

**Contribution à la modélisation de la commande robuste,  
de la mu-analyse de vol longitudinal et latéral de l'hélicoptère**

**Rabearivelo A. G.<sup>1</sup>, Andrianaharison Y.<sup>2</sup>, Randriamitantsoa P. A.<sup>3</sup>, Randriamitantsoa A. A.<sup>4</sup>,  
Reziky Z.S.H.Z.T.<sup>5</sup>**

Laboratoire de Recherche d'Electricité, Signaux et Automatique (LR-ESA)

Equipe d'Accueil Doctorale en Génie Electrique (EAD-GE)

Ecole Doctorale en Sciences et Techniques de l'Ingénierie et de l'Innovation (ED-STII)

Université d'Antananarivo

BP 1500 – Antananarivo 101 – Madagascar

<sup>1</sup>gericha407@yahoo.fr, <sup>2</sup>yvonkyo@gmail.com, <sup>3</sup>rpauguste@gmail.com, <sup>4</sup>andriau23@gmail.com, <sup>5</sup>zojaona@yahoo.fr

**Résumé:** - Le but de cet article est de présenter l'état de l'art qui concerne l'application des techniques de synthèse robuste des systèmes linéaires et mu-analyse de vol longitudinal et latéral de l'hélicoptère.

**Index Terms:-** Helicopter, state feedback control, state representation, robust control, mu-analysis.

**Abstract:-** The purpose of this article is to present the state of the art which concerns the application of robust synthesis techniques of linear systems and mu-analysis of longitudinal and lateral flight of the helicopter.

## **1 INTRODUCTION**

La commande robuste de l'hélicoptère est un type de commande qui vise à garantir les performances et la stabilité d'un système durant le vol face à des perturbations du milieu et les incertitudes du modèle et une tâche difficile puisque la dynamique du système est non linéaire, instable sur certaines plages de vol et présente une dynamique fortement couplée. En effet, le modèle mathématique qui modélise un système réel est une représentation qui vise à approximer au mieux, avec des hypothèses simplificatrices, le système qu'on veut commander.

## **2 METHODOLOGY**

En pratique, la modélisation établie n'est pas suffisamment précise pour traduire fidèlement le comportement d'un système. Souvent les concepteurs ont recours aux modèles avec incertitudes non structurées qui affectent généralement les dynamiques mal connues ou volontairement négligées.

### **2.1 Simulation du modèle de synthèse et d'analyse**

L'analyse de la robustesse est effectuée en incorporant toutes les incertitudes de modèle dans une seule matrice de transfert sans lui imposer de structure particulière. Dans cette étude, en supposant que plusieurs sources d'incertitudes de natures différentes coexistent, on adopte un système avec erreurs de modèle de forme additive directe. On tient compte alors de deux autres signaux d'entrées, appliquées à deux endroits différents de l'asservissement, et on surveille l'évolution des performances du système bouclé. Le problème se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires pour corriger le système en utilisant différentes méthodes de synthèses.

### 2.2 Commande robuste en vol longitudinal et latéral de l'hélicoptère

Les paramètres du système sont entachés d'incertitude paramétrique. Chaque coefficient incertain  $\tilde{p}_i$  est modélisé tel que :

$$\tilde{p}_i = p_i(1 + \omega_i \delta_i) , |\delta_i| < 1 \tag{1}$$

Où  $p_i$  est la valeur nominale du paramètre considéré et  $\omega_i$  le coefficient de pondération correspondant. On a choisit  $\omega_i = 0,2$  pour tous les paramètres.

Par transformation linéaire fractionnaire supérieur, on a :

$$\tilde{p}_i = [Q_{22} + Q_{21}\Delta_u(I - Q_{11}\Delta_u)^{-1}Q_{12}] \tag{2}$$

Soit :

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & p_i \\ \omega_i & p_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

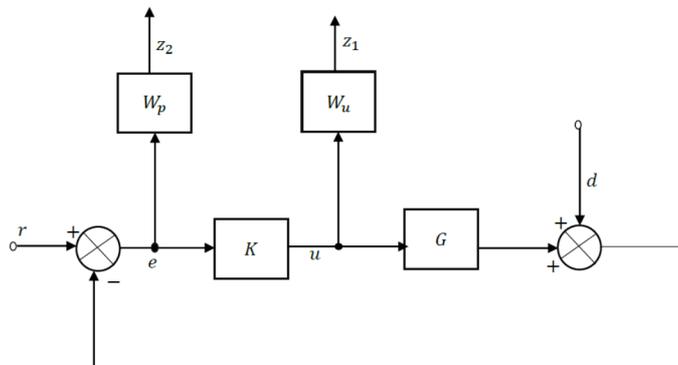
On adopte une erreur de modèle de forme additive directe pour la synthèse du correcteur pour ce système (Figure 1).

Dans notre cas, nous allons prendre comme fonction de pondération la fonction scalaire:

$$W_u = 10^{-7} \frac{(s + 10)}{10(s + 500)} \tag{4}$$

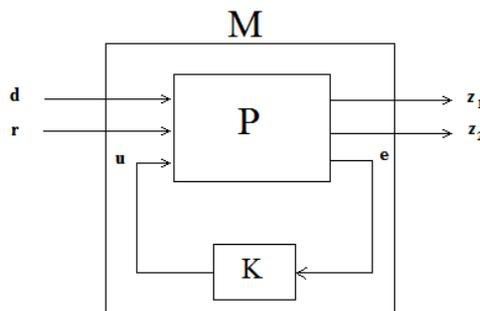
$$W_p = 10 \frac{(s + 5)}{10(5s + 1000)}$$

Pour atteindre la performance désirée, il est nécessaire de satisfaire l'inégalité  $\|W_u(I + G_{l0}K_{l0})^{-1}\|_\infty < 1$ . Ici, la fonction de pondération est une fonction scalaire, alors les valeurs singulières de la fonction de sensibilité  $(I + G_{l0}K_{l0})^{-1}$  sur toutes les plages de fréquence doivent être obtenues par la courbe de  $\frac{1}{W_u}$ . Cela signifie que  $\|W_u(I + G_{l0}K_{l0})^{-1}\|_\infty < 1$  si et seulement si toutes les fréquences  $\sigma[(I + G_{l0}K_{l0})^{-1}(jw)] < \left| \frac{1}{W_u(jw)} \right|$ .



**Fig.1. Schéma bloc d'un système asservi avec erreurs de modèle de forme additive directe pour la synthèse et l'analyse robuste.**

En isolant le correcteur K pour déterminer la matrice de l'interconnexion en boucle ouverte P et la matrice de transfert en boucle fermée M on a la figure 2 ci-dessous:



**Fig.2. Schéma bloc pour la distinction de la matrice M et de la matrice P.**

En considérant toutes ces hypothèses, on obtient comme des correcteurs en vol longitudinal et latéral par synthèse  $\|H\|_\infty$  après l'utilisation du modèle réduit :

$$K_{lo} = \begin{bmatrix} \frac{1,094 \cdot 10^{-4} s^3 - 1,163 \cdot 10^5 s^2 + 3,637 \cdot 10^7 s + 6,012 \cdot 10^7}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} & \frac{-0,353 s^3 - 3,906 \cdot 10^9 s^2 - 7,569 \cdot 10^{11} s - 7,819 \cdot 10^9}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} \\ \frac{-4,888 \cdot 10^{-5} s^3 - 3,64 \cdot 10^4 s^2 - 8,122 \cdot 10^6 s - 1,998 \cdot 10^7}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} & \frac{0,1577 s^3 + 2,509 \cdot 10^8 s^2 + 1,586 \cdot 10^{11} s - 9,413 \cdot 10^9}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} \\ \frac{1,15 \cdot 10^{-5} s^3 + 7810 s^2 + 1,498 \cdot 10^6 s + 1,206 \cdot 10^7}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} & \frac{-0,03708 s^3 - 7,172 \cdot 10^7 s^2 - 4,357 \cdot 10^{10} s + 1,265 \cdot 10^{10}}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} \\ \frac{-1,051 \cdot 10^{-5} s^3 - 8552 s^2 - 1,636 \cdot 10^6 s + 3,319 \cdot 10^7}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} & \frac{0,0339 s^3 + 4,168 \cdot 10^7 s^2 + 3,229 \cdot 10^{10} s + 5,44 \cdot 10^{10}}{s^3 + 8,804 \cdot 10^8 s^2 + 3,47 \cdot 10^{11} s + 4,22 \cdot 10^{10}} \end{bmatrix}$$

$$K_{la} = \begin{bmatrix} \frac{1298 s^2 + 1,77 \cdot 10^{14} s + 1,838 \cdot 10^{14}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} & \frac{1,216 \cdot 10^{16} s^2 + 8,485 \cdot 10^{16} s + 7,188 \cdot 10^{16}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} \\ \frac{27,2 s^2 + 3,709 \cdot 10^{12} s - 2,155 \cdot 10^{12}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} & \frac{2,535 \cdot 10^{14} s^2 - 3,096 \cdot 10^{15} s - 7,245 \cdot 10^{15}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} \\ \frac{218,1 s^2 + 2,974 \cdot 10^{13} s + 2,111 \cdot 10^{13}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} & \frac{2,042 \cdot 10^{15} s^2 + 7,905 \cdot 10^{15} s - 7,002 \cdot 10^{13}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} \\ \frac{-361,2 s^2 - 4,926 \cdot 10^{13} s - 4,502 \cdot 10^{13}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} & \frac{-3,383 \cdot 10^{15} s^2 - 1,862 \cdot 10^{16} s - 1,104 \cdot 10^{16}}{s^3 + 1,255 \cdot 10^{11} s^2 + 4,526 \cdot 10^{14} s + 6,02 \cdot 10^{14}} \end{bmatrix}$$

### 3 Diagramme de simulation

L'hélicoptère est défini comme étant constitué de plusieurs sous-systèmes dont le fuselage, le rotor principal, le rotor de queue, l'empennage, le moteur,... La Figure ci-dessous illustre le diagramme du modèle de simulation du mouvement de vol de l'hélicoptère et ces différents sous-systèmes.

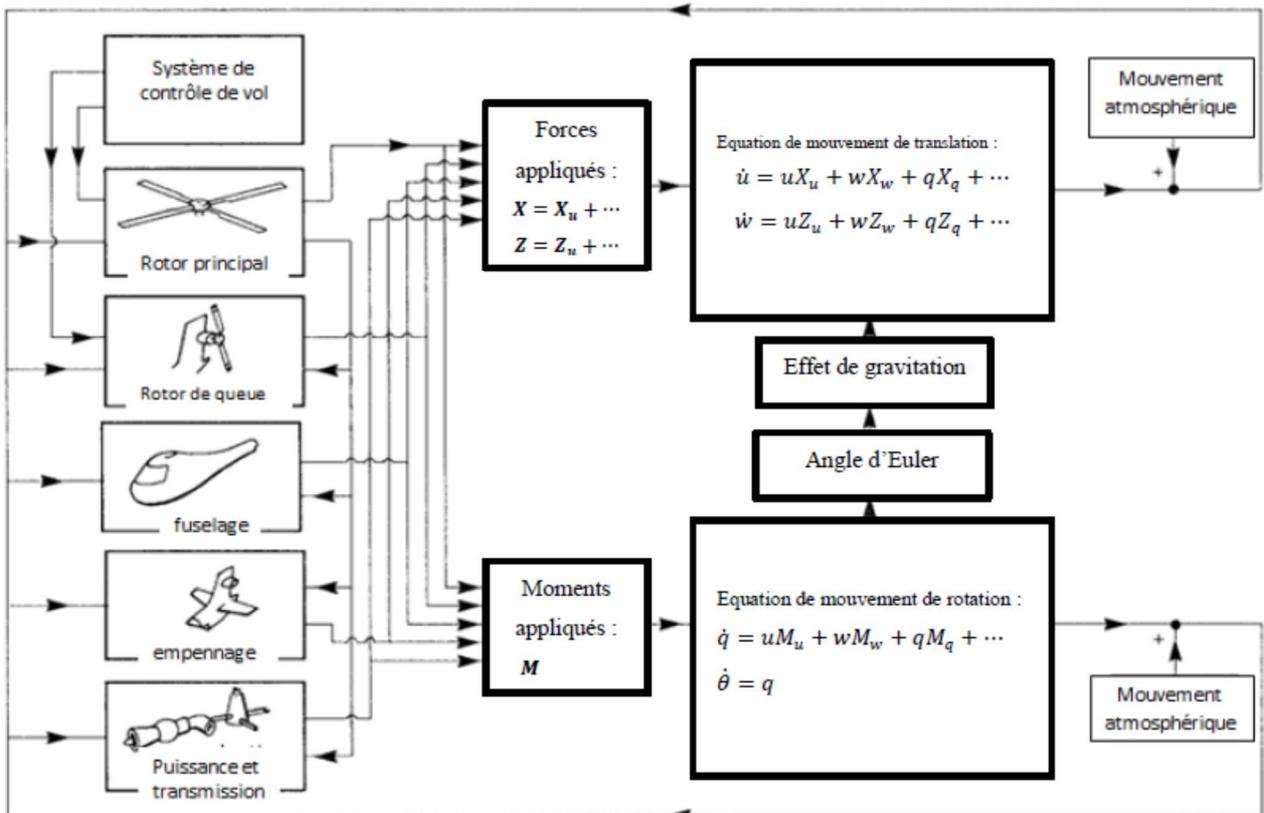


Fig.1. Diagramme de simulation du mouvement longitudinal et ses différents sous-systèmes

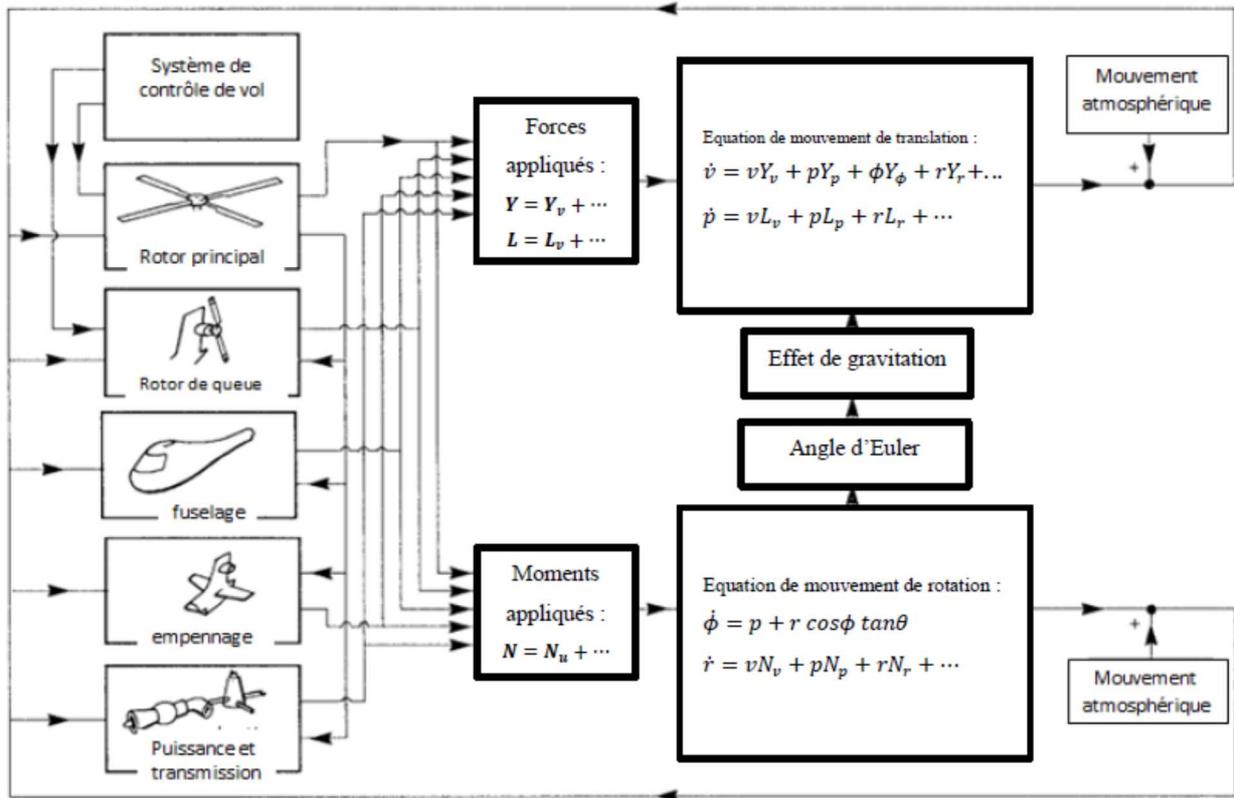


Fig.2. Diagramme de simulation du mouvement latéral et ses différents sous-systèmes

### 3.3 Equation d'état du sous – système en vol de l'hélicoptère

On peut écrire sous la forme matricielle l'équation d'état du sous-système longitudinal de l'hélicoptère:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0(t) \\ \theta_{1s}(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Avec:

$$A_{lo} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & X_\theta \\ Z_u & Z_w & Z_q & Z_\theta \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{lo} = \begin{bmatrix} X_{\theta_0} & X_{\theta_{1s}} \\ Z_{\theta_0} & Z_{\theta_{1s}} \\ M_{\theta_0} & M_{\theta_{1s}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{lo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D_{lo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut écrire sous la forme matricielle l'équation d'état du sous-système latéral de l'hélicoptère :

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_\phi & Y_r \\ L_v & L_p & 0 & L_r \\ 0 & 1 & 0 & \cos \phi \tan \theta \\ N_v & N_p & 0 & N_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ \phi \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\theta_{1c}} & Y_{\theta_{0T}} \\ L_{\theta_{1c}} & L_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 \\ N_{\theta_{1c}} & N_{\theta_{0T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1c}(t) \\ \theta_{0T}(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Avec :

$$A_{la} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & Y_\phi & Y_r \\ L_v & L_p & 0 & L_r \\ 0 & 1 & 0 & \cos\phi \tan\theta \\ N_v & N_p & 0 & N_r \end{bmatrix}$$

$$B_{la} = \begin{bmatrix} Y_{\theta_{1c}} & Y_{\theta_{0T}} \\ L_{\theta_{1c}} & L_{\theta_{0T}} \\ 0 & 0 \\ N_{\theta_{1c}} & N_{\theta_{0T}} \end{bmatrix}$$

$$C_{la} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{la} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 4 Resultats

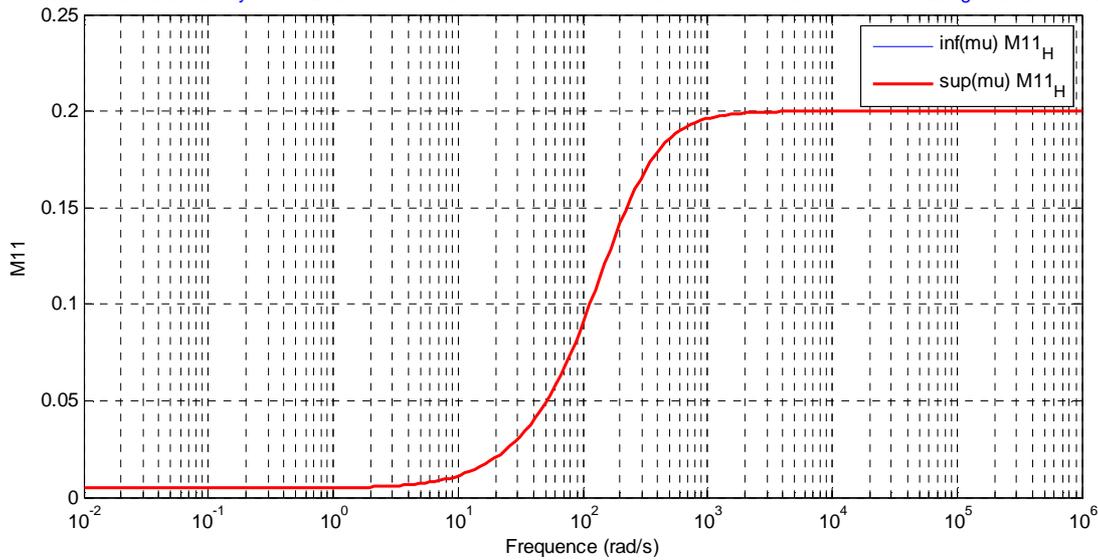
### 4.1 Mu-analyse en vol longitudinal

La reponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière structurée et non structurée de la matrice  $M_{11}$ , matrice d'analyse de la performance nominale, pour le correcteur est représentée sur la figure 5.26.

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M_{11})]$
$K_{lo}$	$10^3$	0,2000

**Table.1 : Analyse de la performance nominale.**

Performance Nominale du Système Bouclé de M11 avec incertitudes structurées et non structurées en Vol Longitudinal de l'hélicoptère



**Fig.3. Performance Nominale du Système Bouclé**

Le système est jugé performant car  $\max[\mu(M_{11})] < 1$  pour ce bouclage (Tableau 1).

La reponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière structurée et non structurée de la matrice  $M_{22}$ , matrice d'analyse de la robustesse en stabilité, pour le correcteur est représentée sur la figure 4.

Robustesse en Stabilité du Système Bouclé de M22 avec incertitudes structurées et non structurées en Vol Longitudinal de l'hélicoptère

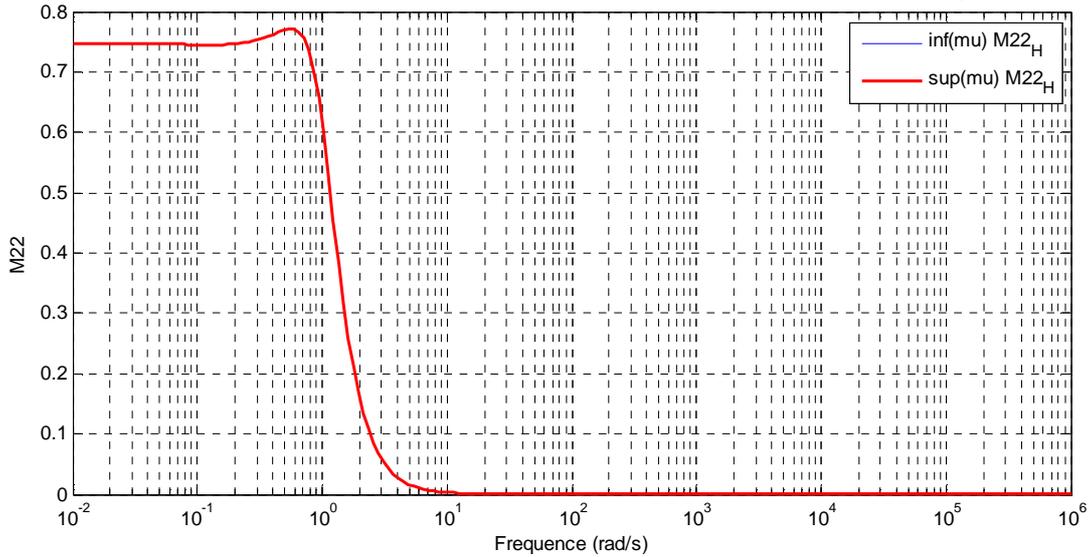


Fig.4. Robustesse en Stabilité du Système Bouclé

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M_{11})]$	Garantie de stabilité
$K_{lo}$	0,2341	0,7711	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0,7711}$

Table.2 : Analyse de la robustesse en stabilité.

Le système est jugé stable en robustesse car  $\max[\mu(M_{11})] < 1$  pour ce bouclage.

La figure ci-dessous présente la robustesse en performance.

Robustesse en Performance du Système Bouclé de Mu avec incertitudes structurées et non structurées en Vol Longitudinal de l'hélicoptère

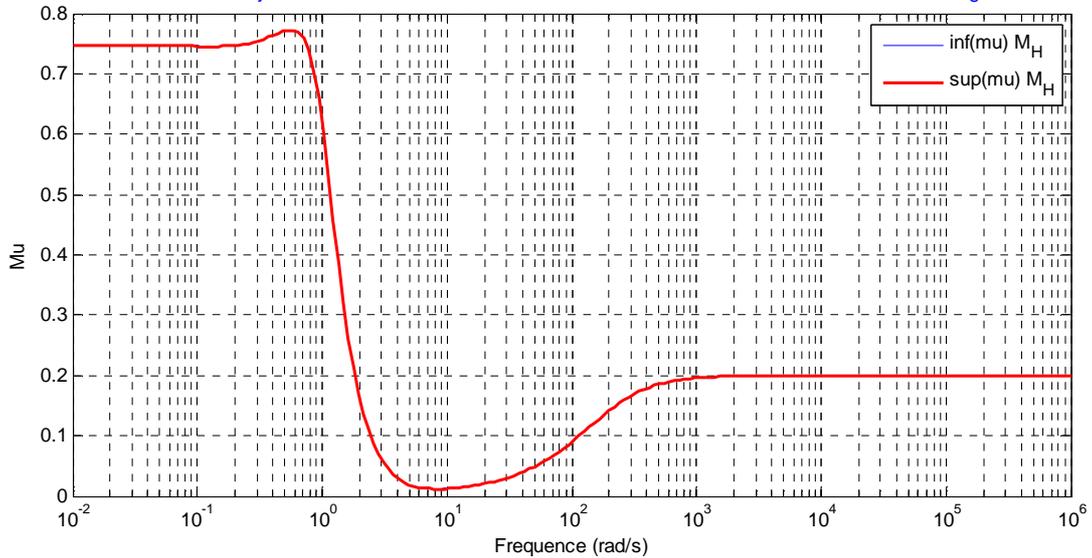


Fig.5. Robustesse en Performance du Système Bouclé

La reponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière structurée et non structurée de la matrice  $M$ , matrice d'analyse de la robustesse en performance du système, pour chaque type de correcteur est représentée sur la figure

5.

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M)]$	Garantie de la performance
----------	--------------------	----------------	----------------------------

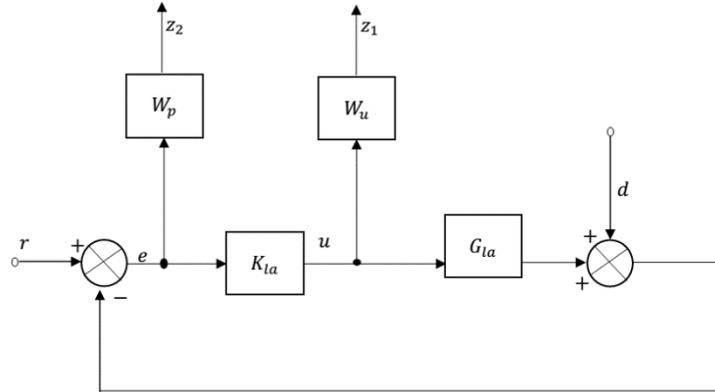
$K_{lo}$	0,2341	0,7725	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0,7725}$
----------	--------	--------	--

**Table.3 : Analyse de la robustesse en performance.**

Le système est jugé performant en robustesse car  $\max[\mu(M)] < 1$  pour ce bouclage (Tableau 5.11). Pourtant on constate une large garantie de performance pour le bouclage avec le correcteur obtenu par la synthèse  $H_\infty$ .

**4.2 Mu-analyse des systèmes en vol latéral**

Le schéma bloc pour analyser le système avec incertitudes non structurées est représenté sur la Figure 6.

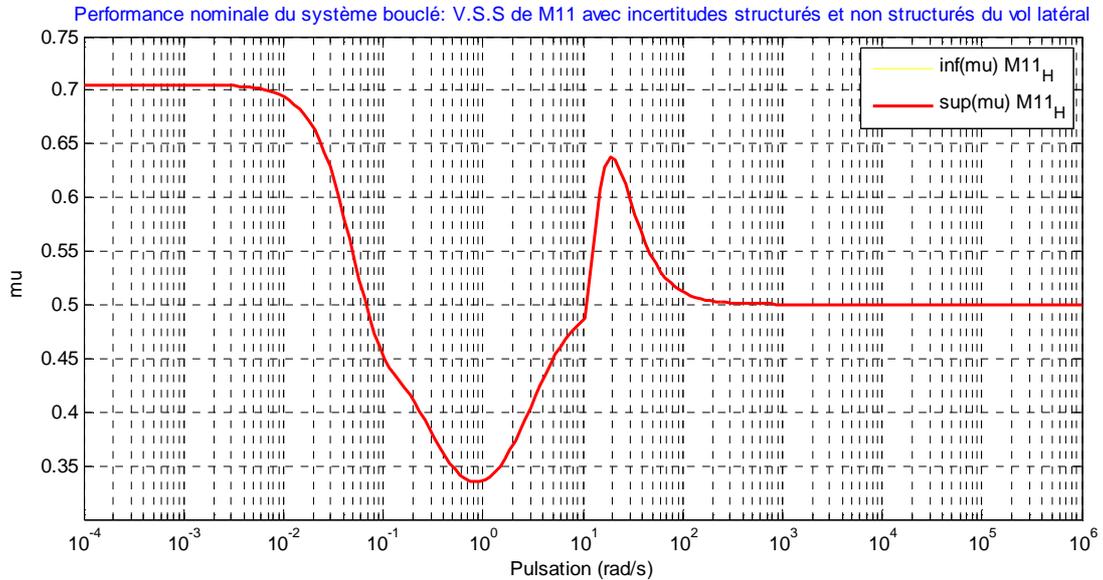


**Fig.6. Schéma bloc du système perturbé avec incertitudes non structurées en vol latéral**

La réponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière non structurée de la matrice  $M_{11}$ , matrice d’analyse de la performance nominale, pour la correcteur est représentée sur la figure ci-dessous.

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M_{11})]$
$K_{la}$	0.7053	0,7741

**Table.4 : Analyse de la performance nominale.**



**Fig.7. Performance Nominale du Système Bouclé**

Le système est jugé performant car  $\max[\mu(M_{11})] < 1$  pour ce bouclage.

La réponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière non structurée de la matrice  $M_{22}$ , matrice d’analyse de la robustesse en stabilité, pour la correcteur est représentée sur la figure 5.31.

Robustesse en stabilité du système bouclé: V.S.S de M22 avec incertitudes structurés et non structurés du vol latéral

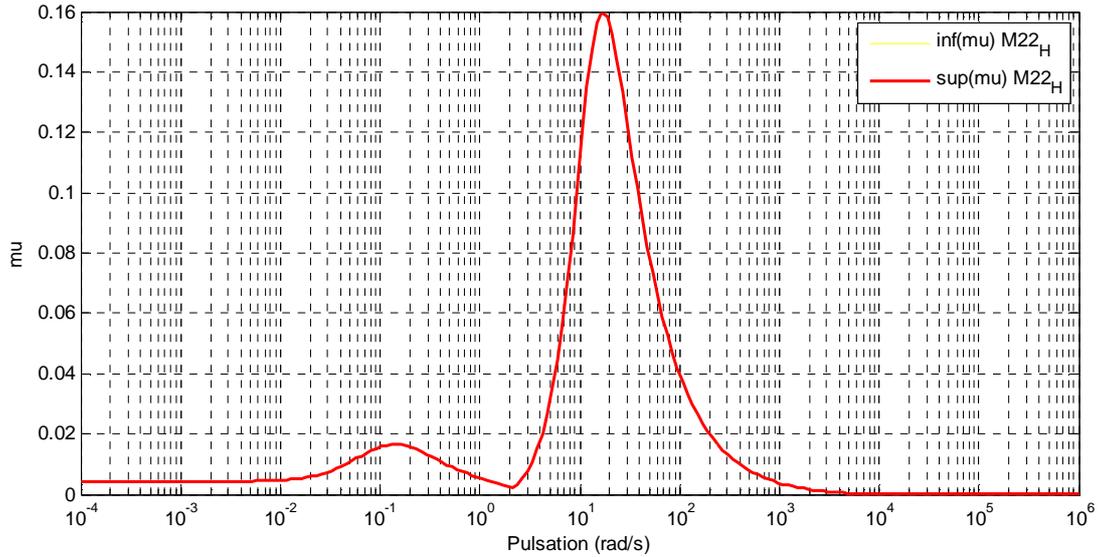


Fig.8. Robustesse en Stabilité du Système Bouclé

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M_{22})]$	Garantie de stabilité
$K_{la}$	1.0474	0.1597	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0.1597}$

Table.5 : Analyse de la robustesse en stabilité.

Le système est jugé stable en robustesse car  $\max[\mu(M_{11})] < 1$  pour ce bouclage.

Robustesse en performance du système bouclé: V.S.S de Mu avec incertitudes structurés et non structurés du vol latéral

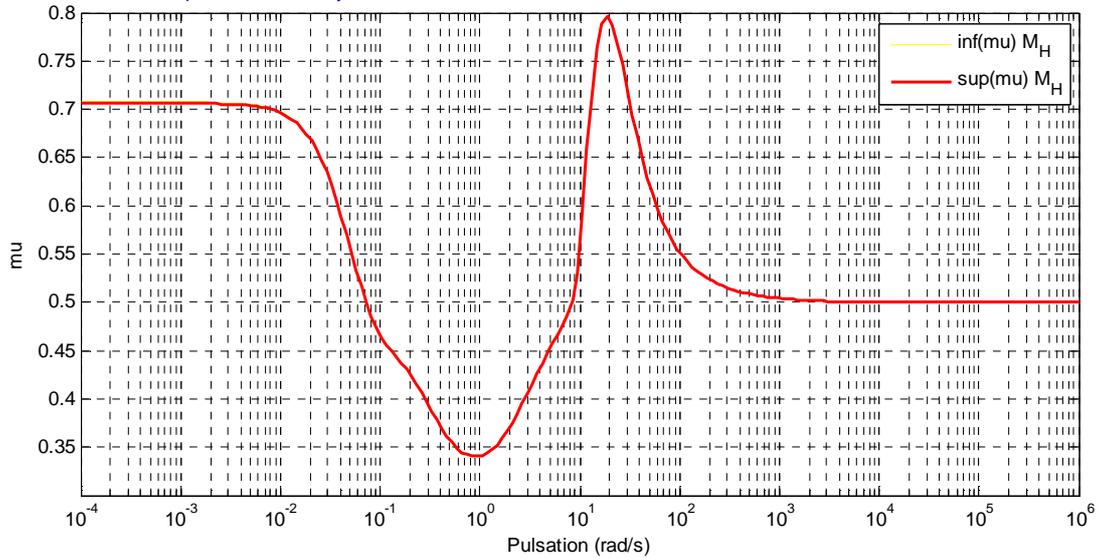


Fig.9. Robustesse en Performance du Système Bouclé

La réponse fréquentielle des bornes inférieure et supérieure de la valeur singulière non structurée de la matrice  $M$ , matrice d'analyse de la robustesse en performance du système, pour chaque type de correcteur est représentée sur la figure ci-dessous.

Bouclage	$\omega_m$ (rad/s)	$\max[\mu(M)]$	Garantie de la performance
$K_{la}$	18.8965	0.7955	$\ \Delta\ _\infty < \frac{1}{0.7955}$

Table.6 : Analyse de la robustesse en performance.

Le système est jugé performant en robustesse car  $\max[\mu(M)] < 1$  pour ce bouclage. Pourtant on constate une large garantie de performance pour le bouclage avec le correcteur obtenu par la synthèse  $H_\infty$ .

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre on a pu développer les outils d'analyse de synthèse de robustesse d'un système linéaire. La valeur singulière structurée est l'un des outils très puissant pour analyser la robustesse d'un système linéaire entaché d'incertitude. On a expliqué comment la méthode de la  $\mu$ -analyse peut analyser la robustesse de stabilité et de performance d'un système.

Le problème standard explique la synthèse d'un contrôleur en minimisant la norme H-infinie de la LFT  $F_l(P, K)$ . La résolution de cette optimisation conduit à la détermination de  $K$ .

L'utilisation de la  $\mu$ -analyse et le problème de l'H-infini a permis d'établir un autre outil de synthèse qui est la  $\mu$ -synthèse.

## 6 REFERENCES

- [1] G.M. Voorsluisjs, «*Parameter dependent robust control for a rotorcraft UAV* », Delft University of technology, 2629 HS Delft, The Netherlands, European conference for aerospace sciences, 2005.
- [2] J.C. Wilson, R.E. Mineck, “*Wind Tunnel investigation of helicopter – Rotor wake effects on three helicopter fuselage model*”, NASA TM-X-3185, 1975.
- [3] S. Bouabdallah, P. Murrieri, R. Siegwart, «*Design and Control of an Indoor Micro Quadrator* », Proceedings of the IEEE, International Conference on Robotics and automation, New Orleans, LA, April 2004.
- [4] A.K. Cooke, E.W.H. Fitzpatrick, “*Helicopter test and evaluation*”, Blackwell Science, Qinetik, 2002;
- [5] Fletcher, J.W., “*Identification of UH-60 stability derivative models in hover from flight test data, AHS*”, May 1993.
- [6] Fletcher, J.W., “*A model structure for identification of linear models of the UH-60 helicopter in hover and forward flight*”, NASA TM 110362, August 1995.
- [7] A. Isidori, L. Marconi, A. Serrani, «*Robust Autonomous Guidance* », Springer, 2003.
- [8] A. Isidori, L. Marconi, A. Serrani, «*Robust nonlinear motion control of a helicopter* », IEEE Trans. Automat. Control, Vol 8, pp 413- 426, Springer, 2003.
- [9] T.J Koo, S. Sastry, «*Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization* », the 37<sup>th</sup> Conference on decision and Control, Florida, USA, Vol 4, pp 3636-3640.
- [10] A. Marc, M. Robert, K. Heffley, «*Minimum complexity helicopter simulation math model* », NASA, April 1998.
- [11] A. Martini, F. Léonard, G. Abba, «*Robotics, Automation and Control* », I-TECH Open Access Platform, 2008.
- [12] D. McRuer, I. Ashkenas, D. Graham, «*Aircraft dynamics and automatic control* », Princeton University Press New Jersey, 1973.