LE SPIN DÉDUIT DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

PAR

Gérard VASSAILS

(Laboratoire de Physique)

Il n'est pas sans intérêt scientifique, et il est pédagogiquement utile pour un enseignement élémentaire de la Mécanique quantique, de déduire l'existence du spin à partir de l'équation de Schrödinger, appliquée à un rotateur sphérique non engagé dans une intéraction extérieure, application par ailleurs tout à fait banale. Désignant par θ la longitude du rotateur, par φ sa latitude et par $f(\theta)$ la fortuité de la variable aléatoire θ dont la densité de probabilité vaut $ff^*(\theta)$, f^* conjuguée de f, l'équation de Schrödinger conduit comme on sait à l'équation différentielle :

$$f'' - Cf = 0 \qquad (1)$$

où C désigne une constante réelle.

La condition physique qui s'impose, concernant la variable θ, c'est que la densité de probabilité du point de passage aléatoire du rotateur, qui vaut $\Psi\Psi^*(\theta, \varphi)$, Ψ fonction d'onde, soit une fonction de ce point (θ, φ), une fonction au sens strict c'est-à-dire univalente, une densité de probabilité multivalente étant dépourvue de signification concrète. Telle est l'idée qui présidera au choix des solutions de (1) physiquement adéquates : appliquer la condition d'univalence à ff^* et non à f.

Opérant ainsi, on rejettera donc d'abord le cas $C = \alpha^2$, α nombre réel et, posant $C = -\alpha^2$, on aboutira à

$$ff^* = |a_1|^2 + 2|a_1| \cdot |a_2| \cos 2\alpha\theta + |a_2|^2$$

a_1 et a_2 désignant des constantes arbitraires complexes. L'univalence de ff^* exige que 2α soit un entier, et par conséquent que α (positif, négatif ou nul) soit ou bien un entier ou bien un demi-entier. En prenant comme rotateur un corpuscule tournant autour de son barycentre et dont le mouvement présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe polaire des coordonnées sphériques, les seules valeurs possibles de son moment cinétique axial en unités $h/2\pi$ sont $0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2} \ldots$, ce sont bien celles d'un spin.

Manuscrit reçu, le 13 novembre 1971.