px + q = 0$ (1)

D'après l'étude de la fonction de la forme $x^3 + px + q$, on a trois racines réelles si $p < 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$

Choisissons un plan rapporté au repère orthonormé direct (O, I, J)

Pour se donner géométriquement les coefficients p et q, on suppose que l'on dispose de deux autres points de base d'abscisses p et q.

Pour démontrer ce théorème nous ramenons l'équation (1) à une équation à une inconnue θ de la forme $\cos 3\theta - h = 0$ (2) avec θ une inconnue et h un nombre réel

Pour cela on effectue le changement de variables $x = p \cos \theta$ et on détermine $ de façon à ce que (1) et (2) soient équivalentes

On a $x^3 + px + q = r^3 \cos 3\theta + pr \cos\theta + q$ et $\cos 3\theta - h = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - h$

$x^3 + px + q = 0$ équivaut à $\cos 3\theta - h = 0$

$r^3 \cos^3\theta + pr\cos\theta + q = 0$ équivaut à $4 \cos^3\theta - 3\cos \theta - h = 0$

$(r^3 \cos^3\theta / pr) + \cos\theta + p/pr = 0$ équivaut à $(4\cos^3\theta/3) - \cos\theta - h/3 = 0$

Pour que ces deux équations soient équivalentes il faut et il suffit que tous leurs coefficients soient égaux, c'est-à-dire $r^3/pr = -4/3$ ou $r^2 = -4p/3$ donc $r = 2\sqrt{-p/3}$ car $r>0$

On obtient $r = 2\sqrt{-p/3}$ et $pr = -3p^3/4$

$x^3 + px + q = 2\sqrt{-p^3/27}\ .\ (4\cos^3\theta - 3\cos\theta + q/2\sqrt{-p^3/27})$

$x^3 + px + q = 2\sqrt{-p^3/27}\ .\ (\cos 3\theta + q/2\sqrt{-p^3/27})$

Ainsi par changement de variables $x = (2\sqrt{-p/3})\cos\theta$

équivaut à l'équation (3) $\cos 3\theta + (q/2\sqrt{-p^3/27}) = 0$

Si θ_0 et une solution particulière de (3) alors $\theta_0 + 2\pi/3$ et $\theta_0 - 2\pi/3$ sont aussi solutions de (3). Donc les solutions de (1) sont de la forme :

$x_1 = (2\sqrt{-p/3})\cos\theta_0$, $x_2 = (2\sqrt{-p/3})\cos(\theta_0 + 2\pi/3)$, $x_3 = (2\sqrt{-p/3})\cos\theta_0 - 2\pi/3)$

Donc la construction de ces racines est alors la suivante : on construit un cercle (F) de centre O passant par I puis le cercle (C) de centre O et de rayon $2\sqrt{-p/3}$. On construit H sur (OI) tel que $\overline{OH} = -q/2\sqrt{-p^3/27})$

On a $OH \leq 1$ car $4p^3 + 27q^2 < 0$ et la perpendiculaire à (OI) passant par H coupe F en M tel que cos(IOM) = OH. A l'aide de la règle à curseurs et le compas, on peut construire le point

M_1 du cercle C tel que $HOM_1 = HOM/3$ avec $IOM = HOM$, puis les points M_2 et M_3 sur le cercle C tels que le triangle $M_1M_2M_3$ soit équilatéral.

Donc les abscisses x_1, x_2 et x_3 de M_1, M_2 et M_3 sont les racines de $x^3 + px + q = 0$ (voir Fig. 6)

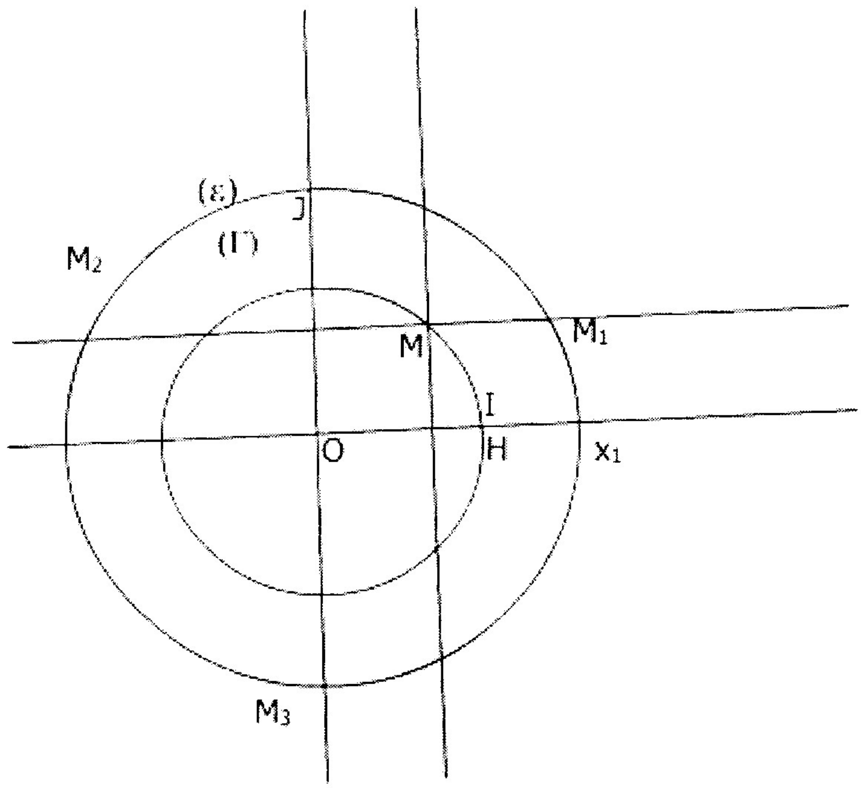


Figure 6

iii) Exemple : Construction de polygone régulier de 7 côtés

Soit $\omega = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$ la racine du polygone $X^7 - 1$. Toutes les racines de ce polynôme sont de la forme $\omega_k = \cos(2k\pi/7) + i\sin(2k\pi/7)$ avec $k = 0,6$; le polynôme minima pur ω est $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = P(X)$

D'où $\omega_2^6 + \omega_2^5 + \omega_2^4 + \omega_2^3 + \omega_2^2 + \omega_2 + 1 = 0$ (1) car ω_2 est racine de P(X)

En transformant cette équation, on obtient

$2\cos(4\pi/7) + 2\cos(8\pi/7) + 2\cos(12\pi/7) = 0$

or $\cos(8\pi/7) = 2\cos^2(4\pi/7)$ et $\cos(12\pi/7) = 4\cos^3(4\pi/7) - 3\cos(4\pi/7)$

donc $2\cos(4\pi/7)$ est la racine du polynôme $X^3 + X^2 - 2X - 1 = R(X)$

Sachant que $4\pi/7 = \pi/2 + \pi/14$, on a $\cos(4\pi/7) = -\sin(\pi/14)$

C'est-à-dire $2\sin(\pi/14)$ est racine du polynôme $X^3 - X^2 - 2X + 1$

Soit à résoudre l'équation $X^3 - X^2 - 2X + 1 = 0$ par construction

Posons $x = X + 1/3$ On a $x^3 - (7/3)x + (7/27) = 0$

$p = -7/3 < 0$ et $4p^3 + 27q^2 = -49 < 0$

d'où l'équation $x^3 - (7/3)x + (7/27) = 0$ admet trois racines réelles et donc on peut construire à la règle a curseurs et au compas les trois racines de cette équation.

Le rayon du cercle C est $2\sqrt{-p/3} = 2\sqrt{7/3}$ et $OH = -1/2\sqrt{7}$

On obtient les trois points M_1, M_2, M_3 d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 et puis en translatant par 1/3 ces racines, on a X_1, X_2, X_3 les trois racines de $X^3 - X^2 - 2X + 1 = 0$.

Par cette construction, nous remarquons que l'une des trois racines X_1, X_2 et X_3 est égale à $2\sin(\pi/14)$

D'où on en déduit que l'angle $\pi/7$ est constructible (voir Fig. 7)

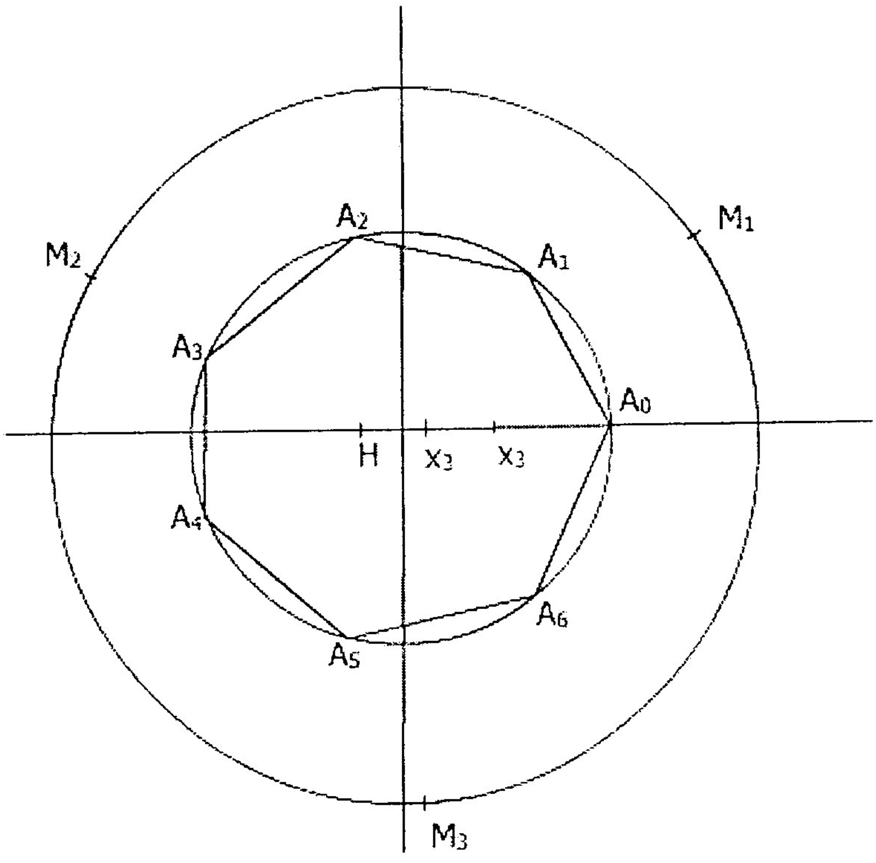


Figure 7 : Polygone régulier de 7 côtés (A_i) i = 0,6