

**Synthèse d'une loi de commande non linéaire par la méthode « backstepping intégrateur »
d'un système de suspension hydraulique d'un véhicule**

RASOAMANANA R. A.¹, RANDRIAMITANTSOA P. A.², RANDRIAMITANTSOA A. A.³

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Laboratoire de Recherche en Télécommunication, Automatique, Signal et Images (LR-TASI)

Ecole Supérieure Polytechnique - Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso – Antananarivo 101 – Madagascar

¹rasoamananaradoniaina@gmail.com, ²rpauguste@gmail.com, ³andriau23@gmail.com

Résumé : Cet article contribue à l'élaboration d'un algorithme pour les systèmes non linéaires basés sur la commande « backstepping » mais dans le cadre des systèmes avec intégrateur. Ce dernier provoque des non linéarités importantes dans les systèmes. L'algorithme que nous avons développé est basé sur la commande Backstepping, le théorème de LaSalle-Yoshizawa, le théorème de LaSalle et la fonction de contrôle de Lyapunov [1][2][3][4]. A l'aide de ces bases mathématiques et automatiques, l'algorithme a été développé pour le cas d'un seul intégrateur. Ensuite, nous le généraliserons pour le cas de plusieurs intégrateurs. Nous avons simulé notre algorithme sur une suspension hydraulique d'un véhicule qui est un système non linéaire et dont l'équation possède un intégrateur.

Mots clés : Backstepping, intégrateur, non-linéaire, loi de commande.

Abstract : This article contributes to the development of an algorithm for nonlinear systems with « backstepping » control in the context of systems with integrator. The latter causes significant nonlinearities in the systems. The algorithm is developed with Backstepping, LaSalle-Yoshizawa's theorem, LaSalle's theorem and Lyapunov's control function [1][2][3][4]. Based on accurate calculations and automation rules, the algorithm is developed in the case of a single integrator. And then it is generalized in the cases of several integrators. We simulated our algorithm on the hydraulic suspension of a vehicle that is a non-linear system including an integrator in its equation.

Keywords : Backstepping, integrator, non-linear, control law.

1. Introduction

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes non

linéaires. Dans cet article, nous avons alors choisi d'utiliser la méthode « Backstepping ». Cette dernière est puissante dans la commande des systèmes non linéaires, pour la stabilisation des systèmes avec un ou plusieurs intégrateurs.

Dans un premier temps, nous allons développer l'algorithme avec un seul intégrateur. Ensuite, nous allons le généraliser afin de trouver la solution dans le cas d'une chaîne d'intégrateur. En dernier lieu, nous allons faire une simulation de l'algorithme sur un système de suspension hydraulique d'un véhicule.

2. Description du système et hypothèses

Considérons le système défini par :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

avec

- x est une variable d'état $x \in R^n$
- u est la variable d'entrée de contrôle $u \in R$

Hypothèse 1 : Il existe une loi de commande en boucle fermée continuellement dérivable :

$$u = \alpha(x) \text{ tel que } \alpha(0) = 0 \quad (2)$$

Hypothèse 2 : Il existe une fonction radialement non bornée, lisse, et définie positive $V: R^n \rightarrow R$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\alpha(x)] &\leq -W(x) \\ &\leq 0, \quad \forall x \in R^n \end{aligned} \quad (3)$$

avec

- $W: R^n \rightarrow R$ est une fonction semi-définie positive

Sous ces hypothèses, la loi de commande définie par l'équation (2) garantit la limite globale de $x(t)$ et via le Théorème de LaSalle-Yoshizawa la régulation de $W(x(t))$ est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (4)$$

Une convergence absolue est obtenue en utilisant le théorème de LaSalle avec $\Omega = R^n$: la fonction $x(t)$ converge vers le plus large ensemble invariant M contenu dans un ensemble $E = \{x \in R^n / W(x) = 0\}$. D'où, si $W(x)$ est définie positive, la loi de commande définie par l'équation (2) rend le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation (1) stable asymptotiquement globale.

3. Commande « Backstepping » avec intégrateur

Considérons le système défini par l'équation (1) augmenté par un intégrateur :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi \quad (5a)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (5b)$$

Et supposons que l'équation (5a) satisfait l'hypothèse 1 et 2 avec comme commande $\xi \in R$.

Lemme 1 :

- Si la fonction $W(x)$ est définie positive alors,

$$V_1(x, \xi) = V(x) + \frac{1}{2}[\xi - \alpha(x)]^2 \quad (6)$$

est la fonction de contrôle de Lyapunov du système complet défini par l'équation (5). Il existe alors une loi de commande $u = \alpha_1(x, \xi)$ qui rend $x = 0$ et $\xi = 0$ un point d'équilibre stable asymptotiquement globale du système (5).

La loi de commande est donnée par :

$$u = -k(\xi - \alpha(x)) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x)[f(x) + g(x)\xi] - \frac{\partial V}{\partial x}(x)g(x), \quad k > 0 \quad (7)$$

- Si $W(x)$ est semi-définie positive, alors il existe une loi de commande qui rend la dérivée de la fonction de contrôle de Lyapunov $\dot{V}_1 \leq -W_1(x, \xi) \leq 0$ tel que $W_1(x, \xi) > 0$ quand $W(x) > 0$ ou $\xi \neq \alpha(x)$. Ceci garantit une limite globale et une convergence de $\begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$ vers la plus

large ensemble invariant M_a contenu dans l'ensemble $E_a = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in R^{n+1} / W(x) = 0, \xi = \alpha(x) \right\}$.

Remarque 1 :

Il est vital de faire une remarque importante sur le choix de la loi de commande (7), c'est à dire la simplification de la loi de commande, car ceci peut impliquer une commande non désirable. Cette simplification implique une annulation de quelque non linéarité qui peut être utile.

4. Commande « Backstepping » avec chaîne d'intégrateur

Soit le système défini par l'équation (1) qui satisfait l'hypothèse 1 et 2 avec $\alpha(x) = \alpha_0(x)$ augmenté d'une k -chaîne d'intégrateur.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ &\dots \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \xi_k \\ \dot{\xi}_k &= u \end{aligned} \quad (8)$$

Pour ce système défini par l'équation (8), l'application répétée du lemme 1 avec ξ_1, \dots, ξ_k comme une commande virtuelle nous donne la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_1(x, \xi_1, \dots, \xi_k) = V(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\xi_i - \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1})|^2 \quad (9)$$

Tout choix de la loi de commande qui rend $\dot{V}_1 \leq -W_1(x, \xi_1, \dots, \xi_k) \leq 0$, avec

$W_1(x, \xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ seulement si $W(x) = 0$,

et $\xi_i \neq \alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i = 1, \dots, k$

garantit que $[x^T(t), \xi_1(t), \dots, \xi_k(t)]^T$ est globalement limitée et converge vers le plus large ensemble invariant contenu dans un ensemble

$$E_a = \{[x^T, \xi_1, \dots, \xi_k]^T \in \mathbb{R}^{n+k} \mid W(x) = 0, \xi_i =$$

$$\alpha_{i-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}), i = 1, \dots, k.$$

De plus, si $W(x)$ est définie positive, et si $x = 0$ peut être rendu stable asymptotiquement globale à travers ξ_1 , alors, l'équation (9) est une fonction de contrôle de Lyapunov du système défini par l'équation (8) et le point d'équilibre $x = 0, \xi_1 = \dots = \xi_k = 0$ peut être rendu stable asymptotiquement globale à travers u .

5. Application et mise en équation

Dans la modélisation d'une suspension d'un véhicule, notre objectif est de minimiser l'accélération verticale du châssis du véhicule pour le confort du passager et en même temps maximiser le contact pneu-bitume. Depuis quelques années, les fabricants de voiture ont développé un système de suspension active avec des

actuateurs hydrauliques mis en parallèle avec les systèmes de suspension habituelle.

Considérons le système de suspension d'une voiture décrit par la figure 1 suivante :

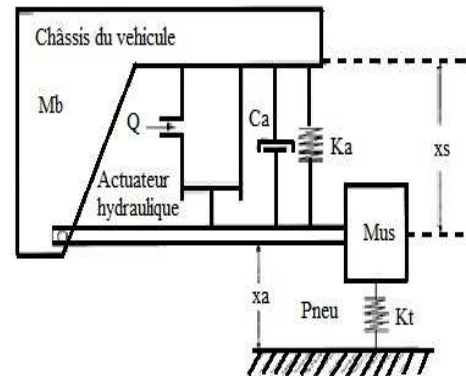


Figure 1 : Suspension d'un véhicule [5]

Avec

- Q est le débit de fluide dans l'actuateur hydraulique
- x_s distance pneu-châssis
- La roue est modélisée par une masse M_{us} avec un amortisseur K_t
- C_a coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur
- K_a constante de raideur du ressort
- M_b masse du véhicule

La configuration de la figure 1 nous montre que l'actuateur hydraulique est mis en parallèle avec un amortisseur C_a et un ressort K_a .

Remarque 2 : Nous nous intéressons principalement sur l'actuateur hydraulique, étant donné que les autres sont mis en parallèle.

Le débit de fluide Q est commandé par l'ouverture d'une vanne commandée par un courant. Ceci est modélisée par un système non linéaire du premier ordre avec comme entrée un courant i_v et d'une vanne ouverte d_v comme sortie

$$\dot{d}_v = -c_v d_v + k_v i_v \quad (10)$$

Le débit Q est proportionnel au produit de l'ouverture de la vanne et la racine carré de la dérivée de la pression le long de la vanne. Nous pouvons alors envisager une vanne beaucoup plus perfectionnée qui annule effectivement la non linéarité causée par la racine carré et qui rend la dynamique courant-débit linéaire :

$$\dot{Q} = -c_f Q + k_f i_v \quad (11)$$

Dans la configuration parallèle de la figure 1, en négligeant les fuites et la compressibilité, le débit Q est lié à la variation de la suspension x_s à travers :

$$\dot{x}_s = \frac{1}{A} Q \quad (12)$$

Avec A comme surface effective du piston.

Nous allons maintenant appliquer la commande backstepping, avec le débit Q comme commande virtuelle.

En appliquant le lemme 1 avec comme fonction de contrôle de Lyapunov :

$$V(x_s) = \frac{1}{2} x_s^2 \quad (13)$$

Donc, la dérivée de l'équation 13 nous donne :

$$\dot{V}(x_s) = x_s \dot{x}_s = \frac{x_s}{A} Q \quad (14)$$

Alors que la dérivée de la fonction de contrôle de Lyapunov doit être négative pour assurer la stabilité du système. Alors,

$$\frac{x_s}{A} Q_{des} = -c_1 x_s^2 - k_1 x_s^4 \quad (15)$$

$$Q_{des} = \alpha(x_s) = -A[c_1 x_s + k_1 x_s^3] \quad (16)$$

Le terme non linéaire $k_1 x_s^3$ est négligeable quand $|x_s|$ est petit mais s'accroît très rapidement quand $|x_s| \geq k_1^{\frac{1}{3}}$

Notons par z la variation de Q de sa valeur désirable (variable d'erreur) tel que :

$$z = Q - \alpha(x_s) \quad (17)$$

A partir des équations (16) et (17), l'équation (12) devient :

$$\dot{x}_s = -c_1 x_s - k_1 x_s^3 + \frac{1}{A} z \quad (18)$$

En utilisant l'équation (11), alors,

$$\dot{z} = -c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q \quad (19)$$

Choisissons maintenant une autre fonction de contrôle de Lyapunov tel que :

$$V_a = V(x_s) + \frac{1}{2} z^2 \quad (20)$$

En dérivant V_a et à l'aide de l'équation (14), nous obtenons :

$$\dot{V}_a = x_s \dot{x}_s + z[-c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q] \quad (21)$$

En utilisant l'équation (18), on a :

$$\dot{V}_a \leq x_s[-c_1 x_s - k_1 x_s^3 + \frac{1}{A} z] + z[-c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q] \quad (22)$$

$$\dot{V}_a \leq -c_1 x_s^2 - k_1 x_s^4 + z[-c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q + \frac{1}{A} x_s] \quad (23)$$

Pour que les équations (22) et (23) soient négatives, il faut que :

$$-c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q + \frac{1}{A} x_s = -c_2 z \quad (24)$$

avec $c_2 > 0$

Pour la simplification, nous choisissons $c_2 = c_f$, d'où l'équation (24) devient :

$$-c_f Q + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q + \frac{1}{A} x_s = -c_f z \quad (25)$$

En utilisant l'équation (17), on a

$$-c_f(z + \alpha) + k_f i_v + (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q + \frac{1}{A} x_s = -c_f z \quad (26)$$

Donc, tirons maintenant la loi de contrôle du courant i_v :

$$i_v = \frac{1}{k_f} [c_f \alpha(x_s) - \frac{1}{A} x_s - (c_1 + 3k_1 x_s^2) Q] \quad (27)$$

Laquelle stabilise le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= -c_1 x_s - k_1 x_s^3 + \frac{1}{A} z \\ \dot{z} &= -c_f z - \frac{1}{A} x_s \end{aligned} \quad (28)$$

On peut apercevoir qu'en utilisant l'équation (27) la dérivée de $V_a = \frac{1}{2}(x_s^2 + z^2)$ est définie négative car $\dot{V}_a = -c_1 x_s^2 - k_1 x_s^4 - c_f z^2$. Le système non linéaire en boucle fermée défini par l'équation (28) est stable asymptotiquement globale et possède la propriété désirée de devenir raide quand $|x_s|$ augmente.

6. Simulation

Remarque 3 : Durant toute notre simulation :

- Nous allons choisir arbitrairement la valeur des paramètres utiles dans la loi de commande. Pour des raisons de simplicité du modèle, nous allons

choisir les paramètres : $c_1 = c_2$ égale à 1, car ce sont des paramètres qui doivent être tout simplement positifs.

Comme $c_f = c_2$ à partir de l'équation (25) d'où $c_f = 1$.

Nous allons choisir arbitrairement $k_f = 1$ pour simplifier l'équation (11).

Comme il a été statué plus haut que pour $|x_s| \geq k_1^{\frac{1}{3}}$ la non linéarité est importante. Alors nous allons choisir arbitrairement $k_1 = 0,1$. Avec cette valeur, la non linéarité est importante pour observer l'action du « backstepping » intégrateur. C'est d'ailleurs le but de notre simulation.

A est la surface effective du piston, donc, nous allons choisir un piston de 20 cm^2 de surface. D'où les valeurs :

$$k_f = 1 ; c_f = 1 ; c_1 = 1 ; k_1 = 0,1 ; A = 20 \text{ cm}^2$$

- La variation de niveau de la suspension x_s est prise comme variable d'entrée et la valeur de la pression Q est la variable de sortie.
- Valable pour toutes les figures dans notre simulation, le signe de la pression Q dépend du sens de la pression. Le choix du sens positif est celui montré sur la figure 1.

A partir des équations (11) et (27), la modélisation sous Matlab/Simulink du système est donnée par la figure 2 suivante :

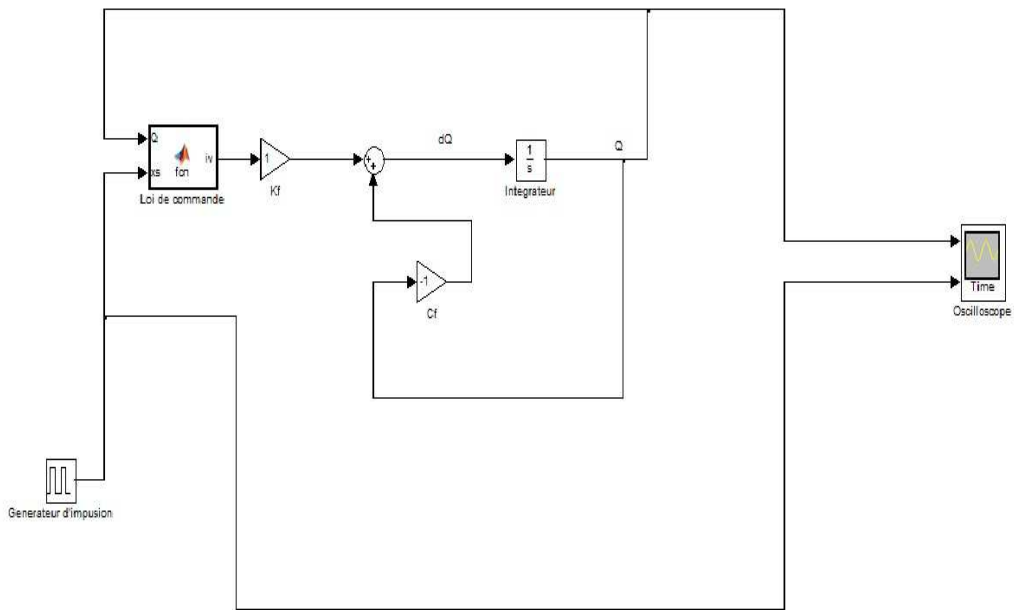


Figure 2 : Modélisation du système sous Matlab/Simulink

6.1. Réponse impulsionnelle

Nous allons appliquer une impulsion de hauteur 20cm à l'entrée x_s au temps $t = 0s$. Cette entrée est illustrée par la figure (3) suivante :

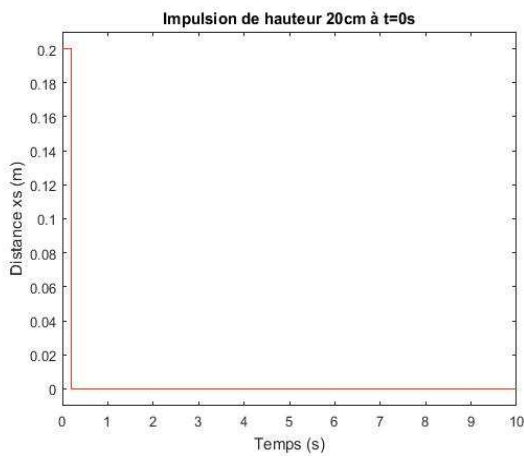


Figure 3 : Impulsion de hauteur 20cm

La réponse du système face à cette entrée est illustrée à la figure 4 suivante :

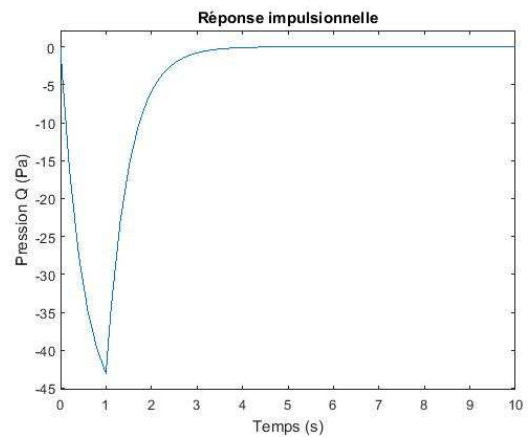


Figure 4 : Réponse impulsionnelle du système

Nous pouvons apercevoir sur la figure (4) que, pour une application d'une impulsion de 20cm de hauteur sur la suspension à l'instant $t = 0$ (figure 3), la pression Q subit une variation brusque d'une valeur de -43Pa. Le système revient au repos après 2,7s, donc, on peut conclure qu'il est stable.

6.2. Réponse indicielle

Nous allons maintenir à 10cm la valeur du niveau de la suspension x_s . Cette entrée est exprimée par la figure (5) ci contre.

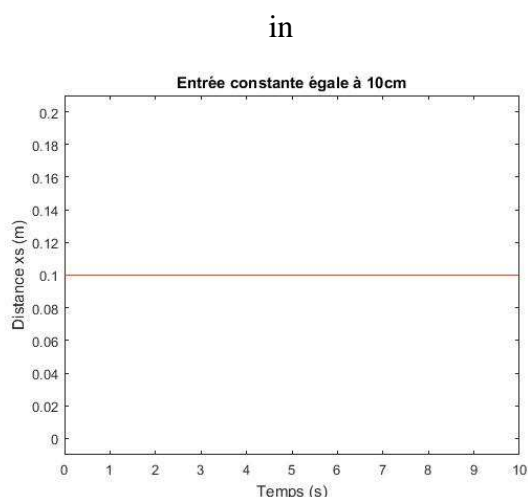


Figure 5 : Entrée x_s constante égale à 10cm

La réponse du système face à cette entrée est illustrée par la figure 6 suivante :

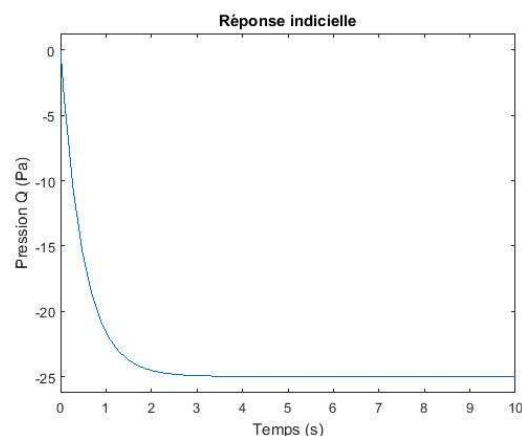


Figure 6 : Réponse indicielle du système

Nous pouvons apercevoir sur la figure (6) que pour une valeur constante de l'entrée, la pression Q est maintenue constante. Le régime permanent est obtenu au bout de 2s. Cette valeur correspond donc au temps de montée du système.

Le gain statique du système peut être calculé par :

$$K = \frac{\Delta Q}{\Delta x_s} = \frac{25 - 0}{0,1 - 0} = 250$$

Donc le gain statique du système est égal à 250.

6.3. Réponse en vitesse

Nous allons appliquer une rampe d'une pente de 5% pour la valeur du niveau de la suspension x_s . Cette entrée est exprimée par la figure (7) ci-contre.

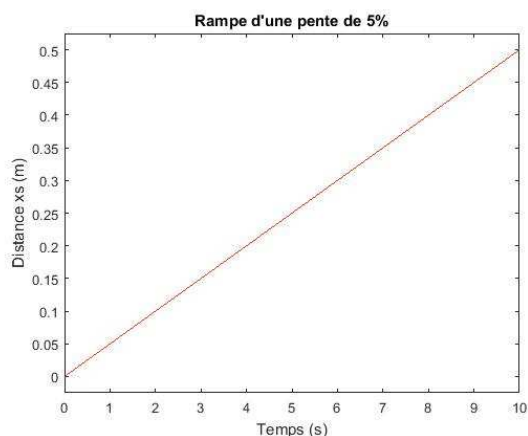


Figure 7 : *Rampe d'une pente de 5% en entrée*

La réponse du système face à cette entrée est illustrée par la figure (8) suivante :

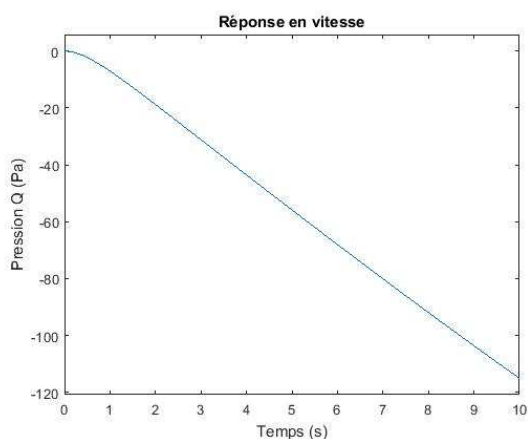


Figure 8 : *Réponse en vitesse du système*

Nous pouvons apercevoir sur la figure (8) que la valeur de la pression évolue en fonction de la valeur de x_s . On voit tout de suite que, comme le gain statique K est différent de 1, alors la sortie ne suit pas l'entrée. L'écart s'agrandit régulièrement et à la limite devient infini. Donc, on peut

conclure que le système ne suit pas en vitesse.

7. Conclusion

Cet article nous a permis d'étudier la synthèse d'une loi de commande par la méthode analytique. Nous avons utilisé la méthode connue sous le nom de « Backstepping » pour les systèmes avec un ou plusieurs intégrateurs. Ces intégrateurs sont très fréquents en milieu industriel alors qu'ils sont source d'instabilité importante. Nous avons donc ainsi contribué à l'élaboration d'une méthode très intéressante en milieu industriel par la sécurité du système, la facilité de synthèse et le gain en temps considérable.

Notre première contribution est portée sur l'élaboration d'une méthode qui permet de sécuriser le système considéré en milieu industriel. Notre méthode ne nécessite que la connaissance des équations différentielle régissant le système considéré. Notre système ne subit donc pas des tests qui peuvent produire des effets désastreux et irréversibles.

Nous avons aussi contribué à l'élaboration d'une méthode qui facilite la synthèse de la loi de commande pour les systèmes non linéaires. En effet, notre méthode consiste à faire une itération en fonction du nombre

d'intégrateur dans le système. Elle est basé sur la détermination de la fonction de contrôle de Lyapunov et détermine la loi de commande pour rendre négative la dérivée de celle-ci.

Bien que les approches proposées soient relativement performantes, elles ne sont pas suffisantes pour les cas réels en milieu industriel. En effet, dans le cas réel, l'équation du système présente souvent des incertitudes, d'où la nécessité de rendre notre commande robuste.

8. Référence

- [1] A. R. Bebaskeur, « *Aspect de l'application du Backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires* », Université de Laval, Faculté de science et de génie, Février 2000
- [2] M. Malisoff, F. Mazenc, « *Constructions of strict Lyapunov functions* », communication and control engineering, Springer, 2009
- [3] A. N. Michel, L. Hou, D. Liu, « *Stability of dynamical systems* », Birkhäuser, 2008
- [4] P. Giesl, « *Construction of global Lyapunov functions using radial basis functions* », Springer, 2007
- [5] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, « *Non linear and adaptive control design* », JohnWiley & sons inc, 1995