MODELE TOPO-GEOMETRIQUE MZ : CONCEPT DE BASE

Andrianarizaka Marc Tiana, [1] Robinson Matio, [2] Andriamanohisoa Hery Zo [3].
Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénieur et de l'Innovation (ED-STII)
Equipe d'Accueil Doctorale Sciences Cognitives et Application (EAD-SCA)
Université d'Antananarivo
[1]mcthiana@yahoo.fr, [2] mat-robinson2000@yahoo.fr, [3]aheryzo@gmail.com

Résumé **:** Cet article présente le concept de base du modèle TOPO-GEOMETRIQUE MZ sur la recherche des contraintes redondantes dans la résolution des problèmes de programmation linéaire. Il décrit quelques travaux déjà menés dans le domaine et les classes d'objet mathématiques du plus simple au plus compliquées, permettant de modélisé le concept réel de la prise de décisions. Les notions globales sur la redondance des contraintes d'un problème de programmation linéaire, les éléments ou objets mathématiques de bases nécessaires pour l'élaboration du modèle « Topo-géométrique MZ » sont développées également dans cet article.

Mots clés : Programmation linéaire, contraintes, contraintes redondantes, algorithme.

Abstract: This paper presents the basic concept of the TOPO-GEOMETRIC MZ model on the search for redundant constraints in the solving of linear programming problems. He describes some work already carried out in the field and mathematical object classes from the simplest to the most complicated, allowing to model the real concept of the decision-making. The general notions on the constraint redundancy of a linear programming problem, the basic mathematical elements or objects necessary for the development of the "Topo-geometric MZ" model are also developed in this article.

Keywords: Linear programming, constraints, redundant constraints, algorithm.

1 INTRODUCTION

De nombreux chercheurs ont proposé différents algorithme pour identifier les contraintes redondantes en vue de les retirées de l'étude pour obtenir un modèle réduit pour la programmation linéaire. En 1965, Zionts suggérait quelques améliorations à la mise en œuvre de la méthode de démarrage, mais qui n'a pas permis d'atteindre une valeur pratique. Par ailleurs, un certain nombre de méthodes qui traitent la redondance ont été mises au point, dont la plus connue est celle de la méthode d'énumération géométrique se basant sur la création d'un certain nombre de situations dans lesquelles la redondance peut être reconnue immédiatement sans plus de calculs.

En 1971, Lisy a utilisé les règles établies par Ziont pour identifier toutes les contraintes redondantes dans des systèmes de contraintes linéaires. Gal développe cette approche par l'ajout de règles pour les situations dans lesquelles les contraintes peuvent être immédiatement identifiées comme étant non redondantes. Il a proposé une autre méthode pour classer les contraintes aussi bien les contraintes redondantes que nécessaires. Ils produisent des résultats qui sont inconditionnellement corrects. Plus tard Caron et al. combinent les méthodes ci-dessus par ajout de règles de Traitement de la dégénérescence.

Par ailleurs, Brearly et al. ont proposé une méthode simple pour identifier les contraintes redondantes à partir d'un système de contraintes linéaires. Cette méthode consiste à analyser les limites inférieures et supérieures des variables. Telgen a proposé une méthode déterministe pour identifier les contraintes redondantes par l'utilisation de ratio minimal ccomme dans la méthode du simplex. Stoijkovic et Stanimirovic proposaient une méthode pour identifier les contraintes redondantes par l'application du principe de maximum et minimum. Paulraj et al. ont également présenté une méthode heuristique pour identifier les contraintes redondantes en utilisant l'interception des contraintes de matrice de problème de programmation linéaire. De leur côté, Gutman et Ioslovich ont décrit une nouvelle approche pour prétraiter les problèmes à grande échelle non négatif afin de réduire les dimensions considérablement en définissant et en supprimant les contraintes redondantes et les variables. Ces différents travaux ne peuvent que justifier l'intérêt de la recherche nouveaux modèles ou techniques de recherche de contraintes redondantes dans l'optique de la minimisation du coût de la résolution d'un problème de programmation linéaire.

2 Contraintes redondantes

Une contrainte redondante est une contrainte qui peut être supprimé d'un système de contraintes linéaires sans changer la région faisable.

Examiner le système suivant de m et contraintes d'inégalité linéaire non négatif n- variables ($m \geq n$) :

$$AX \leq B, \qquad X \geq 0, (1.1)$$

Où $A \in R^{m\,x\,n}$, $b \in R^{m}$, $X \in R^{n}$, et $0 \in R^{n}$.

Soit,

$A_i\, x \leq b$i la i ème contrainte du système (1.1) et

$$S = \{X \in R^{N} / A_i\, x \leq B_i,\ X \geq 0\}$$

le domaine de solution acceptable associée au système (1.1).

Soit

$$S_k = \in \{X\, R^{n} / a_i\, X \leq b_i,\ X \geq 0, J \neq k\}$$

le domaine de solution acceptable associé à la contrainte $a_i\, X \leq b_i$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq k$ *du système* .

La k ème contrainte :

$A_k\, X \leq b_k \quad (1 \leq K \leq m)$ est redondante pour le système (1.1) si et seulement si $S = S_k$.

Définition 2.1.

Les contraintes redondantes peuvent être classées comme faiblement et fortement contraintes redondantes

Contraintes faiblement redondantes

La contrainte $A_i\ X \leq b_i$ est faiblement redondante si elle est redondante et

$$A_i\, X = b_i \text{ pour } X \in S.$$

Contraintes fortement redondantes

La contrainte $A_i\, X \leq b_i$ est fortement superflue si elle est redondante et

$$AiX < b_i \text{ pour tous } X \in S.$$

Contrainte obligatoire

La contrainte obligatoire est celle qui passe par le point solution optimale. Il est également appelé contrainte pertinente.

Contrainte non contraignante

La contrainte non contraignante est celle qui ne passe pas par la solution optimale. Mais elle peut délimite le domaine de solution acceptable.

1.1 Les objets mathématiques du modèle topo-géométrique MZ

1.0.1 Les scalaires

Tout nombre réel symboliquement un scalaire sera représenté par une lettre de l'alphabet latin ou grecque au minuscule.

Exemple : $x, y, z, \ldots, \alpha, \ldots$

1.0.2 Les indexes

C'est un nombre entier positifs ou nul, que nous attacherons a un objet d'un modèle, en guise d'identificateur unique. Symboliquement les indexes seront représenter par i, j, k,….

- Pour représenter les valeurs possibles d'un indexes on utilisera la notions suivantes :

i=1,2,…, n pour signifier que l'indexe i varies de 1 jusqu' à n.

- Quand un objectif x modèle est indexé on écrit :

$$(xi)_{i=1,\ldots,n}$$

qui est une représentation condensée de :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{i1} \end{pmatrix}$$

Un objet peut avoir deux indexes comme identificateurs. C'est le cas par exemples des matrices.

On la représente par $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,m}}$ qui désigne la

matrice : $\begin{pmatrix} a_{11}.....a_{in} \\ a_i \\ a_{m1}....a_{mn} \end{pmatrix}$

Pour exploiter pleinement les indexes, on utilisera également le symbole $\sum$ (sommation)

Ainsi, pour représenter $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots.. + c_nx_n$ on écrira tout simplement $\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j$

Une décision-action est dite admissible si elle satisfait tous les contraintes (1.2) et (1.3)

<u>1.1 les objets élémentaires</u>

<u>1.1.l Les espaces des décisions</u>

Reprenons les problèmes PPL, sous sa forme connu trouver les inconnues-réelles $x_1, x_2, \ldots.., x_n$ qui maximisent :

$$Z = c_1.x_1 + c_2x_2 + \ldots. + c_nx_n$$

Et qui satisfont les conditions suivantes :

i)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n \le b_n \end{cases} \quad (1.2)$$

ii)

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\ldots.., x_n \ge 0 \quad (1.3)$$

où les coefficients:

$$(c_j)\ j=1,\ldots,n\ ;(a_{ij})\ i=1,\ldots.,n\ \ j=1,\ldots.,n;$$
$$et\,(b_i)\ i=1,n \quad \text{sont des éléments de } \mathbb{R}$$

Chaque ligne des conditions (1.2) est appelé contraintes technique. Les conditions (1.3) sont appelées contraintes de non-négativité.

<u>2.1.1 definition1</u> : décision-action-points-vecteurs

On appelle décision-action tout n-uplet :

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

On la notera par la suite :

$$(x_j)\ j=1,\ldots,n$$

Mathématiquement, on voit que c'est un élément de $\mathbb{R}^n$ relativement a une base de donné. C'est aussi un point de l'espace affine $\mathbb{R}^n$ relativement a un repère donné.

Une décision action seras représenté par un point affine. Ce qui nous amène a la définition repère de décision-action

Notation : une décision action est noté par une lettre grecque au majuscule.

2.1.2 definition2 : repère de décision - action – espace de décision

Nous appelons repère de décision-action, le repère géométrique orthonormé positif, noté :

$$(O, U_1, U_2, ..., U_n)$$

rattaché au problème PPL sur-mentionné. Dans ce repère l'origine géométrique O a une signification particulière : il représente la décision de ne rien faire, c'est-à-dire, que si O est présenté par :

$$\begin{pmatrix} x_{o1} \\ x_{o2} \\ x_{0n} \end{pmatrix}, \qquad x_{01} = x_{02} = x_{03} = ... = x_{0n}$$

A chaque variable de décision x_j correspond la valeur unitaire U_j.

L'espace affine élément de $\mathbb{R}^n$, muni du repère $(O, U_1, U_2, ..., U_n)$ est appelé espace des décisions relatif au problème PPL à résoudre.

Malgré cette ressemblance frappant avec la géométrie affine enclin Dinne, nous présenterons d'omble un aspect limitatif.

2.1.3 postulat 1

Dans la théorie topo-géométrique MZ (TGMZ)

Le repère affine orthonormé de l'espace de décision action du problème PPL à résoudre est unique.

Ce postulat signifie que :

- Le concept de changement de base n'existe pas.
- Le concept de changement d'origine n'existe pas.

2.2 opération sur les décision-action

Soit un problème PPL donné.

D'après 2.1.1 une décision est représentée par un point de l'espace des décisions action, et par un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Cette double matière (a la fois affine et vectorielle) des décision-action est très importante, elle permet d'exprimer :

- La création d'autre décision action repère partir de décision action existante.
- La « recherche » d'autre décision action suivant une direction donnée.

2.2.1 amplification d'une décision action

Soit l'espace de la décision action relative au repère $(O, U_1, U_2, ..., U_n)$.

Soit Xo une décision action et $\propto$ un nombre réel positif donné.

On appelle « amplification de Xo à l'aide de $\propto$ », la génération d'une décision action X telle que vectoriellement :

$$X = \propto Xo$$

Mathématiquement il s'agit donc la multiplication du vecteur Xo par le scalaire $\propto$.

2.2.2 additions de deux décision action

Soient Xo et X1 deux décisions action dans un PPL. On appelle addition de Xo et X1, la création d'une nouvelle décision action X telle que vectoriellement :

$$X = Xo + X1$$

Remarque1 : la combinaison de 2.2.1 et 2.2.2 nous per décisions et de modéliser le concept de « combinaison »comique de deux ou plusieurs décision action

Soit les décisions actions X1, X2 ,…., Xk. On appelle combinaison conique de ces décisions actions, la nouvelle décision X définie par :

X = ∝1X1 + ∝2X2 +…. + ∝kXk

∝1,∝2,…,∝k soit des nombres réel positif ou non

Remarque 2

De la remarque précédente, il est clair que la décision satisfait les contraintes (2.3) si elle est une combinaison conique de U1, U2,…, Un.

C'est à dire :

X= ∝1U1+∝2U2+…. +∝nUn avec $\alpha 1 \geq 0,\ \alpha 2 \geq 0, ..., \alpha n \geq 0$

Montrons que la réciproque est vraie.

Soit X une décision action satisfait la contrainte (1.3)

$$X = (x_i) \quad avec \quad x_i \geq 0 \quad \forall_{ji} = 1,...,n$$

or

$$(x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j U_j \quad avec\ x_j \geq 0$$

CQFD

2.2.3 axes de recherche partant d une décision action Xo et de direction vecteur de décision action

Soit Xo et V des décisions actions. On appelle axe de recherche portant de Xo et de direction U ensemble des décisions actions noté 𝓡 (Xo, V) définie par :

$$\text{R } (Xo,V) = \{ X \in \mathbb{R}^n \ tq X = Xo + \alpha V, \alpha \in \mathbb{R}^+ \}$$

Mathématiquement il s'agit du rayon affine issu de Xo et de vecteur directeur U.

Conceptuellement l'idée de recherche est justifié par le fait qu' on pratique, tout solveur et basé sur un algorithme de recherche en partant d'une point initial ainsi, à partir d'une décision action Xo donnée, et une direction de recherche V donnée, on peut « sonder » les point de l'unité des décision qui vont satisfaire les contraintes (1.2) et (1.3).

Cette idée de recherche n est n'est pas confiné à une direction de recherche uniquement. on peut également adopter simultanément deux direction de recherche V1et V2. D ou le concept de plan de recherche portrait de Xo et de direction V1 et V2.

Relation d'ordre dans un axe de recherche :

$$\text{R } (Xo,V) = \{ X \in \mathbb{R}^n \ tq \ X = Xo + \alpha V, où \ \alpha \geq 0 \}$$

On peut définir dans cet ensemble ma relation binaire notée $\leq$ comme suit

Soit $X_1\, et\, X_2$ deux point de décision action dans $R(Xo,V)$ *tel que* :

$$X_1 = Xo + \alpha_1 V$$

et

$$X_2 = Xo + \alpha_2 V$$

Avec $\alpha_1 \geq 0\, et\, \alpha_2 \geq 0$

On dit que X_1 est plus petit que X_2 et on note $X_1 \leq X_2$ si et seulement si $\alpha_1 \leq \alpha_2\, dans\, \mathbb{R}$.

Il est facile de démontrer que cette relation est une relation d'ordre K dans $R(Xo,V)$, Xo étant le plus petit élément.

2.2.5 Cône de recherche issu de Xo et de direction V1,V2,V,Vk ou V1,V2,… ,Vk sont des vecteur décision action

Soit Xo un point décision action assuré à un PPL.

Soient V1, V2,…, Vk k-vecteurs décision action de même problème PPL.

Soient V1, V2,…., Vk, l'ensemble de décision action noté $C(Xo,V1,V2,....,Vk)$ et définie comme suit :

$$C(Xo,V1,V2,....,Vk) = \{ X \in \mathbb{R}^n \ tq \ X = Xo + \alpha 1V1 + \alpha$$

Remarquons tout de suite que les plans de recherche ne sont que des cas particulier de la recherche.

2.2.6 Plan de recherche partant d'une décision action Xo et de direction V1 et V2

Soit Xo un point décision-action et V1 et V2 deux vecteurs décision action de $\mathbb{R}^n$.

On appelle plan de recherche partant de Xo et de direction V1 et V2 l'ensemble noté $P(Xo, V1, V2)$ définie comme suit :

$$P(Xo, V1, V2) = \{X \in \mathbb{R}^n / X = Xo + \alpha 1 V1 + \alpha 2 V2, \text{ avec } \alpha 1, \alpha 2 \in \mathbb{R}^+\}$$

CONTRAINTES TECHNIQUES

Dans la pratique toute décision action entraine toujours un impact. Dans le domaine de la programmation linéaire, on peut distinguer deux catégories d'impact :

- Les impact-performances.
- Les impacts ressources.

Dans cet article, nous nous occupons uniquement des impact-ressources.

2.3.1 définitions 1 : impact ressource

Soit X un point décision action d'un problème PPL donné. Soit V un vecteur non décision de $\mathbb{R}^n$.

On appelle impact ressource selon V, le produit scalaire de X avec V dans $\mathbb{R}^n$ noté :

$\Im$(X, V)=<X, V>

où <X,V> désigne le produit scalaire le U avec V. le vecteur V est appelé vecteur V de consommation de la ressource donnée.

2.3.2 **définition2 :contraintes-ressources**

Dans notre théorie, nous supposons qu'une contraintes qu'elle soit logique ou matérielle peut être associé à une ressource qui soit toujours limitée dans le problème PPL associé.

Soit A= $(aj)_{j=1,\ldots,n}$ un vecteur V de consommation d'une ressource donnée.

Soit b la valeur limite de la ressource on appelle zone de respect de le consommation de la ressource limitée par b l'assemblé noté ZR (A, b) définie par :

$$\text{ZR (A, b)}=\{X \in \mathbb{R}^n tq \prec A, X \succ \leq b\}$$

En géométrie affine, cet ensemble n'est autre que le demi-espace négative délimité par l'hyperplan affine note $\mathcal{H}$ (A, b) définie par

$$\mathcal{H}\wp \text{ (A, b)}= \{X \in \mathbb{R}^n tq \prec A, X \succ = b\}$$

NB : le vecteur A n'est pas une décision action il est lié a une ressource donné et permet de calculer l'impact une décision action X sur cette ressource

2.4 Contraintes de non-négativité

Les contraintes de non- négativité traduise le fait que les décisions élémentaires xi où i=1,…, n doivent être non négatives :

$x_i \geq 0$ pour tout i =1,2,…, n

Remarquons tout de suite que les relations :

$x_i \geq 0 \ \forall$ i =1,2,…, n

peuvent s'écrire :

$x_i \leq 0 \ \forall$ i =1,2,…, n

expression équivalente à:

$$< -U_i, X > \leq 0$$

Par conséquent, une contraintes de de non-négativité peut être, également considèrent comme une contraintes ressource délimitee par $ZR = (-U_i, 0)$ appelé zone de non négativité ZNNi.

Cependant la combinaison de toutes les contraintes de non-négativité a une signification géométrique particulière que nous appelons « cône de non-négativité »

2.4.2 Cône de non-négativité

On appelle cône de non-négativité noté C_o^+ le cône de recherche issu du point-décision O et de direction tous les vecteurs décisions :

$U_i \ , i = 1, 2, ..., n$

geometriquement on a :

$$C_o^+ = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \ / \ X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i \quad où \ \alpha_i \geq 0 \right\} = Cône(O, U1, U2, ..., Un)$$

Remarque

Il est évident que :

$$C_o^+ = \cap_{i=1}^{i} ZNNi$$

2.4.3 Face de non-négativité

Rappelons que le repère topo géométrique du problème PPL, est immuables (0,Uo,U2, …,Un) Cela veut dire qu'on ne peut pas changer la place d'un vecteurs Ui de ce repère, pour tout i=1, 2,…,n On appelle face de non-négativité, noté FNNI et l'ensemble de point décision défini comme suit

$$FNNi = \begin{cases} P(0, U1, Un) \ pour \ i = 1 \\ p(O, U_{i-1}, U_i) \ pour \ i = 2, 3, ..., n \end{cases}$$

2.4.4 Axes de non-négativité

Pour tout i=1,2,…, n, on appelle axes de non-négativité, ANNi l'ensemble de point décisions définit comme suit :

ANNi =R (O, Ui) i=1,2,….,n

Remarquons qu'ANNi n'est autre que l'axe de recherche partant de O et de direction Ui.

2.5 Relation entre objets MZ

Les relations que nous allons décrire dans cette section sont celles de base. Les relations plus complexes seront traitées dans le chapitre suivant.

De plus les combinaisons entre point-décisions et point-vecteurs ont été déjà vues. Par conséquent nous allons seulement traiter les points suivants :

- La relation entre un point-décision et une zone de contraintes-techniques.
- La relation entre un axe de recherche et une zone de contraintes techniques.
- La relation entre un plan de recherche et une zone de contraintes technique.

2.5.1 Relation entre un point-décision et une zone de contraintes techniques

Etant donné qu'un point-décision est représenté par un point et qu'une zone de contraintes techniques est représentée par un demi-espace, donc un ensemble de point décision, la relation essentielle même basique entre une d ces deux classes d'objet est la relation ensemblistes d'appartenance.

Soit Xo un point décision et ZCT (A, b) une zone de contraintes la relation :

$$Xo \in ZCT(A, b) \ signifie \ que \ < A, Xo > \leq b$$

Etant donné que dans le modèle de problème PPL les contraintes sont indexées ; c'est à dire numérotés de 1 à m, les zones de contraintes techniques correspondants seront également notées :

ZCTI i=1,2,…, n

Ce qui permet de représenter le système de techniques de la façon suivante.

Soit Xo un point-décision satisfaisant toutes les contraintes techniques du problème.

On a :

$$< Ai, Xo > \leq bi \ pour \ i = 1, 2, ..., n$$

Ce qui peut s'écrire :

$Xo \in ZCTi$ pour tout i=1,2,…, n

D'où

$$Xo \in \cap_{i=1}^{m} ZCTi \qquad (1.4)$$

Relation qui est une base de l'analyse des redondances et de l'infaisabilité.

De plus quand Xo n'appartient pas à un ZCTi on dit aussi que Xo est un extérieur a ZCTi comme le terme extérieur et son opposé intérieur ont une connotation topologique, nous allons rappeler les définitions topologique de ces termes.

2.5.1.1 Projection d'un point à un hyperplan

Soit la zones de contraintes techniques de ZCTi délimitée par l'hyperplan $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi) et soit Xo un point-point décision quelconque.

On appelle projection de Xo sur l'hyperplan $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi), le point noté X'o tel que :

X'o appartient à $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi)

et $\overrightarrow{XoX'o}$ colinéaire au vecteur Ai.

X'o est donc l'intersection de $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi) avec la droite passant par Xo et de vecteur directeur Ai.

Mathématiquement cette droite est définie par :

$$X \in \mathbb{R}^n tqX = Xo + \alpha Ai, \alpha \in \mathbb{R}$$

L'intersection s'écrit donc,

X'o=Xo+∝Ai

$$< Ai, X'o >= bi$$
$$< Ai, Xo + \alpha Ai >= bi$$
$$< Ai, Xo > + \alpha < Ai, Ai >= bi$$
$$\Rightarrow \alpha < A_i, A_i >= b_i \ - < A_i, X_0 >$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{b_i \ - \ < A_i, X_0 >}{< A_i, A_i >}$$

Finalement, on a :

$$X_0 = X_0 + \left[\frac{b_i - < A_i, X_0 >}{< A_i, A_i >} \right] A_i$$

De plus la distance est appelé, entre Xo et X'o noté d(Xo, X'o) est égal à :

$$d\left(Xo, X'o\right) = \left| \frac{bi - < Ai, Xo >}{< Ai, Ai >} \right| \sqrt{< Ai, Ai >}$$
$$d\left(Xo, X'o\right) = \left| \frac{bi - < Ai, Xo >}{\sqrt{< Ai, Ai >}} \right|$$

Cette distance est aussi appelé distance du point Xo a l'hyperplan $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi).

2.5.1.2 <u>Orientation du vecteur Ai par rapport à ZCTi</u>

Soit Xo un point de ZCTi qui n'appartient pas à l'hyperplan $HP\left(A_i, b_i\right)$:

$$Xo \in ZCTi \qquad et \qquad Xo \notin HP\left(A_i, b_i\right)$$

Soit X_0' la projection de Xo sur $HP\left(A_i, b_i\right)$ on a :

$$Xo' = Xo + \left(\frac{b_i - < A_i, X_o >}{< A_i, A_i >} \right) A_i$$
$$\overrightarrow{XoXo'} \left[\frac{b_i - < A_i, X_0 >}{< A_i, A_i >} \right] A_i$$

Le produit scalaire entre $\overrightarrow{XoXo'}$ et A_i donne :

$$< \overrightarrow{XoXo'}, A_i > = \left(\frac{b_i - < A_i, Xo >}{< A_i, A_i >} \right) < A_i, A_i >$$
$$< \overrightarrow{XoXo'}, A_i > = b_i - < A_i, Xo >$$

Or

$Xo \in ZCTi$ ce qui signifie :

$$< A_i, Xo > \leq b_i \quad \text{et} \quad X_0 \notin HP\left(A_i, b_i\right)$$

ce qui signifie $< A_i, Xo > \leq b_i$

Par conséquent on a :

$$< A_i, Xo > < b_i$$

D'où

$$b_i < A_i, Xo > \quad > 0$$

Finalement on obtient la relation suivante :

$$< \overrightarrow{XoXo'}, A_i > \quad > 0$$

D'où la proposition :

<u>Proposition</u> <u>2.1</u>

Le vecteur A_i est toujours orienté de l'intérieur vers l'extérieur de ZCTi

2.5.1.3 Orientation d'un vecteur décision par rapport à ZCTi

Soit V un vecteur décision, et soit ZCTi une zone de contraintes technique V est parallèle à $\mathcal{H}\wp$ (Ai, bi) c'est à dire à la frontière de ZCTI

2.5.1.3.1 Orientation extérieure

On dit que V a une orientation extérieure par rapport à ZCTi si < V, Ai > est strictement positif.

2.5.1.3.2 Orientation parallèle

On dit que V a une orientation parallèle par rapport à ZCTi, si < V, Ai > est égal à 0.

Remarque :

La qualification « parallèle » se réfère au fait que V est parallèle à $\mathcal{H}\wp$ (Ai ; bi) , c'est-à-dire à la frontière ZCTi.

Conclusion

Cet article nous a permis de relater les éléments fondamentaux du Modèle topo-géométrique MZ sur la recherche des contraintes redondantes dans un problème de programmation linéaire. Les propriétés géométriques sont incontournables dans cette démarche et nous ont permis de proposer des définitions et de dégager quelques propositions.

Bibliographies

[1]. Zionts, S 1965, "Size reduction techniques of linear programming and their applications", Ph.D. Thesis, Carnegie Institute of Technology.

[2] T. Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on post optimal analysis," *E u rop e a n J o u r n a l of O p e r a t i o n a l R e s e a rch*, vol. 60, pp. 315–326, 1979.

[3] A. L. Brearley, G. Mitra, and H. P. Williams, "Analysis of mathematical programming problems prior to applying the simplex algorithm," *M a t h e m a t i c a l P ro g r a m m i n g*, vol. 8, pp. 54–83, 1975.

[4]J. Lisy, "Metody pro nalezini redundantnich omezeni vulohach linerniho programovani. Ekonomicko, MatematicS," *Obzor*, vol. 7, no. 3, pp. 285–298, 1971.

[5] N. V. Stojkovic and P. S. Stanimirovic, "Two direct methods in linear programming,"´ *European Journal of Operational Research*, vol. 131, no. 2, pp. 417–439, 2001.

[6] J. Telgen, "Identifying redundant constraints and implicit equalities in system of linear constraints," *Management Science*, vol. 29, no. 10, pp. 1209–1222, 1983.

[7]P. O. Gutman and I. Isolovich, "Robust redundancy determination and evaluation of the dual variables of linear programming problems in the presence of uncertainty, on the generalized wolf problem: preprocessing of nonnegative large scale linear programming problems with group constraints," *Te c h n i o n - I s r a e l I n s t i t u t e o f Te c h n o l o g y*, vol. 68, no. 8, pp. 1401–1409, 2007.

[8]T. Gal, "Weakly redundant constraints and their impact on post optimal analysis," *E urop e a n J o u r n a l of O p e r a t i o n a l R e s e arch*, vol. 60, pp. 315–326, 1979.

[9] L.A.Tomlin and J.S Welch, “Finding duplicate rows in a linear programming model”, Operations Research Letters, vol. 5, no. 1, pp.7-11, 1986.

[10] S.Paulraj and P.Sumathi, “A Comparative Study of Redundant constraints Identification Methods in Linear Programming Problems”, Mathematical Problems in Engineering, Hindawi Publishing Corporation, Article ID 723402, 2010.