Modélisation physique des systèmes mécaniques de base Fréquences et modes propres d'une poutre en vibration transversale

Dina Arisoa RAKOTOMANANA[1], Paul Auguste RANDRIAMITANTSOA[2], Charles Rodin RAKOTOMANANA[3], José Denis RAKOTOVAO[4], Ny Avana Yarivony HERINAVALONA[5]

Laboratoire de recherche – Génie Mécanique et Thermique Industriel (LR-GMTI)
Ecole Supérieure Polytechnique – Université d'Antananarivo
BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 - Madagascar

[1]dian_nha@yahoo.fr, [2]rpauguste@gmail.com,[3]rodin_rcr@yahoo.fr,
[4]josedenirakotovao@gmail.com, [5]navalhr@gmail.com

Résumé : Pour étudier le mouvement ou le comportement d'un système mécanique en mouvement au voisinage du repos, il est nécessaire d'effectuer une analyse de base sur celui-ci. En premier lieu, il est important de connaître le degré de liberté du système car cela aide à choisir les paramètres pour décrire le mouvement. On peut alors utiliser une méthode sur les coordonnées du système. Ensuite, la modélisation physique du système pourra être obtenue en appliquant la méthode de transformation du système en masse-ressort. Enfin, la détermination des fréquences et modes propres permet de comprendre les phénomènes d'excitation, d'oscillation du système en vibration libre.

Mots clé : système mécanique – masse ressort – degré de liberté – fréquence - mode

Abstract : The behavior of a system with mechanical phenomenon whereby oscillations occur about an equilibrium point, can be studied through performing a basic analysis on this one. First, to find the degree of freedom is important and useful for choosing parameters to describe the system behavior. Then, we can use a method concerning system coordinates. After that, physical modelisation is obtained by applying the way to transform the system into mass-spring system. At last, the determination of the frequencies and modes is important in order to understand the phenomena of excitation, oscillation and resonance of the system in free vibration

Keywords: mechanical system – mass-spring – degree of freedom – frequency - mode

1. Introduction

Le mouvement du système mécanique au voisinage du repos est un mouvement d'oscillation autour d'une position d'équilibre stable. Dans le domaine de l'industrie, on s'intéresse surtout à l'analyse de ce type de mouvement car ce dernier pourrait provoquer des dommages, des problèmes d'équilibrage sur les engins, appareils, ou sur tous dispositifs mécaniques de l'usine. Il est alors nécessaire d'en faire une étude. L'analyse de base est de déterminer tout d'abord le nombre de degré de liberté du système et ensuite celui-ci pourra être modélisé physiquement.

Si le système est soumis à une excitation externe, il pourrait entrer en résonance avec chacune des fréquences propres associées aux différents modes propres. Cette considération est cruciale dans plusieurs domaines, comme dans l'industrie, le génie civil, où il est important de déterminer ces fréquences propres afin de s'assurer que dans les conditions normales d'utilisation, elle n'est pas soumise à des excitations dans le domaine fréquentiel d'un ou de plusieurs modes propres. Ceci permet d'éviter les résonances vibratoires potentiellement dangereuses.

2. Le degré de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de déplacements possibles que peut effectuer ce système. C'est aussi le nombre minimum de paramètres indépendants nécessaires pour décrire la configuration complète à tout instant de ce dernier. La connaissance de ces paramètres est indispensable pour étudier le mouvement.

2.1 Système à un degré de liberté

Les systèmes à un degré de liberté sont les systèmes les plus simples car ils n'exigent qu'un paramètre indépendant pour caractériser leur configuration.

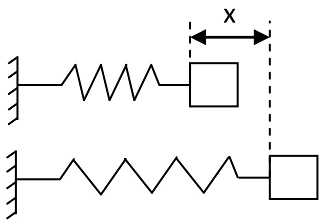


Figure 1: Système à un degré de liberté

Le système composé d'un ressort élastique et d'une masse (Figure 1) dont la position est définie à chaque instant t par le seul paramètre x est un exemple de système à un degré de liberté. La configuration d'un tel système change avec de la position de cette masse.

2.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Le système considéré suivant est un système à n degré de liberté. Il est constitué de n masse et n+1 ressorts.

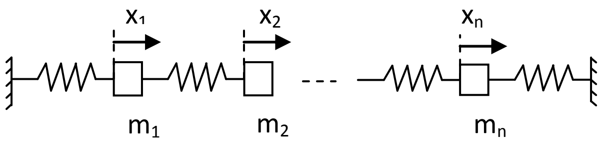


Figure 2: Système à n degrés de liberté

3. Modélisation et caractérisation d'un système

Un système mécanique peut être modélisé par un ressort et une masse.

Après la détermination du nombre de degrés de liberté, nous pouvons maintenant assimiler notre système en système masse-ressort et déterminer les caractéristiques de ce dernier.

3.1 Traction et compression d'une tige élastique encastrée à une extrémité

La figure suivante représente une poutre encastrée à une extrémité et soumise à un effort F_0 à l'extrémité libre.

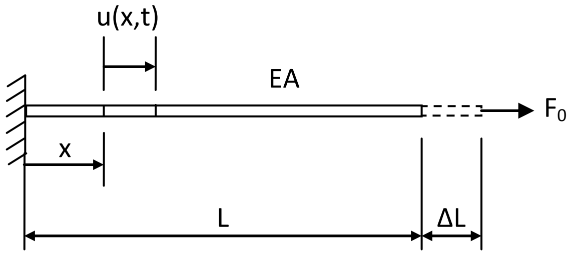


Figure 3a: Tige élastique soumis à un effort de traction

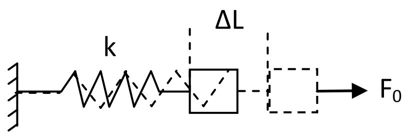


Figure 3b: Modèle physique de la tige élastique

u : déplacement axial à une distance x

F_0 : effort de traction

L : longueur de la tige

ΔL : déplacement de la masse

k : raideur du ressort

E : module d'élasticité

A : section de la tige

Caractéristique du modèle

L'équilibre de l'élément de la tige permet d'écrire la relation suivante :

$$EA\frac{d^2u}{dx^2} = q(x) \qquad (1)$$

Où q(x) est la charge axiale répartie

Les conditions aux limites de la tige s'écrivent :

$$u(0) = 0, \qquad EA\frac{du}{dx}\bigg|_{x=L} = F_0 \qquad (2)$$

Ce qui donne les caractéristiques suivantes :

$$\Delta_L = \frac{F_0 L}{EA} \qquad (3)$$

$$k = \frac{EA}{L} \qquad (4)$$

3.2 Flexion d'une poutre élastique encastrée à une extrémité

La poutre de la figure ci-dessous est un système mécanique à un degré de liberté et peut se modéliser comme suit :

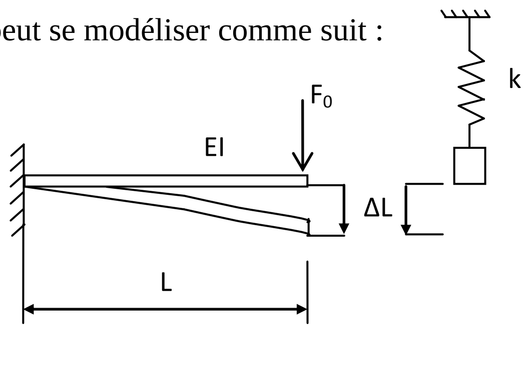


Figure 4 : Modèle de flexion de la poutre encastrée

I : Moment d'inertie d'une section droite d'abscisse x

w : déviation axiale à une distance x

Caractéristique du modèle

L'équation d'équilibre de la poutre en flexion soumise à une charge répartie est :

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = q(x) \qquad (5)$$

Avec les conditions suivantes :

$$w(0) = \left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=0} = 0, \qquad EI\left.\frac{d^4w}{dx^4}\right|_{x=L} = 0,$$

$$EI\left.\frac{d^3w}{dx^3}\right|_{x=L} = -F_0, \qquad (6)$$

On a comme caractéristiques :

$$\Delta_L = w(L) = \frac{F_0}{EI}\frac{L^3}{3} \qquad (7)$$

$$k = \frac{3EI}{L^3} \qquad (8)$$

3.3 Torsion d'une poutre élastique encastrée à une extrémité

Une poutre encastrée à une extrémité et soumise à un moment de torsion T_0 à son extrémité libre autour de son axe est représentée par la figure 5 :

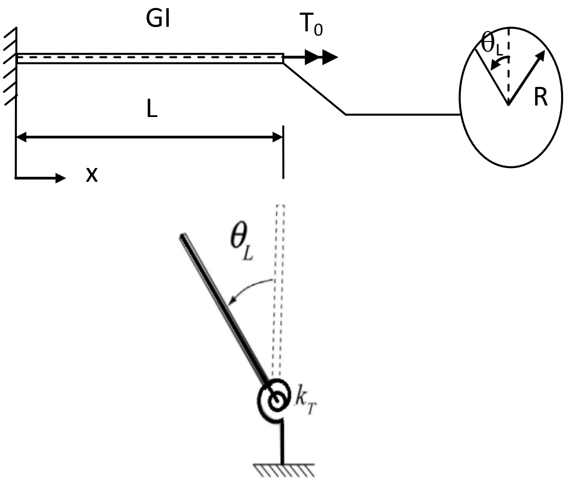


Figure 5 : Modèle de torsion d'une poutre élastique

Caractéristique du modèle

L'équation d'équilibre d'un élément de la poutre élastique uniforme soumise à un couple réparti $\tau(x)$ et de moment d'inertie J, peut s'obtenir par :

$$GJ\frac{d^2\theta}{dx^2} = \tau(x) \qquad (9)$$

Où J est l'élément d'inertie polaire de la section d'abscisse x

G est le module de cisaillement

Et θ est la déformation angulaire

Les conditions aux limites sont :

$$\theta(0) = 0, \qquad GJ\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{\theta=L} = T_0 \qquad (10)$$

Alors l'angle de rotation est définie par :

$$\theta_L = \theta(L) = T_0\frac{L}{GJ} \qquad (11)$$

Et la raideur du ressort de torsion :

$$k_T = \frac{GJ}{L} \qquad (12)$$

4. Fréquences propres et modes propres de vibration d'une poutre en flexion

La fréquence à laquelle le système vibre et oscille lorsqu'il est en évolution libre, sans force excitatrice extérieure ni forces dissipatives est appelée fréquence propre. Sa détermination est importante afin de comprendre les phénomènes de résonance que pourrait subir ce système.

La vibration de tous les points d'un système mécanique à une fréquence propre est appelée mode propre de vibration. Ce type de mode se décrit comme une forme spatiale selon laquelle le système excitable peut osciller après avoir été perturbé au voisinage de son état d'équilibre stable.

4.1 Expressions des fréquences et modes propres

Dans cette étude, les poutres considérées sont des poutres continues en flexion de même section rectangulaire pleine, de mêmes caractéristiques et qui subissent une vibration libre.

Les *fréquences propres* sont données par :

$$f_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \propto_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}\frac{1}{L^2}} \qquad (13)$$

E : module d'Young

ρ : masse volumique

L : longueur de la poutre

I : moment d'inertie

S : section

$\propto_i$: racines (i mode)

Et les *modes propres* par :

$$Y_i = \mathrm{a}\sin(k_i x) + \mathrm{b}\cos(k_i x) + \mathrm{c}\,\mathrm{sh}(k_i x) + \mathrm{d}\,\mathrm{ch}(k_i x) \qquad (14)$$

Avec $k_i = \frac{\propto_i}{L}$ (15)

a,b, c et d : constantes

Ces constantes sont déterminées à partir des conditions limites pour chaque type de liaison.

4.2 Différents types de liaisons considérées

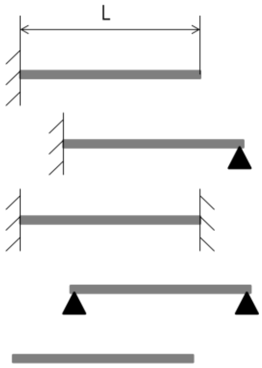
-**Encastrée –libre**

-**Encastrée –appuyée**

-**Encastrée-encastrée**

-**Appuyée-appuyée**

-**Libre-libre**



4.3 Conditions aux limites

-**Encastrée –libre**	$Y_i(0)=0$	$\frac{dY_i}{dx}(L) = 0$
-**Encastrée –appuyée**	$Y_i(0)=0$	$\frac{dY_i}{dx}(L) = 0$
-**Encastrée-encastrée**	$Y_i(0)=0$	$Y_i(L)=0$
-**Appuyée-appuyée**	$\frac{dY_i}{dx}(0) = 0$	$\frac{dY_i}{dx}(L) = 0$
-**Libre-libre**	$\frac{dY_i}{dx}(0) = 0$	$\frac{dY_i}{dx}(L) = 0$

4.4 Exemple d'application sur le cas d'une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre

D'après les conditions aux limites pour ce type de liaison, le système (14) n'admet une solution que si son déterminant est nul.

Les constantes a, b, c et d sont alors solution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -sin(k_iL) & -cos(k_iL) & sh(k_iL) & ch(k_iL) \\ -cos(k_iL) & sin(k_iL) & ch(k_iL) & sh(k_iL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

D'où les expressions :

$$a = -c = -b\frac{(\cos(k_iL) + ch(k_iL))}{(\sin(k_iL) + sh(k_iL))} = b\frac{(\sin(k_iL) - sh(k_iL))}{(\cos(k_iL) + ch(k_iL))} \quad (17)$$

$$b = -d = \frac{(\cos(k_iL) + ch(k_iL))}{(\sin(k_iL) - sh(k_iL))} = -\frac{(\sin(k_iL) + sh(k_iL))}{(\cos(k_iL) + ch(k_iL))} \quad (18)$$

Les racines $\propto_i$ sont :

$\propto_1 = 1.88, \propto_2 = 4.69, \propto_3 = 7.85, \ldots$

$$\propto_i = (2i + 1)\frac{\pi}{2} \quad (19)$$

D'où

$$Y_i = ch(k_ix) - cos(k_ix) - \left(\frac{sh(k_iL) - sin(k_iL)}{ch(k_iL) - cos(k_iL)}\right)(sh(k_ix) - sin(k_ix)) \quad (20)$$

4.5 Résultats

Les résultats obtenus sont les allures générales de courbes de fréquences et modes propres pour les 6 premiers modes.

4.5.1 Fréquences propres

Les fréquences propres pour chaque mode sont montrées sur la figure suivante :

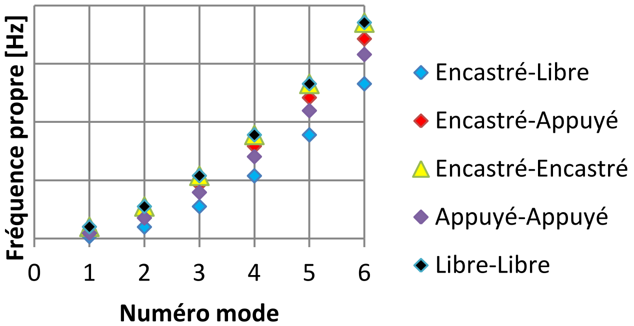


Figure 6 : Fréquences propres par mode

Selon la figure 6, les valeurs des fréquences augmentent avec les modes. Et ces valeurs sont identiques pour le cas des liaisons encastrée-encastrée et libre-libre. De plus, elles sont les plus élevées par rapport aux fréquences pour les autres types de liaisons.

4.5.2 Modes propres

Les modes propres pour chaque cas sont montrées sur les figures qui suivent :

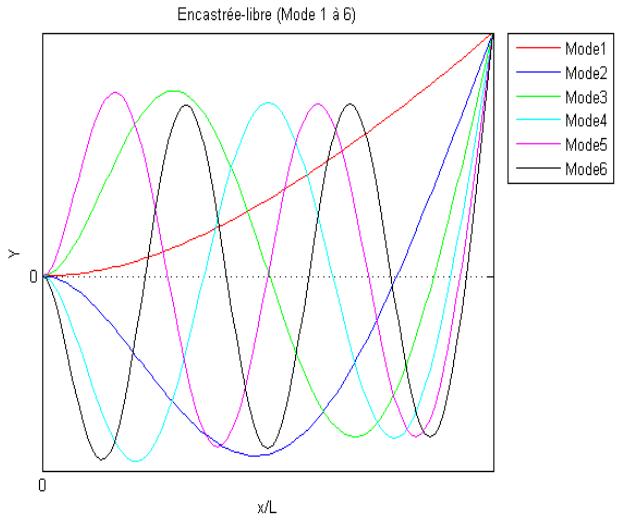


Figure 7 : Déformée modale d'une poutre encastrée-libre

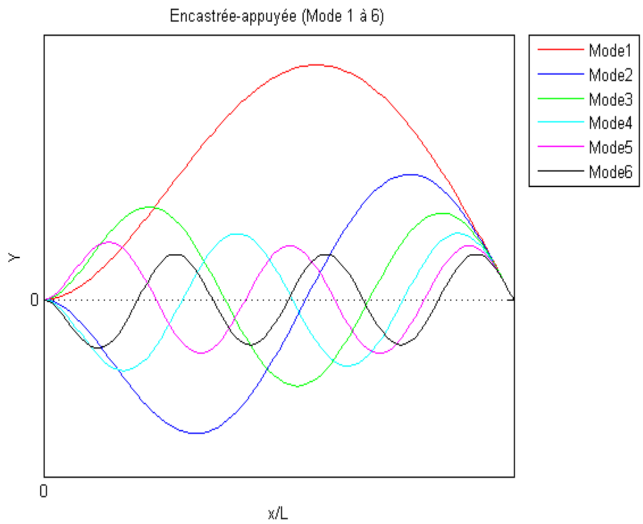


Figure 8 : Déformée modale d'une poutre encastrée-appuyée

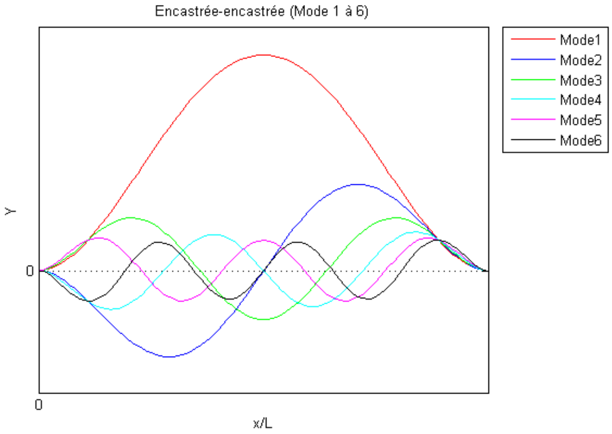


Figure 9 : Déformée modale d'une poutre encastrée aux extrémités

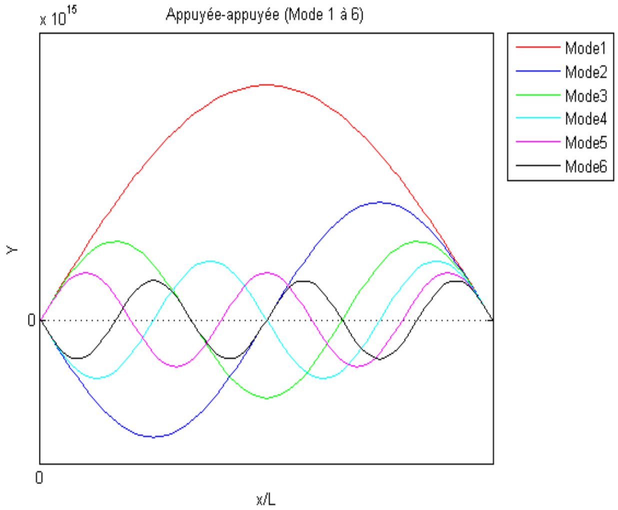


Figure 10 : Déformée modale d'une poutre appuyée aux extrémités

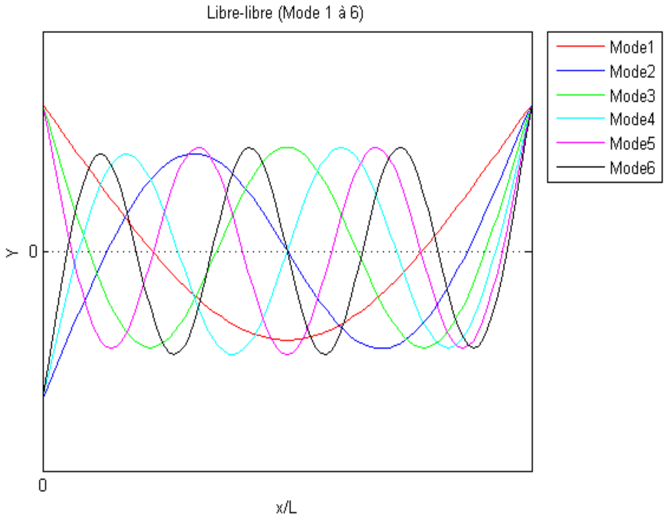


Figure 11 : Déformée modale d'une poutre libre aux extrémités

On peut remarquer que les déformées modales des poutres encastrée-appuyée, encastrées aux extrémités et appuyées aux extrémités ont presque les mêmes allures mais diffèrent aux extrémités. L'amplitude de la courbe pour le mode 1 est élevée par rapport à celle des autres modes. Il est donc conseillé d'augmenter la fréquence afin d'atténuer la vibration de la poutre.

5. Conclusion

La modélisation d'un système mécanique par un système masse-ressort est importante car elle permet d'étudier et de connaître le comportement d'un mécanisme à l'aide des équations de mouvement dans lesquelles figurent les caractéristiques du système. Pour cela, nous pouvons contrôler le système, modifier les caractéristiques, afin d'éviter les dommages et résoudre les problèmes causés par le mouvement d'oscillation au voisinage du repos. L'étude des systèmes mécaniques comme les machines ou engins mécaniques et les pièces mécaniques en mouvement requiert la maîtrise des mouvements des systèmes mécaniques de base. Les résultats obtenus sur les fréquences et modes propres nous permettent de connaître le comportement de ces systèmes en vibration libre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Assis A. K. T. (1962), « *Relational Mechanics* » Apeiron, Montreal Canada, 1999

[2] Babakov I. M., « *The theory of oscillation* » Nauka, Moscow, 1968

[3] Dugas R., « A *History of Mechanics* », Griffon Neuchâtel, Switzerland, 1955

[4] Simant, « *Mechanical System Design* » PHI Learning Pvt. Ltd., 2009

[5] Tse F. S., Morse I.E., Hinkle R. T., « *Mechanical vibrations*», Allyn and Bacon Inc., Boston, 1963

[6] Youde Xiong, « *Formulaire de mécanique*», Eyrolles, 2007