

**Contribution à la modélisation et à la commande robuste
a temps continu d'un avion souple**

Ranarison S.H.¹, Randriamitantsoa P.A.², Randriamitantsoa A.A.³, Reziky Z.S.H.Z.T.⁴

Laboratoire de Recherche en Télécommunication, d'Automatique, de Signal et d'Images
(LR-TASI)

Ecole Doctorale en Science et Technique de l'Ingénierie et de l'Innovation
(ED-STII)

Université d'Antananarivo

BP 1500, Ankatso-Antananarivo 101 – Madagascar

¹ranarisonmendrika@gmail.com, ²rpauguste@gmail.com, ³andriau23@gmail.com, ⁴zojaona@yahoo.fr

Résumé

C'est article utilise la méthode d'Hamilton pour déterminer les équations de vol d'un avion souple. Le but c'est de synthétiser des contrôleurs par l'algorithme H_∞ et de la loop-shaping. La méthode μ est utilisée pour analyser le système et le ν – gap pour comparer les contrôleurs.

Mots clés : Hamilton, modélisation, commande robuste, avion souple, μ -synthèse

Abstract

This paper use the Hamilton method to derive the equation of motion of a flexible aircraft. The purpose is to design a robust controller with the H_∞ and the loo-shaping methods. The μ method is used to analysis the system and the ν – gap to compare the controllers.

1 Introduction

Le mouvement d'un avion souple est plus difficile à modéliser qu'un avion rigide. La flexibilité de structure augmente les paramètres de l'équation. La dimension des matrices d'état complique la synthèse d'une commande.

Cet article focalise seulement son étude sur le vol longitudinal d'un avion

souple.

2 Equation de mouvement

La fonction de Lagrange est définie par :

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{U} \quad (1)$$

Et la fonction d'Hamilton par [1] :

$$\mathbf{H} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{L} \quad (2)$$

où \mathbf{q} désigne le coordonné généralisé, \mathbf{T} l'énergie cinétique, \mathbf{U} l'énergie potentielle et \mathbf{p} est donnée par :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (3)$$

Les équations de mouvement s'établissent à partir des équations canoniques d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (4)$$

où \mathbf{Q} est la force généralisée appliquée au système.

M_i : La masse généralisée de la i -ème mode de vibration.

Pour un avion souple de la figure 1, les équations des énergies sont [2][3] :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) \\ &+ \frac{1}{2} [p \quad q \quad r] [I] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\eta}_i^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \eta_i^2 M_i$$

$$\mathbf{U}_g = [mg \sin \theta \quad -\sin \phi \cos \theta \quad -\cos \phi \cos \theta] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$[u \ v \ w]^T$: Vecteur vitesse;

$[p \ q \ r]^T$: Vecteur vitesse angulaire;

m : La masse de l'aéronef;

g : L'accélération de la pesanteur;

η_i : Le coordonné généralisé de la i -ème mode de vibration;

ω_i : La pulsation de la i -ème mode de vibration;

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} : Les moments d'inertie;

I_{xy}, I_{yz} : Les produits d'inertie;

ϕ, θ : Les angles de roulis et de tangage ;

U_e : Energie potentielle élastique;

U_g : Energie potentielle de la pesanteur.

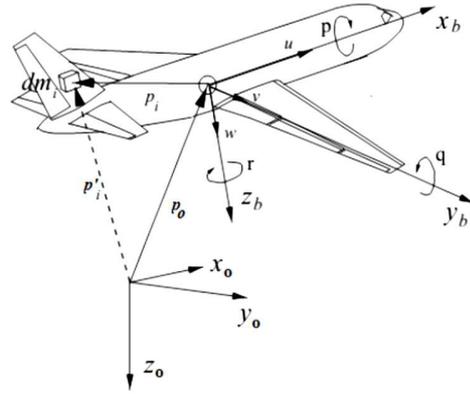


Figure 1 : Modèle d'un avion souple.

La fonction de Lagrange pour le système est alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} [p \quad q \quad r] [I] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\eta}_i^2 - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \eta_i^2 M_i - [mg \sin \theta \quad -\sin \phi \cos \theta \quad -\cos \phi \cos \theta] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

Et l'équation d'Hamilton est :

$$\mathbf{H} = m\dot{x} + m\dot{y} + m\dot{z} - \frac{1}{2}m(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}[p \quad q \quad r][I] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \dot{\eta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \eta_i^2 M_i + [mg \sin \theta \quad -\sin \phi \cos \theta \quad -\cos \phi \cos \theta] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

On obtient les équations de mouvement longitudinal en appliquant les équations canoniques d'Hamilton :

$$\begin{cases} m[\dot{u} - rv + qw + g \sin \theta] = X \\ m[\dot{w} - qu + pv - g \cos \phi \cos \theta] = Z \\ \dot{q}I_{yy} - (\dot{p}I_{xy} + \dot{r}I_{yz}) + (I_{xx} - I_{zz})pr + (pI_{yz} - rI_{xy})q + (p^2 - r^2)I_{xz} = M \\ \ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = \frac{Q_i}{M_i} \end{cases} \quad (8)$$

X , Y désignent les forces longitudinale et normale, et M le moment de tangage.

3 Equation d'état

Pour un seul mode de vibration et une hypothèse sur certains paramètres, l'équation d'état du système linéaire est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\eta} \\ \dot{\tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X}_u & \dot{X}_\alpha & -g & \dot{X}_q & 0 & 0 \\ \dot{Z}_u & \dot{Z}_\alpha & 0 & \dot{Z}_q & \dot{Z}_\eta & \dot{Z}_\eta \\ \dot{U}_0 & \dot{U}_0 & 0 & \dot{U}_0 & \dot{U}_0 & \dot{U}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dot{M}_u & \dot{M}_\alpha & 0 & \dot{M}_q & \dot{M}_\eta & \dot{M}_\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{\tilde{\Pi}}_u & \dot{\tilde{\Pi}}_\alpha & 0 & \dot{\tilde{\Pi}}_q & \dot{\tilde{\Pi}}_\eta - \omega^2 & \dot{\tilde{\Pi}}_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ \theta \\ q \\ \eta \\ \tilde{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{X}_\tau & \dot{X}_{\delta_E} \\ \dot{Z}_\tau & \dot{Z}_{\delta_E} \\ \dot{U}_0 & \dot{U}_0 \\ 0 & 0 \\ \dot{M}_\tau & \dot{M}_{\delta_E} \\ 0 & 0 \\ \dot{\tilde{\Pi}}_\tau & \dot{\tilde{\Pi}}_{\delta_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\tau \\ \delta_E \end{bmatrix} \quad (9)$$

- $x^T = [u \quad \alpha \quad \theta \quad \dot{\theta} = q \quad \eta \quad \dot{\eta}]$: Le vecteur d'état;
- $[\delta_\tau \quad \delta_E]^T$: La commande de propulsion et l'élèveur;
- (7) U_0 : La vitesse longitudinale d'équilibre;
- $\ddot{\Pi}$: La notation condensée de $\frac{Q_i}{M_i}$;
- $\dot{X}, \dot{Z}, \dot{M}$: Les notations des dérivées de X, Z et M ;

Le diagramme de simulation de vol longitudinal d'un avion souple est illustré sur la figure 2.

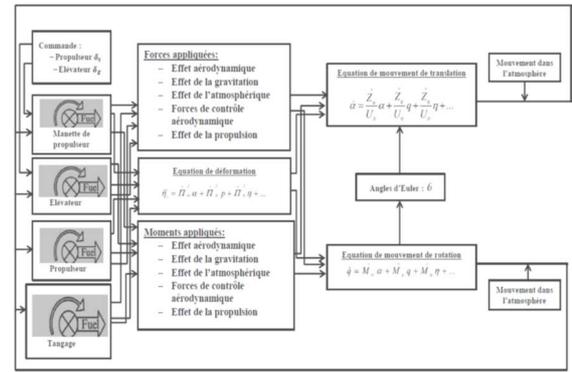


Figure 2 : Le diagramme de simulation de vol longitudinal d'un avion souple.

4 Synthèses

4.1 Synthèse H_∞

Le problème c'est de synthétiser un contrôleur K pour un système P (Figure 3) [4]. On l'obtient en minimisant

$$\|F_l(P, K)\|_\infty, \text{ soit :}$$

$$\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (10)$$

$\|F_l(P, K)\|_\infty$: La transformation linéaire fractionnaire inférieure de P et K , fonction de transfert de w pour z ;

γ : Un réel fixe.

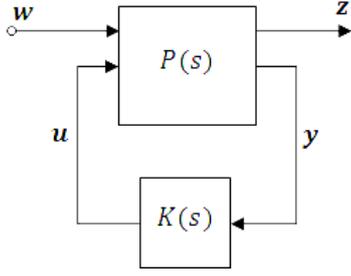


Figure 3: Interconnexion standard pour la synthèse H_∞ .

4.2 Synthèse par loop-shaping

La procédure par loop-shaping consiste à modéliser un système nominal par un précompensateur W_1 et/ou un postcompensateur W_2 . Le contrôleur sera obtenu en minimisant la norme la marge de stabilité de McFarlan et de Glover, soit [5] :

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K_\infty \end{bmatrix} (I + P_s K_\infty)^{-1} \tilde{M}_s^{-1} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1} \quad (11)$$

avec $P_s = W_2 P W_1$ et ε une marge stabilité optimale ; $P_s = \tilde{M}_s^{-1} \tilde{N}_s$ est la factorisation copremière de P_s .

Le contrôleur final sera:

$$K = W_1 K_\infty W_2 \quad (12)$$

5 μ -analyse

On définit une matrice M de w pour z :

$$M = F_l(P, K) \quad (13)$$

La valeur singulière structurée de la matrice M est définie par :

$$\mu_\Delta = \frac{1}{\min[\sigma(\Delta) : \det(I - \Delta M) = 0]} \quad (14)$$

$\bar{\sigma}$ dénote la valeur singulière supérieur et Δ un ensemble d'incertitudes

Le système nominal sera jugé performant si et seulement si:

$$\sup \mu_\Delta(M_{22}) < 1 \quad (15)$$

Le système sera jugé robuste en stabilité si et seulement si:

$$\sup \mu_\Delta(M_{11}) < 1 \quad (16)$$

Le système sera jugé robuste en performance si et seulement si:

$$\sup \mu_\Delta(M) < 1 \quad (16)$$

6 ν - gap

Le ν - gap métrique est défini par la distance entre le comportement de deux processus en boucle fermée [6].

$$\delta_\nu(G_1, G_2) = \begin{cases} \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{M}_2 & \tilde{N}_2 \\ \tilde{M}_1 & \tilde{N}_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ \text{if } \det \left(\begin{bmatrix} \tilde{N}_2 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix} \right) \\ \text{et } \text{wnodet} \left(\begin{bmatrix} \tilde{N}_2 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \text{I ailleurs} \end{cases} \quad (17)$$

$G_i = N_i M_i^{-1} = \tilde{M}_i^{-1} \tilde{N}_i$: La factorisation copremière normalisée à droite (à gauche) de la matrice.

wno est défini comme le nombre d'encerclément de l'origine par le diagramme de Nyquist.

7 Simulation

On utilise comme objet d'étude l'avion souple dénommé « large high-speed ». Le diagramme des valeurs singulières du système atteint son maximum de 80 dB à 0,356 rad/s, donc la nécessité de synthétiser d'un correcteur pour le système (Figure 4).

Le contrôleur est synthétisé à partir de la boucle ouverte de la figure 4. Le système est perturbé par une incertitude non structurée de forme additive. L'objectif est de trouver un correcteur qui rend le système robuste en stabilité qu'en performance.

Les pondérations sont choisies pour avoir une rejection maximale de perturbation et pour minimiser l'effet de bruit.

$$W_1 = 1,5 \frac{s+2}{3s+10}, W_2 = \frac{12,5}{s+10}$$

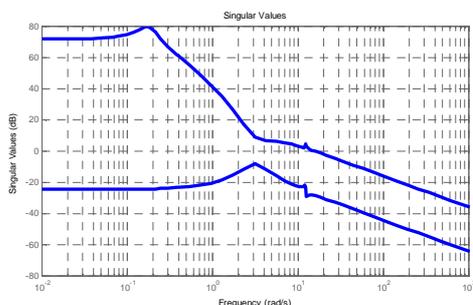


Figure 4: Diagramme des valeurs singulières.

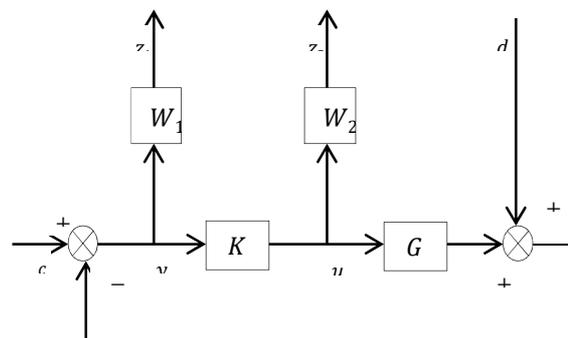


Figure 4: Système bouclé avec incertitude structurée de forme additive.

On obtient les contrôleurs par :

- H_{∞} :

$$K_H = \begin{bmatrix} \frac{h_{11}}{d_h} & \frac{h_{12}}{d_h} \\ \frac{h_{21}}{d_h} & \frac{h_{22}}{d_h} \\ \frac{h_{31}}{d_h} & \frac{h_{32}}{d_h} \\ \frac{h_{41}}{d_h} & \frac{h_{42}}{d_h} \end{bmatrix}$$

avec :

$$d_h = s^3 + 1,41s^2 + 0,4838s + 0,04285$$

$$h_{11} = 1,947.10^{-7} s^3 - 2,89.10^{-5} s^2 + 9,614.10^{-7} s + 1,91.10^{-7}$$

$$h_{12} = -2,345.10^{-6} s^3 + 0,0003394 s^2 - 6,505.10^{-6} s - 1,925.10^{-6}$$

$$h_{21} = -1,029.10^{-10} s^3 + 5,663.10^{-9} s^2 - 7,473.10^{-10} s - 7,442.10^{-11}$$

$$h_{22} = 4,165.10^{-10} s^3 - 6,775.10^{-8} s^2 + 7,231.10^{-9} s + 7,78.10^{-10}$$

$$h_{31} = 4,492.10^{-9} s^3 + 1,598.10^{-7} s^2 + 4,066.10^{-8} s + 1,987.10^{-9}$$

$$h_{32} = 1,33.10^{-8} s^3 - 1,773.10^{-6} s^2 - 4,542.10^{-7} s - 2,234.10^{-8}$$

$$h_{41} = 8,759.10^{-10} s^3 - 1,615.10^{-8} s^2 + 4,456.10^{-9} s + 3,662.10^{-10}$$

$$h_{42} = -4,752.10^{-9} s^3 + 1,983.10^{-7} s^2 - 4,543.10^{-8} s - 3,889.10^{-9}$$

- Loop-shaping:

$$K_L = \begin{bmatrix} \frac{l_{11}}{d_1} & \frac{l_{12}}{d_1} \\ \frac{l_{21}}{d_1} & \frac{l_{22}}{d_1} \\ \frac{l_{31}}{d_1} & \frac{l_{32}}{d_1} \\ \frac{l_{41}}{d_1} & \frac{l_{42}}{d_1} \end{bmatrix}$$

avec :

$$d_1 = s^3 + 1178s^2 + 3075s + 2968$$

$$l_{11} = 2,346.10^{-6} s^3 + 0,02839s^2 + 0,562s - 0,00102$$

$$l_{12} = -2,541.10^{-5} s^3 - 0,3548s^2 - 6,977s - 0,2226$$

$$l_{21} = -1,099.10^{-9} s^3 - 8,814.10^{-6} s^2 - 0,000182s - 2,992.10^{-5}$$

$$l_{22} = 1,253.10^{-8} s^3 + 0,0001101s^2 + 0,002254s + 0,0004336$$

$$l_{31} = -3,9.10^{-9} s^3 - 0,0004008s^2 - 0,007566s - 0,002176$$

$$l_{32} = -3,934.10^{-8} s^3 + 0,004978s^2 + 0,09351s + 0,02911$$

$$l_{41} = -2,964.10^{-9} s^3 - 6,189.10^{-5} s^2 - 0,00121s - 0,001066$$

$$l_{42} = 2,307.10^{-8} s^3 + 0,0007675s^2 + 0,01483s + 0,01324$$

Le v -gap métrique entre les deux contrôleurs est:

$$\delta_v(K_H, K_L) = 0,0024$$

Cette valeur montre que le comportement des deux contrôleurs est proche en boucle fermée.

La matrice de la boucle fermée pour la μ -analyse (figure 6) est telle que:

$$M = \begin{bmatrix} -W_2KS & W_2KS \\ -W_1S & W_1S \end{bmatrix}$$

où $s = [I + GK]^{-1}$.

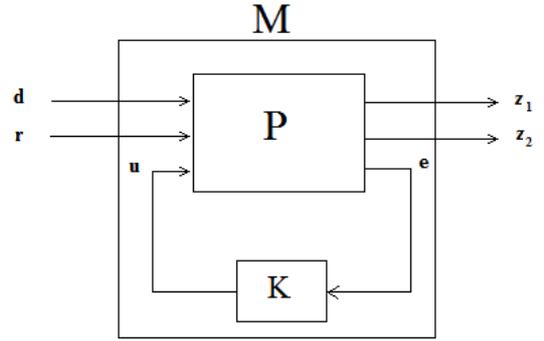


Figure 6: La matrice de la boucle fermée pour la μ -analyse.

L'intervalle de l'analyse est $[10^{-4}; 10^4]$ rad/s.

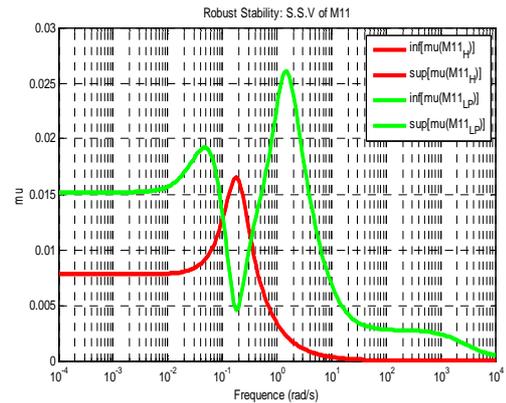


Figure 7: Analyse de la robustesse de stabilité.

Close-loop	ω_m (rad/sec)	$\max[\mu(M_{11})]$	Garantie de stabilité
K_H	0,1804	0,0165	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0,0165}$
K_{LP}	1.5167	0.0260	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0.0260}$

Table 1: Résultat de l'analyse de robustesse de stabilité.

La valeur supérieur de $\mu(M_{11})$ est inferieur a un pour les deux correcteurs (Tableau 1, figure 7). Cela signifie que quelque soit la perturbation la stabilité est garantie pour $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\mu(M_{11})}$. Pourtant la garantie de stabilité est large pour l'algorithme H_∞ .

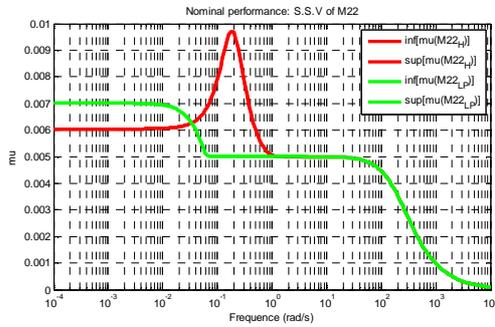


Figure 8: Analyse de la performance nominale.

Close-loop	ω_m (rad /sec)	$\max[\mu(M_{22})]$
K_H	0,1804	0,0097
K_{LP}	0,0001	0,0070

Table 2: Résultat de l'analyse de performance.

La valeur supérieur de $\mu(M_{22})$ est inferieur a un pour les deux correcteurs (Tableau 2, figure 8). Cela signifie que quelque soit la perturbation la performance nominale est achevée pour le système. Pourtant le système

est plus performant l'algorithme en loop shaping.

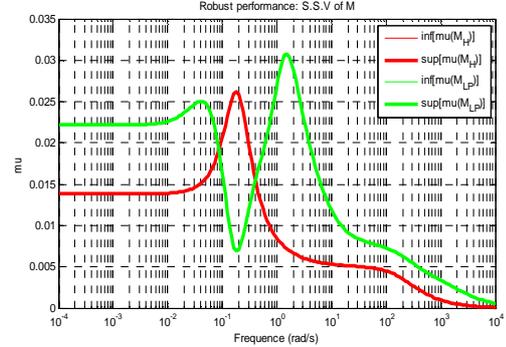


Figure 9: Analyse de la performance robuste.

Close-loop	ω_m (rad /sec)	$\max[\mu(M)]$	Garantie de performance
K_H	0,1804	0,0262	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0,0262}$
K_{LP}	1,5167	0,0307	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0,0307}$

Table 3: Résultat de l'analyse de la performance robuste.

La valeur supérieur de $\mu(M)$ est inferieur a un pour les deux correcteurs (Tableau 3, figure 9). Cela signifie que quelque soit la perturbation la performance est garantie pour $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\mu(M)}$. Pourtant la garantie de performance est large pour l'algorithme H_∞ .

8 Conclusion

L'avion souple dénommé « large high-speed » est instable. Les deux contrôleurs obtenues par les deux synthèses par H_∞ et

par loop shaping assurent la performance nominale, la robustesse en stabilité et en performance du système. En se référant au ν – gap le comportement de deux contrôleurs est proche en boucle fermée.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] L. Meirovitch, “Methods of Analytical Dynamics”, Hill, 1970. W.-K. Chen, Linear Networks and Systems. Belmont, Calif.: Wadsworth, pp. 123-135, 1993.
(Book style)
- [2] M.R. Waszak, D.K. Schmidt, “Flight Dynamics of Aeroelastic Vehicles”, Journal of Aircraft, 1988.
- [3] D.K. Schmidt, “Modern Flight Dynamics”, Hill, 2012.
- [4] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover, “Robust and Optimal Control”, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [5] K. Zhou, J. Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice Hall, 1999.
- [6] G. Vinnicombe, “Uncertainty and Feedback H_∞ loop-shaping and the ν – gap metric”, Imperial College Press, 2001.