ALGÈBRE NOTIONNELLE COMBINANT LA COMPRÉHENSION ET L'EXTENSION

PAR

Gérard VASSAILS

RÉSUMÉ

Ce travail propose une algèbre logique liant non les propositions mais les notions ou concepts analytiques (exemple $P \Rightarrow V$ se lira *poisson donc vertébré*). En outre, cette algèbre assume à la fois les relations entre les compréhensions des notions et les relations entre leurs extensions, contrairement à la logique classique qui s'arrête aux extensions. Des formes contradictoires dans cette dernière logique deviennent licites en cette algèbre notionnelle qui s'avère ainsi dialectique. Comme toute algèbre des notions, elle en engendre par isomorphisme une des propositions.

ABSTRACT

This work purposes a logical algebra connecting no propositions but notions or analytical concepts (example : $P \Rightarrow V$ must be read *fish then vertebrate*). Moreover, this algebra joins together the relations between the comprehensions of notions and the relations between their extensions, contraryly to classical logic wich is strictly limited in extensions. Any expressions contradictorious in classical logic becomes licit in that notional algebra wich thus appears dialectical. As any algebra of notions, it determines by isomorphism a propositional algebra.

★

J'entends ici par *notion* le concept analytique, abstrait, tout à fait traditionnel. Chaque notion comporte, classiquement, une compréhension et une extension. Ce qui est identique (animal à squelette interne avec colonne dorsale segmentée) chez n classes différentes d'objets (poissons, reptiles, batraciens, oiseaux, mammifères, $n = 5$) constitue la compréhension de la notion (vertébré). Le nombre de sous-classes contenues au total dans les n classes (le nombre d'espèces animales vertébrées) peut évaluer l'extension ou quantité logique de la notion. Il est bien connu aussi que les notions composent une sorte de hiérarchie allant du particulier vers le général et qu'une notion (vertébré) plus générale qu'une autre (poisson) a une compréhension plus pauvre (poisson : animal vertébré aquatique respirant l'air dissous dans l'eau, etc.) mais une extension plus grande (celle de *poisson* ne compte que le nombre d'espèces de poisson).

Par ailleurs, je crois qu'il ressort assez d'un précédent travail [I] que le langage littéraire s'avère absolument indispensable pour exprimer les concepts véritables, complets et concrets, non seulement en physique mais aussi en mathématiques. Par exemple, l'algorithme peut bien exprimer le zéro pour autant qu'il est un nombre mais l'autre trait, le plus important de son concept, à savoir qu'il est aussi l'antithèse, la négation du nombre, seule la langue littéraire peut le dire. C'est pourquoi je prête une attention soutenue aux dictionnaires. Du point de vue formel, un dictionnaire constitue un système sémantique fermé : le sens de chaque mot y est exprimé par d'autres mots. Précisément, les définitions des dictionnaires sont généralement des résumés de la compréhension des notions.

La critique sans doute la plus profonde qui ait été émise contre la logique classique ou aristotélicienne, c'est qu'elle ne prend en considération, exclusivement, que les rapports entre les extensions des notions. C'est d'ailleurs pourquoi l'algèbre externe des ensembles mathématiques ou calcul booléen peut être mise en correspondance biunivoque avec elle. J'essaie ici de combiner au sein d'une même logique les relations extensives et les compréhensives. D'un autre côté, je recherche, sous les relations propositionnelles, celles plus profondes, structurelles, entre les notions elles-mêmes : elles constituent une algèbre notionnelle, mais distincte de la logique des classes usuelles puisqu'elle prend en charge les compréhensions.

L'IMPLICATION

Cette coordination est particulièrement importante parce qu'il s'agit de la déduction élémentaire, immédiate, de la maille composant tout raisonnement : $A \rightarrow B$ doit se lire *A donc B*. Notons $P(x)$ la proposition *x est un poisson* et $V(x)$ la proposition *x est un vertébré*. Quelle que soit l'espèce animale désignée par la variable logique x (sardine, baleine ou crevette) et donc quelle que soit la valeur de vérité de $P(x)$, l'implication ou déduction $P(x) \rightarrow V(x)$ est toujours vraie, ce qui peut s'écrire (à la manière mathématique) :

$$\forall x, P(x) \Longrightarrow V(x) \qquad (1)$$

Pourquoi en est-il ainsi ? Parce que, par définition, tout poisson est vertébré, en d'autres termes parce que la compréhension de *vertébré* se trouve incluse dans celle de poisson. Il s'agit bien, sous-jacent à la relation propositionnelle (1), d'un rapport entre les notions P et V elles-mêmes. Comment s'écrit ce rapport, c'est (1) qui clairement l'impose : la variable indéterminée et indéterminante x peut y être omise, étant inutile et l'on obtient :

$$P \Longrightarrow V \qquad (2)$$

qui s'énoncera *poisson donc vertébré.*

Je symboliserai par des lettres nues, telles P, V les notions et en même temps leurs compréhensions. De la sorte, je noterai $V \subset P$ l'inclusion de la compréhension V dans la compréhension P. Tout en remarquant, cependant, qu'il ne s'agit point d'une inclusion au sens de la théorie des ensembles en ceci qu'il serait absurde de traiter une compréhension comme un simple ensemble de mots. Par exemple, *dissoudre* ne compose pas, considéré isolément, la compréhension de *poisson*, c'est l'unité linguistique *respirer l'air dissous dans l'eau* qui, indivise, entre dans cette compréhension. En définitive (2) traduit en algèbre logique l'inclusion sémantique $V \subset P$.

Examinons maintenant la relation extensive. Je noterai $\{P\}$, $\{V\}$ les extensions respectives de P et V. Toute espèce de poisson appartenant à l'ensemble des espèces vertébrées, et cette fois-ci la terminologie ensembliste est adéquate sans restrictions. on a encore une inclusion : $\{P\} \subset \{V\}$ mais l'ordre des symboles notionnels s'y trouve, par rapport à $V \subset P$, inversé ce qui illustre l'opposition entre compréhension et extension. Désignant toujours par x une espèce animale quelconque, selon l'algèbre des ensembles on doit avoir $x \in \{P\} \Rightarrow x \in \{V\}$ et cette déduction reste juste même si $x \in \{P\}$ est fausse : nous retrouvons, partant des extensions, la relation (1) et par conséquent la relation notionnelle (2). Pour résumer,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{en compréhension } V \subset P \\ \text{en extension } \{P\} \subset \{V\} \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \text{en algèbre notionnelle} \\ P \Longrightarrow V \end{array} \qquad (3)$$

LA NÉGATION

Charnière de la contradiction, la négation constitue le point critique de la logique. Aussi le rapport des extensions de A et de *non-A* correspond-il à une relation d'algèbre logique et le rapport des compréhensions à une autre, contrairement à ce qui a lieu pour l'implication. Examinons d'abord les extensions. Reprenons les notions P, V et ajoutons-y P^* signifiant vertébré non-poisson. La classification zoologique étant rigoureuse, il n'y a pas d'espèce vertébrée qui soit à la fois poisson et non poisson (principe de non-contradiction). Les extensions $\{P\}$ et $\{P^*\}$ ne présentent donc aucun élément commun :

$$\{P\} \cap \{P^*\} = \emptyset \qquad (4)$$

La même rigueur exige qu'il n'y ait pas non plus d'espèce vertébrée qui ne soit ni poisson ni non-poisson (principe du tiers exclu) d'où :

$$\{P\} \cup \{P^*\} = \{V\} \qquad (5)$$

x désignant une espèce vertébrée quelconque, formons maintenant les propositions $P(x)$ et $P^*(x)$. Si la première est vraie, la seconde doit être fausse sinon le principe de non-contradiction serait violé ; si la première est fausse, la seconde doit être vraie sinon c'est le principe du tiers exclu qui serait enfreint. Ces rapports de valeurs définissant en logique classique une exclusion réciproque vraie, je la noterai :

$$\forall x, P(x) \Updownarrow P^*(x) \qquad (6)$$

Elle traduit les relations extensives (4) et (5). Comme dans (1), on peut faire abstraction de x et écrire :

$$P \Updownarrow P^* \qquad (6\ bis)$$

Voyons maintenant les compréhensions. De la même manière que les compréhensions de *refaire* et de *défaire* incluent, et à titre de composante primordiale, celle de *faire*, la compréhension de *non-faire* inclut aussi cette dernière, au même titre majeur. C'est le terme nié qui assure à la négation l'essence de sa signification, sa sémantique (G.-W. Hegel). *Non-faire* diffère de *non-dormir* exactement comme *dormir* de *faire*. L'inclusion compréhensive $P \subset P^*$ saute d'ailleurs aux yeux dans le symbolisme logique lui-même où, quelle que soit la graphie adoptée, un terme P figurera toujours dans l'expression de sa négation. Elle saute aux yeux également dans la langue littéraire quand c'est un préfixe tel que *in* latin ou *an* grec qui signifie le non (impossible, anisotrope, etc.). La relation compréhensive entre P et *non-P* consiste donc dans l'inclusion $P \subset P^*$. Par quelle coordination se traduira-t-elle en algèbre logique ? Puisque toute inclusion compréhensive du type $A \subset B$ correspond à l'implication vraie $B \Rightarrow A$, il est rationnel de poser en algèbre notionnelle

$$P^* \Rightarrow P \qquad (7)$$

Vérifions si (7) engendre effectivement des implications propositionnelles douées de sens. Cette fois, il ne peut s'agir des propositions simples $P(x)$ et $P^*(x)$ qui s'excluent mutuellement (6) mais il suffit de leur appliquer le quantificateur pour obtenir des déductions plausibles. Rappelant que $V \subset P$, $V \subset P^*$ et $x \subset V$, nous aurons :

$$\exists x, P^*(x) \Rightarrow \exists x, P(x) \qquad (8)$$

Ainsi par exemple :

Cet animal n'est pas un poisson, donc il y a des animaux qui sont des poissons. Il y a des nombres réels non positifs, donc il y a des nombres réels positifs. Les droites D et D' ne sont pas sécantes, donc il existe des droites sécantes.

Ici, toutefois, une précision s'impose qui touche à la conception même de la logique. Certes, le but de cette science est de formuler des lois *générales* du raisonnement, indépendantes donc du contenu spécifique de celui-ci. Mais une loi non moins générale, à ne pas oublier, c'est que tout raisonnement a un contenu, un objet, tout au moins dans ce que j'appellerai le discours rationnel effectif, à savoir notamment celui de la pratique et celui des sciences. Le discours effectif, tel est le phénomène duquel la logique, en tant que science, recherche les lois, les structures — l'essence. C'est ainsi que de *la lune n'est pas un fromage* il ne saurait s'ensuivre qu'*il y a des astres qui sont des fromages* car l'antécédent, absurde, est étranger au discours effectif. C'est dans le contexte de ce discours, en particulier, qu'une proposition prend sa valeur de vérité. Isolée, elle en est dépourvue. Par exemple, *le rapport de la circonférence au diamètre vaut* π, vraie dans le discours de la géométrie usuelle dont l'objet est un espace sans gravitation, se révèle fausse dans le discours de la théorie einsteinienne de la gravitation.

A noter aussi que la déduction (8) peut prendre une valeur heuristique : elle suggèrera par exemple, puisqu'il y a des nucléons non négatifs, la recherche d'éventuels nucléons négatifs (anti-protons). Enfin, de (8) on remonte à (7) en faisant abstraction de x et du quantificateur. Je soulignerai encore que la double inclusion compréhensive $V \subset P$, $V \subset P^*$ ne souffre aucune exception : dans l'exemple cité, V signifiait vertébré mais les relations (4) à (8) sont tout aussi licites si V signifie animal ou être vivant ou enfin être tout court. L'être désigne traditionnellement en logique la classe la plus générale, dont la compréhension est quasi-nulle (elle se borne à *être*) et l'extension infinie.

En définitive, la structure de la négation en logique notionnelle peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{en extension} \left\{\begin{array}{ll} \{P\} \cap \{P^*\} = \emptyset & \text{en algèbre} \\ & \text{notionnelle} \\ \{P\} \cup \{P^*\} = \{V\} & P \Updownarrow P^* \end{array}\right. \\ \text{en compréhension } P \subset P^* \text{ en algèbre notionnelle} \\ \quad P^* \Rightarrow P \end{array}\right. \qquad (9)$$

En algèbre propositionnelle classique, les deux formes $P \Updownarrow P^*$ et $P^* \Rightarrow P$ (où P et P^* désigneraient alors des propositions) ne seraient compatibles que dans le cas P vraie, P^* fausse. En algèbre notionnelle, aucune restriction ne s'impose, il s'agit donc d'une algèbre non-classique. Et cela tient à ce qu'à la classique exclusion $P \Updownarrow P^*$ qui, nous l'avons vu, traduit et traduit seulement le rapport extensif des notions P et P^*, elle ajoute l'implication $P^* \Rightarrow P$ qui exprime le rapport des compréhensions. La logique aristotélicienne, identique quant aux principes à la logique moderne mathématisée, booléenne, apparaît bien comme unilatéralement extensive, comme négligeant complètement les relations de compréhension, en somme comme une structure tronquée de la raison, cela dès le premier moment de celle-ci pourtant, celui de l'analyse, du simple entendement.

Notamment, en extension $\{P\} \cap \{P^*\} = \varnothing$ mais en compréhension l'intersection n'est pas vide. D'une part elle comprend P puisque $P \subset P^*$, soit :

$$P \subset P \cap P^* \qquad (10)$$

D'autre part, comme il existe toujours V tel que $V \subset P$ et $V \subset P^*$ on a aussi :

$$V \subset P \cap P^* \qquad (11)$$

LE BIPOLE LOGIQUE

Il y a des couples de notions que les dictionnaires (pour le moins ceux de plusieurs langues européennes que j'ai consultés) ne définissent pas séparément mais seulement chacune par la négation de l'autre. Il en est ainsi, notamment, des *catégories* de la raison : identité et différence, tout et partie, fini et infini, nécessité et hasard, etc. Par exemple, dans le Littré, *identique* est présenté comme synonyme de *même* (citer un synonyme en logique n'est pas définir) ; mais à *même* nous lisons *qui n'est pas autre*, *qui n'est pas différent* et à *différent* ainsi qu'à *autre* nous trouvons *qui n'est pas le même*. Dans la sphère des qualités [III] également on rencontre des couples d'antonymes définis de la même manière. Ainsi A. Einstein remarque, dans un de ses écrits, l'impossibilité de définir séparément un trièdre droit et un de gauche : seuls nous sont donnés, indivis, leur couple, leur opposition. Soit donc L, L' un tel couple de couple de notions : la compréhension L' est L^* et, réciproquement, L a pour compréhension L'^*. Il en découle, d'après (9) les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{en extension } L \Updownarrow L' \\ \text{en compréhension } L \Leftrightarrow L' \end{array}\right. \qquad (12)$$

Le rapport extensif des pôles se traduit en algèbre notionnelle par une exclusion réciproque vraie mais leur rapport compréhensif par une implication réciproque vraie. En logique propositionnelle classique, les formes (12) sont contradictoires l'une à l'autre et par conséquent il faudrait en rejeter une, ou les deux. En logique des notions, le système (12) est licite : il s'agit donc d'une logique dialectique. J'appelle bipôle logique un couple de notions structuré par les relations (12).

Il constitue le modèle le plus simple de concept synthétique (dialectique). L'entendement s'arrête à l'exclusion réciproque de ses pôles : par exemple, ou bien x et y sont différents $D(x, y)$, ou bien ils sont identiques $I(x, y)$. Examinons, en l'appliquant à des propositions, la signification de l'implication réciproque $L \Leftrightarrow L'$ qui, dans le cas du bipôle identité-différence, s'écrit $D(x, y) \Leftrightarrow I(x, y)$. La déduction $D(x, y) \Rightarrow I(x, y)$ signifie que la différence absolue, pure de toute trace d'identité n'est pas de ce monde : quels que soient x et y, ils auront au moins, en dernier recours, comme point commun d'être. De même, $I(x, y) \Rightarrow D(x, y)$ exprime l'irréalité de l'identité absolue, que trahit le formalisme lui-même en représentant les termes identiques par des lettres x et y différentes, qui donc ne peuvent désigner que des êtres dissemblables ou, au minimum, le même être en des lieux ou des temps différents. Une seule identité contrevient à l'implication $I \Rightarrow D$ et c'est la tautologie $I(x, x)$, or elle n'a aucun contenu concret, elle est une forme vide : dans le discours effectif, dans la logique concrète, l'identité est une relation et toute relation exige deux termes distincts (III). On le voit, l'impossibilité formelle d'attribuer aux pôles L, L' des définitions (compréhensions) séparées, disjointes ne procède pas d'un vice du langage ou d'une imperfection des dictionnaires, elle a une origine objective, elle signifie que les pôles notionnels, à l'instar de ceux d'un aimant, sont inséparables aussi dans la réalité concrète. Je l'ai déjà montré pour les bipôles quantité-qualité, fini-infini, nécessité-hasard [III].

L'ORDRE DÉDUCTIF

Les notions peuvent être partiellement ordonnées par l'implication vraie, qui est transitive puisqu'elle se ramène, en compréhension comme en extension, à une inclusion. Sur le plan purement formel, elle est aussi réflexive : $A \subset A$ donc $A \Rightarrow A$. On obtient ainsi l'ordre déductif, le seul qui présente un intérêt logique, qui est aussi l'ordre allant du particulier au général. Etant donné un couple de notions P, Q (poisson, vertébré) telles que $P \Rightarrow Q$, il existe toujours une borne antérieure (sardine) qui est l'antécédent immédiat de P et une borne supérieure (animal) qui est le conséquent immédiat de Q. La structure de l'ordre déductif analytique est donc un treillis, en logique dialectique comme en logique classique.

Voici quelques relations d'algèbre notionnelle illustrant cet ordre. Soit P poisson. Q mollusque et X animal ; on a $P \Rightarrow X$ et $Q \Rightarrow X$. En compréhension $X \subset P$ et $X \subset Q$ donc :

$$X \subset P \cap Q \qquad (13)$$

tandis qu'en extension on a :

$$\{P\} \cup \{Q\} \subset \{X\} \qquad (13\ bis)$$

Remarquer, de (13 à 13 *bis*), outre l'inversion de l'inclusion, la transformation de l'intersection en réunion — et réciproquement de (16) à (16 *bis*) plus loin. Les relations (13) et (13 *bis*) se traduisent en algèbre notionnelle par :

$$P \vee Q \Rightarrow X \qquad (14)$$

La disjonction V qui est ici vraie ainsi que toutes les coordinations logiques en algèbre notionnelle — tout comme en logique usuelle des classes [I] — signifie le trilemme : ou P seule, ou Q seule, ou P et Q à la fois. Mais comme les deux premiers cas du trilemme sont posés par hypothèse, il résulte de (14) que :

$$P \wedge Q \Rightarrow X \qquad (15)$$

la conjonction $\wedge$ (vraie ici) signifiant *P et Q ensemble.*

Soit maintenant P vertébré, Q animal aquatique et X poisson. On a $X \Rightarrow P$ et $X \Rightarrow Q$ (exemple mathématique : P multiple de 2, Q multiple de 3 et X multiple de 42). En compréhension, $P \subset X$ et $Q \subset X$ donc :

$$P \cup Q \subset X \qquad (16)$$

et en extension

$$\{X\} \subset \{P\} \cap \{Q\} \qquad (16\ bis)$$

Ces deux relations se traduisent en algèbre notionnelle par :

$$X \Rightarrow P \wedge Q \qquad (17)$$

Supposons maintenant que $P \Rightarrow Q$. Dans le premier cas (15) on peut faire $X = Q$ d'où :

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

et dans le second (17) on peut faire $X = P$ d'où :

$$P \Rightarrow P \wedge Q$$

Ces relations somme toute sont banales en logique courante des classes mais, d'une part elles offrent l'intérêt de montrer qu'une logique dialectique conserve la déduction, l'activité de l'entendement, d'autre part elles rompent avec la logique des classes dès qu'on y introduit la négation. En effet (10) est du type (13) mais dans le cas particulier où $X = P$ (et $Q = P^*$) donc selon (15) :

$$P \wedge P^* \Rightarrow P \qquad (18)$$

En algèbre propositionnelle, la conjonction $P \wedge P^*$ exprime une contradiction héraclitéenne, exemple *zéro est et n'est pas un nombre* [III]. En algèbre de Boole, (18) est vraie. Désignant en effet par $p \in \{0\ 1\}$ la valeur de P, l'implication $P \wedge P^* \rightarrow P$, qui vaut $1 - p(1\text{-}p)$, est bien vraie $\forall p$.

Quant à (11) elle est aussi du type (13) mais avec $Q = P^*$, de sorte que selon (15) :

$$P \wedge P^* \Rightarrow V \qquad (19)$$

Cette relation est aussi vérifiée en algèbre de Boole mais de cela on ne peut tirer argument, car $P \wedge P^* \rightarrow V$, qui vaut $1 - p(1-p)(1-v) = 1 - 0(1-p) = 1$, conserve cette valeur 1 si l'on remplace la proposition V par toute autre, arbitraire et par conséquent non impliquée par P et P^* à la fois comme doit l'être V. C'est que l'algèbre de Boole, qui dérive des seules relations notionnelles extensives, ne saurait traduire toutes les compréhensives.

LE PASSAGE A L'ALGÈBRE PROPOSITIONNELLE

Il en est effet établi, notamment par J. Piaget [I] que le *calcul des propositions* peut se déduire de la logique (extensive) des classes par un isomorphisme. De même, l'algèbre propositionnelle générale que j'ai présentée dans un travail précédent (II), qui est une algèbre des valeurs plutôt qu'un calcul des propositions, dérive de l'algèbre notionnelle compréhensive et extensive ici exposée. M'en tenant, pour le montrer, aux coordinations binaires, soient deux notions P_1, P_2 (poisson, crustacé aquatique par exemple) et deux autres plus générales V_1, V_2 (vertébré, animal aquatique) de telle sorte que :

$$\begin{cases} \overline{P}_1 \cup \overline{P^*}_1 = \overline{V}_1 \\ \overline{P}_2 \cup \overline{P^*}_2 = \overline{V}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 \cap P^*_1 \supset V_1 \\ P_2 \cap P^*_2 \supset V_2 \end{cases}$$

(pour simplifier l'écriture, je désigne dorénavant les extensions par des lettres surlignées). On déduit immédiatement, faisant jouer simplement l'associativité et la mutuelle distributivité de la réunion et de l'intersection ainsi que l'inclusion,

$$\begin{cases} \overline{V}_1 \cup \overline{V}_2 = \overline{P}_1 \cup \overline{P}_2 \cup \overline{P^*}_1 \cup \overline{P^*}_2 \\ V_1 \cap V_2 \subset P_1 \cap P_2 \cap P^*_1 \cap P^*_2 \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2 = (\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2) \cup (\overline{P}_1 \cap \overline{P^*}_2) \\ \quad \cup (\overline{P^*}_1 \cap \overline{P}_2) \cup (\overline{P^*}_1 \cap \overline{P^*}_2) \\ V_1 \cup V_2 \subset (P_1 \cup P_2) \cap (P_1 \cup P^*_2) \\ \quad \cap (P^*_1 \cup P_2) \cap (P^*_1 \cup P^*_2) \end{cases} \tag{21}$$

Attribuons maintenant à toute proposition A une véracité a et une valeur $f(a)$, f application sur $\{0, 1\}$ de l'ensemble E des véracités. Et à la négation A^* attribuons la véracité $a^* = u - a$, u négateur, $u \in E$ et $f(u) = 1$. L'isomorphisme consiste à faire correspondre l'addition des véracités à la réunion extensive et à l'intersection compréhensive. la multiplication des véracités à l'intersection extensive et à la réunion compréhensive, enfin l'égalité des véracités à l'égalité des extensions et à l'inclusion des compréhensions. De (20) nous déduisons alors le polynôme complet π_2^1 :

$$\pi_2^1 = a_1 + a_2 + a^*_1 + a^*_2 = u_1 + u_2 \tag{22}$$

qui détermine la première famille des coordinations binaires. De (21) nous dérivons le polynôme normal complet π_2^2 qui correspond à l'affirmation complète ou *affirmation tautologique* binaire et qui détermine l'autre famille des coordinations d'ordre 2 :

$$\pi_2^2 = a_1 a_2 + a_1 a^*_2 + a^*_1 a_2 + a^*_1 a^*_2 = u_1 u_2 \quad (23$$

Cette méthode rend caduc le quatrième axiome des logiques métriques divalentes [II] et, surtout, elle a l'excellence de lier intimement la logique des propositions à celle des notions.

Je rappelle que si $E = \{0,1\}$ et f est l'application identique, l'algèbre ainsi obtenue n'est autre que celle de Boole. Mais que si E est l'ensemble des nombres complexes de module ou 0 ou 1 et $f(a) = |a|$, ou bien $f(a) = |a|^2$, on obtient une algèbre selon laquelle une contradiction héraclitéenne peut être vraie, c'est-à-dire une logique dialectique.

On voit, dans les polynômes normaux complets, que les négateurs u correspondent aux notions plus générales V communes, en compréhension, à P et à P^*. Changer de négateur, c'est donc passer d'une de ces notions V à une autre, par exemple de vertébré à animal si P représente le poisson. Et la négation change alors de compréhension comme d'extension, passant par exemple de non-poisson (mais vertébré) à non-poisson (mais animal). L'algèbre de Boole, elle, ne dispose que d'un négateur, unique : $\forall u$, $u = 1$. Il correspond donc à l'être.

On constate également que le passage isomorphique aux polynômes normaux complets peut se faire, indifféremment, soit en partant de la relation extensive dans (20) et (21) soit de la compréhensive. Mais, encore une fois, la charnière entre logique aristotélicienne – booléenne et logique dialectique réside dans la compréhension de la négation. Que dans la bipartition de $\overline{V}_i$, $i = 1,2$ les sous-ensembles $\overline{P}_i$ et $\overline{P^*}_i$ soient disjoints ou non, qu'étant non-disjoints il y ait inclusion de l'un dans l'autre ou non, les relations extensives (20-1) et (21-1) n'en resteront pas moins vraies. Et la remarque vaut pour les compréhensives. C'est la logique des notions qui impose que $\overline{P}_i$ et $\overline{P^*}_i$ soient disjointes et que P_i soit incluse dans P^*_i. Voilà pourquoi les formes générales du genre (22) et (23) conviennent aussi bien à la logique classique qu'à la dialectique : tout dépend, ensuite, de la nature de l'ensemble des véracités et de la fonction de valuation f.

Il importe de vérifier, c'est fondamental, que la forme (23) assume l'implication $A^* \Rightarrow A$. La véracité de $A^* \rightarrow A$ est $u^*u - a^{*2}$. Une implication doit être fausse quand l'antécédent étant vrai le conséquent est faux (sinon pas de raisonnement possible) : ce cas exige donc $u^* = a^*$. A^* fausse (donc $u = a$ et A est vraie) entraîne la vérité de $A^* \rightarrow A$ quels que soient les négateurs adoptés. Enfin le cas proprement dialectique, A et A^* vraies ensemble, qui exige $f(u - a) = 1$ donc, avec des véracités complexes, que les arguments de u et de a diffèrent de $\pi/3$ [II], ce cas rend vraie $A^* \rightarrow A$ en adoptant $u^* = a^*$. L'option $u = a$ se justifie ainsi : un négateur est isomorphe d'une notion V telle que $V \subset A \cap A^*$ mais on a aussi $A \subset A \cap A^*$ (en algèbre de Boole on a toujours $u = a = 1$ quand A est vraie). Que A et A^* n'aient pas nécessairement même négateur (donc que A^{**} puisse différer de A) est inhérent à l'algèbre dialectique et se vérifie en remontant à l'implication notionnelle $P^* \Rightarrow P$: sa version propositionnelle peut en effet user de deux notions V et V' plus générales que P au lieu d'une à condition que la plus générale figure dans le conséquent. Exemple : ce *vertébré* n'est pas un poisson, donc il y a des *animaux* qui sont des poissons, u correspond alors à V (animal) et u^* à V' (vertébré).

On doit vérifier encore si (23) légalise la contradiction (12) du bipôle logique — à savoir si deux propositions A_1 et A_2 peuvent être liées à la fois par une exclusion et par une implication réciproques vraies, ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} f(a_1 a^*_2 + a^*_1 a_2) = 1 \\ f(a_1 a_2 + a^*_1 a^*_2) = 1 \end{cases} \tag{24}$$

On voit que si A_1 et A_2 sont fausses ($a_1 = a_2 = 0$) il est impossible de satisfaire à (24-1). Le cas où l'une des propositions est vraie et l'autre fausse doit rendre fausse l'implication réciproque (ce qui exige $u_i = a_i$ quand A_i est vraie, $i = 1,2$). Reste donc pour résoudre le système (24) le seul cas A_1 et A_2 vraies ensemble : il le résoud en prenant soit $u_1 = a_1$ et $f(u_2 - a_2) = 1$ soit $u_2 = a_2$ $f(u_1 - a_1) = 1$. Finalement, quand il faut choisir un négateur approprié pour une proposition A vraie, deux options suffisent à résoudre tous les problèmes : l'option classique $u = a$ (A^* est alors fausse) et l'option spécifiquement dialectique $f(u - a) = 1$ (A^* est alors vraie).

Manuscrit reçu, le 13 novembre 1971.

RÉFÉRENCES

I. Piaget (J.). — *Traité de Logique*, Armand Colin, Paris 1949.

II. Vassails (G.). — *Les logiques métriques divalentes*, Ann. Université de Madagascar, série Sc. de la nat. et math. N° 5, pp. 31-34, voir aussi 39-40 (1967).

III. Vassails (G.). — *L'infini mathématique et la qualité*, Ann. Université de Madagascar, série Sc. de la nat. et math. N° 7, pp. 7-32, 1970.