ÉTUDE DES MATRICES CARRÉES DE DIMENSION 2 ET QUELQUES APPLICATIONS

PAR

RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Laboratoire de Physique, Faculté des Sciences, Université de Madagascar
(B. P. 138 — Tananarive-Madagascar)

RÉSUMÉ

Nous donnons les propriétés intéressantes des matrices 2 × 2 ainsi que quelques unes de leurs applications (décomposition en matrices $\vec{\sigma}$ de PAULI, relations provenant de la propriété d'irréductibilité des matrices $\{\vec{\sigma}, I\}$, mise sous forme canonique de TWISS, résolution d'un système de relations de récurrence, application aux calculs des transmués des opérateurs de particules par une transformation de BOGOLIUBOV).

ABSTRACT

Properties and some applications of 2 × 2 matrices are given (expansion in terms of PAULI matrices, relations obtained from the irreducible property of $(\vec{\sigma}, I)$ matrices, TWISS canonical form, research of solution of coupled recurrency relations, application to the calculation of quasi-boson operators in a BOGOLIUBOV transformation).

ÉTUDE DES MATRICES 2 × 2 ET QUELQUES APPLICATIONS

INTRODUCTION

Donner une étude des matrices 2 × 2 peut paraître trivial sinon élémentaire car elles sont très simples et semblent être bien connues. Cependant, nous pensons qu'il est intéressant de grouper dans un même travail avec leur démonstration les nombreuses formules concernant les matrices de PAULI dont il est inutile de souligner l'importance aussi bien en mathématique qu'en physique. Nous nous contenterons de rappeler les formules qui sont courantes, mais nous donnerons les démonstrations de celles qui sont plus spécialisées. Ce sera l'objet de la première partie du premier chapitre de ce travail. La seconde partie donne une autre forme remarquable des matrices 2 × 2, la forme de TWISS, qui à notre avis est assez mal connue et insuffisamment utilisée. Nous montrons que ces matrices T [θ, A, B,] ayant les mêmes paramètres A et B de TWISS possèdent une structure de groupe. Cette propriété permet de calculer de façon immédiate le produit de plusieurs matrices ayant les mêmes paramètres A et B mais dont le paramètre θ diffère. Comme cas particulier, nous obtenons ainsi toutes les puissances entières d'une matrice T [θ, A, B].

Le chapitre II a trait à l'utilisation pratique des deux décompositions (décomposition en matrices de PAULI ou sous forme de TWISS). Nous prendrons un exemple en Mathématiques (résolution d'un système de relations de récurrence). Nous montrerons son intérêt dans le cas particulier de la transformation généralisée de BOGOLUIBOV pour les bosons en calculant de façon originale et explicite les transmués des opérateurs de particules (donc les opérateurs de quasi-particules) par une transformation formellement unitaire.

Quant à la mise sous forme de TWISS, nous nous contentons tout simplement de rappeler son application dans l'étude quantique d'une particule se mouvant dans un potentiel périodique (par exemple le mouvement d'un électron dans un réseau cristallin, étude quantique d'un conducteur et d'un semi-conducteur).

Nous pensons que ces exemples illustrent le fait qu'il y a des aspects des matrices 2 × 2 qui n'ont pas été suffisamment utilisés pour la simplification de beaucoup de calculs.

Nous donnerons dans un prochain travail une étude analogue à celle-ci mais concernant les matrices 4 × 4.

CHAPITRE I

Rappelons d'abord les définitions suivantes pour les matrices 2×2. Soient les matrices :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \text{ et } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous définissons les nombres :

$$\text{Dét } M = m_{11}\, m_{22} - m_{12}\, m_{21}$$
$$\text{Tr } M = m_{11} + m_{22}$$

Nous pouvons aussi introduire la matrice $[Adj\, M]$

$$[Adj\, M] = I.\text{Tr}M - M = \begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Nous vérifions aisément la relation :

$$M.[Adj\, M] = [Adj\, M]\,.\,M = \text{dét } M.I$$

Si la matrice M est régulière (ce qui est équivalent à écrire que dét M est différent de 0), l'inverse M^{-1} est alors égale à :

$$M^{-1} = \frac{1}{\text{dét } M}[\text{Adj } M] = \frac{1}{\text{dét } M}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{bmatrix}$$

Le conjugué hermitique M* est :

$$M^* = \begin{bmatrix} \overline{m_{11}} & \overline{m_{21}} \\ \overline{m_{12}} & \overline{m_{22}} \end{bmatrix}$$

où $\overline{m_{ij}}$ est le conjugué complexe du nombre complexe m_{ij}.

La matrice est hermitique si et seulement si $M = M^*$
Elle est unitaire si et seulement si $MM^* = M^*M = I$.
Nous ne donnons que ces définitions car nous nous en servirons dans la suite.

A0. — MATRICES DE PAULI

Donnons maintenant la définition des 3 matrices $\vec{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ de PAULI :

$$(1) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et soit $I = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité.

A1. — *Propriétés* des matrices $\vec{\sigma}$ de PAULI : (les lettres latines prennent les valeurs de 1 à 3, les lettres grecques de 0 à 3). Il y a sommation sur les indices répétés sauf indication contraire. On montre facilement que :

$$(2) \qquad \sigma_j\sigma_k = \delta_{jk}\, I + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l \; *$$
$$(2') \qquad \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\,\delta_{jk}\, I$$

ou en notation de produit extérieur :

$$(2'') \qquad \vec{\sigma} \wedge \vec{\sigma} = 2i\,\vec{\sigma}\;** \qquad \text{ou } \frac{\vec{\sigma}}{2} \wedge \frac{\vec{\sigma}}{2} = i\,\frac{\vec{\sigma}}{2}$$

$$(3) \qquad \text{Tr}\,\{\vec{\sigma}\} = 0 \qquad \text{Tr}\,\{I\} = 2$$

Toutes les relations que nous allons établir ne feront appel qu'aux propriétés (2) et (3), nous pouvons même oublier la représentation (1). De la relation (2) ou (2″), nous déduisons immédiatement :

$$(4) \qquad \sigma_j\sigma_k\sigma_l = \sigma_j\delta_{kl} - \sigma_k\delta_{jl} + \sigma_l\delta_{jk} + i\,\varepsilon_{jkl}I$$

En prenant la trace des relations (2) et (4), nous avons :

$$(5) \qquad \text{Tr}\,\{\sigma_j\,\sigma_k\} = 2\,\delta_{jk}$$
$$(6) \qquad \text{Tr}\,\{\sigma_j\,\sigma_k\,\sigma_l\} = 2i\,\varepsilon_{jkl}$$

En utilisant la relation (4) et la propriété cyclique de la trace, nous démontrons facilement :

$$(7) \qquad \text{Tr}\,\{\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\} = 2(\delta_{jk}\delta_{lm} - \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl})$$

Remarquons que cette relation est identique à celle vérifiée par les matrices 4×4 de DIRAC.

La relation (4) donne :

$$(8) \qquad \sum_{l=1}^{3} \sigma_l\,\sigma_k\,\sigma_l = -\,\sigma_k$$

ou en écriture vectorielle :

$$\vec{\sigma}\,\sigma_i\,.\,\vec{\sigma} = -\,\sigma_i$$

$$(9) \qquad (\vec{\sigma}\,.\,\vec{a})\,\sigma_k\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{b}) = (\vec{\sigma}\,.\,\vec{a})\,b_k + a_k\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{b}) - \sigma_k\,(\vec{a}\,.\,\vec{b}) - i\,(\vec{a} \wedge \vec{b})_k$$

$$(9') \qquad (\vec{\sigma}\,.\,\vec{a})\,\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{b}) = (\vec{\sigma}\,.\,\vec{a})\,\vec{b} + \vec{a}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{b}) - \vec{\sigma}\,(\vec{a}\,.\,\vec{b}) - i\,(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

(multiplier les deux membres de (4) par a_j et b_l et sommer sur j et l).

* δ_{jk} est le symbole de KRONECKER, égal à 1 pour $j = k$ et à 0 pour $j \neq k$. ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique du 3^e^ ordre. La contraction de ce tenseur peut se faire en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{kl} + \delta_{in}\,\delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{il}\,\delta_{jn}\,\delta_{km} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\,\delta_{kn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

* δ_{jk} est le symbole de KRONECKER, égal à 1 pour $j = k$ et à 0 pour $j \neq k$. ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique du 3^e^ ordre. La contraction de ce tenseur peut se faire en utilisant la formule suivante :

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{kl} + \delta_{in}\,\delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{il}\,\delta_{jn}\,\delta_{km} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\,\delta_{kn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

** Cette relation au facteur 2 près est isomorphe à celle vérifiée par le moment cinétique en Mécanique quantique.

En particulier pour $\vec{a} = \vec{b}$, nous avons :

(10) $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})\, \vec{\sigma}\, (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) = 2\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})\, \vec{a} - \vec{\sigma}\, a^2$

La relation (2) conduit après multiplication par a_j et b_k et sommation sur j et k à la formule :

(11) $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})\,(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \mathrm{I} + i\, \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$

Les puissances entières des matrices $\vec{\sigma}$ se calculent aussi aisément.

$(\sigma_i)^{2n} = \mathrm{I}$ pour $\forall\, n$ entier et $\forall_i$ (sans sommation)

$(\sigma_i)^{2n+1} = \sigma_i$ pour $\forall n$ entier et $\forall i$

$(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})^{2n} = (\vec{x}^2)^n\, \mathrm{I}$ où $x^2 = \sum_{i=1}^{3} x^2 \quad \vec{x} = (x_i)$

$(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})^{2n+1} = (\vec{x}^2)^n\, (\vec{\sigma} \cdot \vec{x})$

(11′) $\exp(\vec{\sigma} \cdot \vec{x}) = \mathrm{I}\, \mathrm{ch} \sqrt{\vec{x}^2} + \dfrac{\vec{\sigma} \cdot \vec{x}}{\sqrt{\vec{x}^2}}\, \mathrm{sh} \sqrt{\vec{x}^2}$

A2. — *Propriétés* venant de l'irréductibilité des matrices $(\vec{\sigma}, \mathrm{I})$.

***a.* Théorème**

Les matrices $(\vec{\sigma}, \mathrm{I})$ forment une base des matrices 2×2.

Démonstration : elles forment un système de générateur de matrices 2×2. C'est aussi un système libre. En effet, si $\sum_{\mu=0}^{3} \lambda_\mu\, \sigma_\mu = 0$, nous avons, en prenant la trace, $\lambda_0 = 0$ car $\mathrm{Tr}\, \vec{\sigma} = 0$ (relation 3). Il reste donc $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, \sigma_i = 0$. En prenant la trace après multiplication par σ_j, et en utilisant la relation (5), nous avons $\lambda_j = 0$ pour $\forall j = (1, 2, 3)$. $\sum_{\mu=0}^{3} \lambda_\mu\, \sigma_\mu = 0$ entraîne donc $\lambda_\mu = 0$ pour $\forall_\mu$ CQFD. Le système $(\vec{\sigma}, \mathrm{I})$ est donc une base.

Conséquence : Soit X une matrice 2×2 quelconque. X se décompose donc de façon unique sur $\{\sigma_\mu\} = (\vec{\sigma}, \mathrm{I})$.

(12) $\mathrm{X} = \sum_{\mu=0}^{3} \mathrm{X}_\mu \sigma_\mu \quad$ avec $\quad \mathrm{X}_\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \{\mathrm{X}\, \sigma_\mu\}$

La démonstration est évidente.

Si la matrice X est hermitique, alors les composantes X_μ sont réelles.

Nous allons maintenant donner des formules qui sont très utiles en Physique (Mécanique quantique, Théorie quantique des Champs, Théorie des forces nucléaires, etc.).

***b.* Formule 13**

Notation : l'élément (r, s) d'une matrice X sera noté comme d'habitude par X_{rs}.

(13) $$\delta_{\tau\rho}\, \delta_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0,3} (\sigma_\mu)_{\alpha\rho}\, (\sigma_\mu)_{\tau\sigma}$$

(13′) $$= \frac{1}{2} \delta_{\alpha\rho}\, \delta_{\tau\sigma} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma})_{\alpha\rho} \cdot (\vec{\sigma})_{\tau\sigma}$$

Démonstration :

Soit X une matrice 2×2 quelconque. Elle se décompose sur σ_μ en :

$$\mathrm{X} = \sum_{\mu = (0,3)} \mathrm{X}_\mu\, \sigma_\mu$$

avec $\mathrm{X}_\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \{\mathrm{X} \sigma_\mu\} = \frac{1}{2} \mathrm{X}_{ij}\, (\sigma_\mu)_{ji}$

En remplaçant X_μ dans la décomposition de X et en prenant l'élément X_{rs}, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_{rs} &= \tfrac{1}{2} \mathrm{X}_{ij}\, (\sigma_\mu)_{ji}\, (\sigma_\mu)_{rs} \\ &= \tfrac{1}{2} (\sigma_\mu)_{ji}\, (\sigma_\mu)_{rs}\, \mathrm{X}_{ij} \end{aligned}$$

Comme les matrices $\{\sigma_\mu\}$ forment un système irréductible, cette relation implique :

$$\delta_{ri}\, \delta_{js} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} (\sigma_\mu)_{rs}\, (\sigma_\mu)_{ji} \qquad \text{CQFD}$$

La formule (13′) s'obtient en séparant dans la sommation $\mu = 0$ de $\mu = i = (1, 2, 3)$.

Elle peut encore s'écrire sous la forme suivante en écrivant la matrice unité I :

(13″) $\quad \mathrm{I}_{ri}\, \mathrm{I}_{js} = \frac{1}{2} \mathrm{I}_{ji}\, \mathrm{I}_{rs} + \frac{1}{2} (\vec{\sigma})_{ji} \cdot (\vec{\sigma})_{rs}$

Généralisation de la formule (13)

La formule (13) peut être généralisée.

Etant données deux matrices 2×2 quelconques [F] et [G], nous avons :

(14) $$\mathrm{F}_{ri}\, \mathrm{G}_{js} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} (\mathrm{F}\, \sigma_\mu\, \mathrm{G})_{rs}\, (\sigma_\mu)_{ji}$$

Démonstration :

$$\mathrm{F}_{ri}\, \mathrm{G}_{js} = \mathrm{F}_{rr'}\, \delta_{r'i}\, \delta_{js'}\, \mathrm{G}_{s's}$$

On transforme $\delta_{r'i}\, \delta_{js'}$ en utilisant la formule (13)

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{ri}\, \mathrm{G}_{js} &= \mathrm{F}_{rr'}\, \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} (\sigma_\mu)_{r's'}\, (\sigma_\mu)_{ji}\, \mathrm{G}_{s's} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} \mathrm{F}_{rr'}\, (\sigma_\mu)_{r's'}\, \mathrm{G}_{s's}\, (\sigma_\mu)_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} (\mathrm{F}\, \sigma_\mu\, \mathrm{G})_{rs}\, (\sigma_\mu)_{ji} \end{aligned}$$

***d.* Formule (15)**

$$(15)\quad \sum_{i=1}^{3} (\sigma_i)_{s'r}\,(\sigma_i)_{r's} = \tfrac{3}{2}\, I_{s's}\, I_{r'r} - \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} (\sigma_i)_{s's}\,(\sigma_i)_{r'r}$$

$$(15')\quad (\vec{\sigma})_{s'r}\cdot(\vec{\sigma})_{r's} = \tfrac{3}{2}\, I_{s's}\, I_{r'r} - \tfrac{1}{2}\,(\vec{\sigma})_{s's}\cdot(\vec{\sigma})_{r'r}$$

Démonstration :

De la relation (14) en posant $F_{ri} = (\sigma_l)_{ri}$ et $G_{js} = (\sigma_l)_{js}$ et en sommant sur $l = 1, 2, 3$ nous obtenons :

$$\sum_{l=1}^{3} (\sigma_l)_{r's}(\sigma_l)_{s'r} = \tfrac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{l=1}^{3} (\sigma_l\,\sigma_\mu\,\sigma_l)_{r'r}\,(\sigma_\mu)_{s's}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\sum_{l=1}^{3} (\sigma_l\, I\, \sigma_l)_{r'r}\,(I)_{s's} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} (\sigma_l\,\sigma_j\,\sigma_l)_{r'r}\,(\sigma_j)_{s's}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[3\,(I)_{r'r}\,(I)_{s's} + \sum_{j=1}^{3} (-\sigma_l)_{r'r}\,(\sigma_l)_{s's}\right]$$

$$= \tfrac{3}{2}\, I_{s's}\, I_{r'r} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} (\sigma_j)_{s's}\,(\sigma_j)_{r'r}$$

C.Q.F.D.

***e.* Formule (16)**

Etant donné un vecteur unitaire $\vec{n}$ ($\vec{n}^2 = 1$), nous avons :

$$(16)\quad (\vec{\sigma}.\vec{n})_{s'r}\,(\vec{\sigma}.\vec{n})_{r's} - \tfrac{1}{3}\,(\vec{\sigma}_{s'r}.\vec{\sigma}_{r's}) = (\vec{\sigma}.\vec{n})_{r'r}\,(\vec{\sigma}.\vec{n})_{s's} - \tfrac{1}{3}\,(\vec{\sigma}_{r'r}.\vec{\sigma}_{s's})$$

(La notation $\vec{\sigma}_{s'n}\,.\vec{\sigma}_{r's}$ signifie $\sum_{l=1}^{3} (\sigma_l)_{s'r}\,(\sigma_l)_{r's}$

Démonstration :

La relation (11) donne : $(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})^2 = \vec{n}^2\, I = I$

La formule (10) dans le cas où $\vec{a}^2 = \vec{n}^2 = 1$ se réduit à :

$$(17)\quad (\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})\,\vec{\sigma}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n}) = 2\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})\,\vec{n} - \vec{\sigma}$$

Calculons maintenant chacun des termes du premier membre de la relation (16) en utilisant la relation (14) pour le premier terme et la relation (15′) pour le second terme :

$$(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{s'r}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{r's} = \tfrac{1}{2}\left[I_{r'r}\, I_{s's} + (\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})\,\sigma_i\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{r'r}\,(\sigma_i)_{s's}\right]$$

$$-\tfrac{1}{3}\,\vec{\sigma}_{s'r}\,.\,\vec{\sigma}_{r's} = -\tfrac{1}{3}\left[\tfrac{3}{2}\, I_{s's}\, I_{r'r} - \tfrac{1}{2}\,(\sigma_i)_{s's}\,(\sigma_i)_{r'r}\right]$$

En additionnant membre à membre ces deux relations, nous voyons que les deux premiers termes du second membre s'annulent :

$$(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{s'r}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{r's} - \tfrac{1}{3}\,(\vec{\sigma})_{s'r}\,.\,(\vec{\sigma})_{r's} = \tfrac{1}{2}\,(\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})\,\sigma_i\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n}))_{r'r}\,(\sigma_i)_{s's} + \tfrac{1}{6}\,(\sigma_i)_{s's}\,(\sigma_i)_{r'r}$$

Nous utiliserons la formule (17) pour transformer le premier terme du second membre qui devient :

$$= \tfrac{1}{2}\left[2\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{r'r}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{s's} - (\vec{\sigma}_i)_{r'r}\,(\vec{\sigma}_i)_{s's}\right] + \tfrac{1}{6}\,(\sigma_i)_{s's}\,(\sigma_i)_{r'r}$$

$$= (\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{s's}\,(\vec{\sigma}\,.\,\vec{n})_{r'r} - \tfrac{1}{3}\,(\sigma_i)_{s's}\,(\sigma_i)_{r'r}$$

C.Q.F.D.

C'est un exemple des formules d'échange (il y a échange des indices *(s′ r, r′ s)*.

***f.* Formule (18)**

$$(18)\quad (\vec{\sigma})_{s'r}\, I_{r's} + I_{s'r}\,(\vec{\sigma})_{r's} = I_{s's}\,(\vec{\sigma})_{r'r} + I_{r'r}\,(\vec{\sigma})_{s's}$$

Démonstration :

Nous calculons les termes suivants en utilisant la formule (14) :

$$(\sigma_l)_{s'r}\, I_{r's} = \tfrac{1}{2}\,(\sigma_l\,\sigma_\mu\, I)_{s's}\,(\sigma_\mu)_{r'r}$$

$$I_{s'r}\,(\sigma_l)_{r's} = \tfrac{1}{2}\,(I\,\sigma_\mu\,\sigma_l)_{s's}\,(\sigma_\mu)_{r'r}$$

En additionnant membre à membre et en prenant $\mu = 0$, puis $\mu = i = (1, 2, 3)$ nous obtenons :

$$= (\sigma_l)_{s'r}\, I_{r's} + I_{s'r}\,(\sigma_l)_{r's}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, 2\,(\sigma_l)_{s's}\, I_{r'r} + \tfrac{1}{2}\left[(\,(\sigma_l\,\sigma_i) + (\sigma_i\,\sigma_l)\,)_{s's}\right](\sigma_i)_{r'r})$$

$$= (\sigma_l)_{s's}\, I_{r'r} + I_{s's}\,(\sigma_l)_{r'r}$$

car $(\sigma_l\,\sigma_i + \sigma_i\,\sigma_l) = 2\,\delta_{li}\, I$ d'après la formule (2′

***g.* Formule 19**

$$(19)\quad \tfrac{1}{2}\left[I_{rs}\, I_{tu} + I_{ru}\, I_{ts}\right] = \tfrac{3}{4}\, I_{rs}\, I_{tu} + \tfrac{1}{4}\,(\vec{\sigma})_{rs}\,.\,(\vec{\sigma})_{tu}$$

Démonstration :

Nous utilisons la formule (13″) :

$$\tfrac{1}{2}\, I_{ru}\, I_{ts} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\left[I_{tu}\, I_{rs} + (\vec{\sigma})_{rs}\,.\,(\vec{\sigma})_{tu}\right]$$

Nous ajoutons $\frac{1}{2}\, I_{rs}\, I_{tu}$ aux deux membres et nous obtenons la formule (16).

Toutes les formules que nous venons d'établir sont très utiles en physique ; par exemple dans l'étude des forces nucléaires, dans l'étude des interactions négaton-négaton ou négaton-position etc.

Elles apparaissent très souvent dès qu'on utilise les matrices de DIRAC ; en effet, il est bien connu que l'on peut donner une représentation de ces dernières à partir des matrices $\vec{\sigma}$ de PAULI et de la matrice unité I.

FORME REMARQUABLE DES MATRICES RÉELLES 2 × 2 DE DÉTERMINANT ÉGAL A 1

Comme la matrice est formée d'éléments réels et que son déterminant est égal à 1, au lieu d'avoir quatre paramètres indépendants, nous n'avons plus que trois. Dans ces conditions, nous pouvons mettre la matrice sous la forme remarquable de TWISS où n'entreront donc que 3 paramètres réels. Nous distinguerons deux cas suivant la position du module de la trace par rapport au nombre 2.

1° *Théorème :*

Une matrice $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ réelle de déterminant égal à 1 peut être mise sous les formes suivantes :

1° Si $\frac{1}{2} |\,\mathrm{Tr}\, M\,| < 1$

(20)

$$[M_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 + A_1 \sin\theta_1 & -\dfrac{1 + A_1^2}{B_1} \sin\theta_1 \\ B_1 \sin\theta_1 & \cos\theta_1 - A_1 \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_1 = \mathrm{Arc\,cos}\, \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Arc\,cos}\, \tfrac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$$

où

$$A_1 = \frac{1}{\sin\theta_1}\,\tfrac{1}{2}(m_{11} - m_{22}) = \frac{m_{11} - m_{22}}{\sqrt{(2 - m_{11} - m_{22})(2 + m_{11} + m_{22})}}$$

$$B_1 = \frac{1}{\sin\theta_1}\, m_{21} = \frac{2\, m_{21}}{\sqrt{(2 - m_{11} - m_{22})(2 + m_{11} + m_{22})}}$$

2° Si $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M > 1$

(21)

$$[M_2] = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\theta_2 + A_2\, \mathrm{sh}\,\theta_2 & -\dfrac{1 + A_2^2}{B_2}\, \mathrm{sh}\,\theta_2 \\ B_2\, \mathrm{sh}\,\theta_2 & \mathrm{ch}\,\theta_2 - A_2\, \mathrm{sh}\,\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\theta_2 = \mathrm{Arc\,ch}\, \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M = \mathrm{Arc\,ch}\, \tfrac{1}{2}(m_{11} + m_{22})$$

$$A_2 = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\theta_2}\,\tfrac{1}{2}(m_{11} - m_{22})$$

$$B_2 = \frac{1}{\mathrm{sh}\,\theta_2}\, m_{21}.$$

Si $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M < -1$, nous définissons la matrice $[M'] = -[M]$ et nous revenons au cas précédent.

Remarques : La démonstration est évidente.

a. La matrice unité correspond à $\theta_1 = 0$, A_1 et B_1 sont indéterminés. Nous pouvons donc choisir A_1 et B_1 de façon arbitraire.

b. Les matrices $\Sigma_1 = i\,\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ et $\Sigma_2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bien que n'étant pas réelles peuvent cependant se mettre sous la forme (20). Σ_1 correspond à $\theta_1{}^{(1)} = \pi/2$, $A_1{}^{(1)} = 0$, $B_1{}^{(1)} = i$. Quant à Σ_2, elle correspond à $\theta_1{}^{(2)} = \pi/2$, $A_1{}^{(2)} = 0$ $B_1{}^{(2)} = -1$. Pour $\Sigma_3 = i\,\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, nous avons $\theta_1{}^{(3)} = \pi/2$, $A_1{}^{(3)} = i$ et $B_1{}^{(3)} = \varepsilon$, ε étant un infiniment petit (avant de poser $B_1{}^{(3)} = 0$, nous avons à prendre cette précaution à cause de l'indétermination $\frac{0}{0}$). La matrice $\vec{\Sigma} = i\,\vec{\sigma}$ peuvent donc se mettre sous la forme de TWISS. Comme nous pouvons le voir aisément, les matrices $\vec{\Sigma} = i\,\vec{\sigma}$ vérifient la relation : $\Sigma_i\, \Sigma_j = -\,\delta_{ij}\, I - \varepsilon_{ijk}\, \Sigma_k$

c. Si nous décomposons maintenant les matrices $[M_1]$ et $[M_2]$ sur la base des matrices de PAULI $\vec{\sigma}$ et $\sigma_0 = I$, nous avons :

$$[M_1] = \sigma_0 \cos\theta_1 + \sigma_1 \frac{\sin\theta_1}{2\, B_1}(B_1^2 - A_1^2 - 1) - \sigma_2 \frac{i}{2\, B_1} \sin\theta_1 (A_1^2 + B_1^2 + 1) + \sigma_3 A_1 \sin\theta_1$$

$$[M_2] = \sigma_0\, \mathrm{ch}\,\theta_2 + \sigma_1 \frac{\mathrm{sh}\,\theta_2}{2\, B_2}(B_2^2 - A_2^2 - 1) - \sigma_2 \frac{i}{2\, B_2}\, \mathrm{sh}\,\theta_2 (A_2^2 + B_2^2 + 1) + \sigma_3 A_2\, \mathrm{sh}\,\theta_2$$

Montrons maintenant l'intérêt de considérer ces matrices $[M_1]$ et $[M_2]$. Comme M_1 et M_2 ont à peu près la même structure, nous allons l'écrire sous la forme compacte T [θ, A, B] en mettant en valeur les 3 paramètres θ, A et B.

2° *L'inverse d'une matrice* T [θ, A, B] qui est nécessairement régulière car dét T [θ, A, B] = + 1 peut s'obtenir facilement :

$$(22) \qquad T^{-1}[\theta, A, B] = \mathrm{Adj}\ T[\theta, A, B] = T[-\theta, A, B] = T[\theta, -A, -B]$$

Démonstration :

Si nous utilisons la formule générale de l'inverse d'une matrice 2 × 2, nous voyons dans le cas où dét. T = 1 que nous obtenons la transformation désirée :

— soit par le changement $\theta \to -\theta$, $A \to A$, $B \to B$.

— soit par le changement $\theta \to \theta$, $A \to -A$, $B \to -B$.

Ce résultat peut se vérifier aisément de façon directe.

3° Nous allons maintenant établir la relation la plus importante.

Théorème : Etant donné deux matrices de Twiss $T_1[\theta_1, A\ B]$ et $T[\theta_2, A\ B]$, ayant même paramètres A, B, mais deux paramètres θ_1 θ_2 différents, nous avons :

(23)
$$T[\theta_1, A, B] \cdot T[\theta_2, A, B] = T[\theta_1 + \theta_2, A, B]$$

Démonstration :

La démonstration se fait en calculant le produit $T[\theta_1, A, B]$ et $T[\theta_2, A, B]$. Nous remarquons en utilisant les relations d'addition des arcs trigonométriques (ou hyperboliques) que la matrice-produit a la même forme que $T[\theta, A, B]$ dans laquelle nous remplaçons tout simplement θ par $\theta_1 + \theta_2$ en gardant les mêmes paramètres A et B.

Conséquences :

a. Le calcul du produit de plusieurs $T(\theta_i, A, B)$ est immédiat en utilisant l'associativité et la relation (23).

$$(24) \qquad \prod_{i=1}^{n} T\left[\theta_i ; A, B\right] = T\left[\sum_{i=1}^{N} \theta_i ; A, B\right]$$

en particulier :

$$(25) \qquad T^N[\theta, A, B] = T[N\theta, A, B]$$

Cette propriété simplifie considérablement le calcul de toutes les puissances entières d'une matrice mise sous forme de Twiss. La relation est utilisée par exemple dans le calcul théorique des semi-conducteurs, dans l'étude quantique du mouvement d'une particule se déplaçant dans un potentiel périodique [1].

b. Le calcul de l'inverse peut se déduire de la formule (24). En effet la matrice I est telle que $\theta = 0$, A et B indéterminés. D'où :

$$(26) \qquad T^{-1}[\theta, A, B] = T[-\theta, A, B]$$

c. Le produit de matrices $T[\theta, A, B]$ ayant les mêmes paramètres A et B est commutatif d'après la formule (24).

d. L'ensemble $\boldsymbol{T}_{AB}$ des matrices $T[\theta, A, B]$ ayant les mêmes paramètres A et B a une structure de *groupe commutatif.*

Démonstration :

La propriété de fermeture est assurée par la relation (24). L'associativité vient de l'associativité du produit matriciel. L'élément neutre est la matrice identité dans laquelle nous prendrons pour les paramètres indéterminés les mêmes paramètres A et B. $I = T[0, A, B] \in \boldsymbol{T}_{AB}$. L'inverse, d'après la formule (26), appartient aussi à $\boldsymbol{T}_{AB}$. La commutativité se démontre à partir de l'associativité et de la propriété *c.*

e. Le calcul de l'exponentiel de la matrice $T[\theta, A, B]$ peut se faire aussi aisément. A titre d'exemple, calculons $\exp T[\theta, A, B]$ dans le cas de la formule (20). Nous avons une relation analogue dans le cas de la formule (21).

$$(27) \qquad \exp T[\theta, A, B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n[\theta, A, B]$$

$$\begin{bmatrix} R + AI & -\dfrac{1 + A^2}{B} I \\ BI & R - AI \end{bmatrix}$$

où $R = \text{Ré} \exp \exp \{i\theta\}$

$I = \text{Im} \exp \exp \{i\theta\}$

Démonstration :

$$\exp T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n[\theta, A, B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T[n\theta, A, B]$$

En remplaçant $T[n\theta, A, B]$ pour son expression (20) nous voyons apparaître $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cos n\theta$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin n\theta$. Ces dernières peuvent se calculer à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned} \exp \exp i\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (e^{i\theta})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \cos n\theta + i \frac{1}{n!} \sin n\theta\right] \\ &= R + i\, I \end{aligned}$$

qui définit R et I.

f. (28) $\text{Dét} \exp M_1[\theta, A, B] = \exp \{2 \cos \theta\}$

$\text{Dét} \exp M_2[\theta, A, B] = \exp \{2\ \text{ch}\ \theta\}$

La démonstration s'obtient en utilisant la relation

(29) $\text{Dét}\ e^M = e^{\text{Tr} M}$ pour une matrice M quelconque.

Nous voyons donc que $\text{Dét} \exp T[\theta, A, B]$ *ne dépend ni de A ni de B.*

CHAPITRE II

QUELQUES APPLICATIONS

Nous allons maintenant donner quelques applications des formules que nous venons d'établir. La première est la résolution d'un système de relations de récurrence dont nous donnons la solution générale. Nous montrerons que l'emploi du calcul matriciel en nous servant des formules générales que nous venons d'établir permet de simplifier les calculs apparaissant dans la transformation homogène de BOGOLIUBOV pour les bosons. Quant à l'utilisation de la mise sous forme de TWISS, nous nous limiterons à rappeler que cette méthode simplifie considérablement l'étude quantique, devenue maintenant classique, du mouvement d'une particule placée dans un potentiel périodique.

A. RELATIONS DE RÉCURRENCE COUPLÉES

Considérons le système de relations de récurrence suivant :

$$(30) \qquad \begin{cases} B_{n+1} = B_n\alpha + D_n\beta \\ D_{n+1} = B_n\alpha' + D_n\beta' \end{cases}$$

où les inconnues sont B_n et D_n, et α, β, α', β' sont donnés. Il existe deux méthodes pour résoudre ce système. La première, celle de l'élimination d'une des « inconnues » D ou B, est plus naturelle mais est cependant longue, nous pouvons simplifier les calculs à l'aide des fonctions génératrices. La seconde, matricielle, présente l'avantage d'être courte comparée à la première et d'être élégante.

1° Méthode de l'élimination

Nous éliminons D_{n+1} et D_n dans les trois expressions de B_{n+2}, B_{n+1} et D_{n+1}. B_n vérifie alors la relation de récurrence :

$$(31) \qquad B_{n+2} - 2s\,B_{n+1} + pB_n = 0 \quad \text{où}$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$$

$$p = \text{dét}\,M$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}$$

La résolution de (31) peut se faire en cherchant des solutions de la forme $B_n = \lambda r^n$. r est alors racine de l'équation caractéristique :

$$(32) \qquad r^2 - 2sr + p = 0$$

dont les racines r_1 et r_2 sont respectivement égales à $s + \sqrt{s^2 - p}$ et $s - \sqrt{s^2 - p}$. La discussion se ramène donc à celle d'une simple équation du deuxième degré. Et nous avons :

$$(33) \qquad \begin{cases} B_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n \\ D_n = \lambda_1' r^n + \lambda_2' r_2 \end{cases}$$

où
$$\lambda_1 = \frac{B_0 r_2 - B_1}{r_2 - r_1} \qquad \lambda' = \lambda_1 \frac{(r_1 - \alpha)}{\beta}$$

$$\lambda_2 = -\frac{(B_0 r_1 - B_1)}{r_2 - r_1} \qquad \lambda_2' = \lambda_2 \frac{(r_2 - \alpha)}{\beta}$$

B_0 et B_1 sont les conditions initiales pour B_n. Il est intéressant de calculer parfois les deux fonctions génératrices :

$$(34) \qquad \begin{cases} G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n \\ G'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} D_n \end{cases}$$

Nous obtenons immédiatement à partir de (33)

$$G(t) = \lambda_1 \exp(tr_1) + \lambda_2 \exp\{t r_2\}$$

$$G'(t) = \lambda_1' \exp(tr_1) + \lambda_2' \exp\{t r_2\}$$

et les conditions initiales B_0 et B_1 sont reliées à G (t) par :

$$B_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = G(0)$$

$$B_1 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = \left.\frac{\partial G}{\partial t}\right)_{t=0}$$

Si nous exprimons maintenant les racines r_1 et r_2 en fonction de $s = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$ et $p = \text{dét}\,M$, nous avons :

$$G(t) = \exp\{st\}\{g_1 \,\mathrm{cht}\sqrt{s^2 - p} + g_2\, sh\, t\sqrt{s^2 - p}\}$$

où : $g_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = B_0$

$$g_2 = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{B_0(r_2 + r_1) - 2B_1}{r_2 - r_1}$$

Si les racines sont distinctes (réelles ou complexes), toutes les formules écrites restent valables en remarquant que :

$\mathrm{ch}(\chi + iy) = \mathrm{ch}\,\chi \cos y + i\,\mathrm{sh}\,\chi \sin y$

$\mathrm{sh}(\chi + iy) = \mathrm{sh}\,\chi \cos y + i\,\mathrm{ch}\,\chi \sin y$ pour χ et y réels.

Dans le cas $s^2 - p = 0$ c'est-à-dire $(\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M)^2 = \text{dét}\,M$, nous avons la racine double $r_0 = s = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$. La solution B_n s'écrit alors :

$$B_n = (b_1 n + b_2) r_0^n$$

L'expression de D_n s'en déduit immédiatement. La méthode de résolution est à rapprocher de celle d'une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants.

2° Méthode matricielle

Nous pouvons résoudre le problème de façon matricielle. Introduisons la matrice colonne :

$$X_n = \begin{bmatrix} B_n \\ D_n \end{bmatrix} \quad \text{et la matrice } [M] = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{bmatrix}$$

La relation (30) s'écrit :

$$[X_{n+1}] = [M]\,[X_n] \tag{35}$$

d'où :

$$[X_{n+1}] = [X]^n\,[X_1]$$

Nous pouvons de même introduire la matrice génératrice :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}[M]^n = \exp\{tM\}$$

Le problème se ramène donc aux calculs des puissances entières de [M] et de exp [tM].

Pour ce faire, nous décomposons la matrice [M] sur une base des matrices 2×2, savoir les matrices $\vec{\sigma}$ de PAULI et la matrice unité $I = \sigma_0$:

$$M = \sum_{\mu=0}^{3} M_\mu \sigma_\mu \qquad \text{où les « composantes »}$$

$$M_\mu = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\{M\sigma_\mu\}$$

peuvent être réelles ou complexes. Nous avons intérêt à séparer la composante $M_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M$ des composantes $\vec{M} = (M_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\{M\,\sigma_i\})$ car la matrice identité σ_0 commute avec les matrices $\vec{\sigma}$. Les puissances de M peuvent alors se calculer en utilisant la formule du binôme :

$$(M_0\,\sigma_0 + \vec{\sigma}.\vec{M})^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (M_0)^p\,(\vec{\sigma}.\vec{M})^{n-p}$$

où $\binom{n}{p}$ est le nombre de combinaisons de n objets p à p. Le calcul du second terme $(\vec{\sigma}.\vec{M})^{n-p}$ peut se simplifier en utilisant les formules :

$$(\vec{\sigma}.\vec{M})^{2n} = (\vec{M}^2)^n$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{M})^{2n+1} = (\vec{M}^2)^n\,(\vec{\sigma}.\vec{M})$$

$$\text{où} \qquad \vec{M}^2 = \sum_{i=1}^{3} M_i M_i$$

Quant à l'expression de la matrice génératrice, elle se simplifie aussi :

$$S(t) = \exp\{t\,M_0\,\sigma_0 + t(\vec{\sigma}.\vec{M})\} = \exp\{t\,M_0\}\,.\,\exp\{t\,\vec{\sigma}.\,\vec{M}\}$$

$$\text{car} \quad e^{A+B} = e^A.e^B \quad \text{si} \quad [A, B]_- = 0$$

En utilisant la formule (11) nous avons :

$$S(t) = \exp\{t\,M_0\}\,\{\mathrm{ch}\,t\sqrt{\vec{M}^2} + \frac{\vec{\sigma}.\vec{M}}{\sqrt{\vec{M}^2}}\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\vec{M}^2}\}$$

où $\sqrt{\vec{M}^2}$ est une des racines de $\vec{M}^2$: le résultat est sans ambiguité malgré l'ambiguité sur le choix de la racine de $\vec{M}^2$.

Nous avons utilisé la décomposition sur les matrices σ_μ. Nous pouvons aussi utiliser la forme de TWISS. Nous supposons la matrice M régulière et de déterminant égal à 1 (si son déterminant n'est pas égal à 1, nous prendrons la matrice $[M'] = \frac{1}{(\text{dét } M)^{1/2}}[M]$ qui vérifie la condition requise). Nous la mettons sous la forme de TWISS (20) ou (21) suivant le cas :

$$[M] = T\,[\theta, A, B]$$

$$\text{et} \qquad [M]^n = T\,[N\theta, A, B]$$

B. APPLICATION A LA PHYSIQUE

Donnons maintenant deux applications physiques de ce que nous venons de démontrer. Le premier exemple est celui, très classique du mouvement d'une particule dans un réseau de particules (noyaux) (par exemple l'étude quantique d'un conducteur ou d'un semi-conducteur). Le réseau peut être assimilé à une succession périodiques de barrières et de puits de potentiel : en effet, la particule au voisinage d'un noyau est attirée par celui-ci et pour s'en écarter, il doit vaincre la force d'attraction. En première approximation, nous pouvons supposer que la hauteur et la largeur de la barrière ainsi que la profondeur et la largeur du puits sont constantes. En résolvant les équations de SCHRODINGER correspondantes et en écrivant les continuités des fonctions d'ondes et de leurs dérivées, nous pouvons écrire une relation matricielle récurrente de la forme :

$$\begin{vmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi'_{n+1} \end{vmatrix} = [M] \begin{vmatrix} \psi_n \\ \psi'_n \end{vmatrix}$$

où ψ_n et ψ'_n sont respectivement la fonction d'onde et la dérivée de la fonction d'onde de la particule quand elle passe du n ième au $(n+1)$ ième noyau et [M] est une matrice de déterminant égal à 1.

Cette relation a la même forme que la formule (35). Le problème peut être résolu facilement en mettant M sous la forme de TWISS (20-21).

Le second exemple a trait à la transformation utilisée en théorie de la seconde quantification dans l'étude de la théorie de la superconductivité (transformation de BOGOLIUBOV). Pour illustrer la méthode, nous allons donner le détail du processus de calcul dans le cas des bosons.

Il y a plusieurs façons d'introduire la transformation de BOGOLIUBOV. Nous l'abordons ici sous l'angle des transformations formellement unitaires en utilisant les opérateurs : $\vec{T}_{(l,\vec{k})} = \{T^i_{l,\vec{k}}\}$ pour $i = (1, 2, 3)$ que nous avons définis dans la référence [2]. Par ailleurs, nous avons donné les propriétés de ces opérateurs dont la plus importante est :

$$\text{(36)} \qquad \vec{T}_{l,\vec{k}} \wedge \vec{T}_{l,\vec{k}} = i\,\vec{T}_{l,\vec{k}}$$

Rappelons que $T^{(1)}_{l,\vec{k}}$ et $T^{(2)}_{l,\vec{k}}$ sont antihermitique tandis que $T^{(3)}_{l,\vec{k}}$ est hermitique. Cette relation est la même que la formule (2″) vérifiée par $\frac{\vec{\sigma}}{2}$. Nous envisageons ensuite l'opérateur antihermitique :

(37)
$$\tau = \sum_{\vec{k},\, l} \left\{ 2\,\theta^{1}_{l,\vec{k}} T^{(1)}_{l,\vec{k}} + 2\,\theta^{(2)}_{l,\vec{k}} T^{(2)}_{l,\vec{k}} + 2\,i\,\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} T^{(3)}_{l,\vec{k}} \right\}$$

Les $\theta^{i}_{l,k}$ étant les paramètres de la transformation de Bogoliubov. Les opérateurs d'annihilation α^{k}_{l} des quasi-bosons sont les transmués des opérateurs d'annihilation $a^{l}_{\vec{k}}$ des bosons par e^{τ} :

$$\text{(38)} \qquad \alpha^{l}_{\vec{k}} = e^{\tau}\, a^{l}_{\vec{k}}\, e^{-\tau}$$

Pour effectuer les calculs, nous introduisons l'opérateur générateur $e^{\rho\tau}$ et nous calculons $\alpha^{l}_{\vec{k}}(\rho) = e^{\rho\tau} a^{l}_{\vec{k}} e^{-\rho\tau}$. La formule de Lee-Dyson donne :

$$\text{(39)} \qquad e^{\rho\tau} a^{l}_{\vec{k}}\, e^{-\rho\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \tau^{(n)}_{a}$$

(40) où

$$\tau^{(n)}_{a} = \underbrace{[\tau, [\tau, [\tau, [\tau, [\tau, a^{l}_{\vec{k}}]]]]]}_{\exists n \text{ commutateurs}} \text{ est le commutateur}$$

d'ordre n de τ par rapport à $a^{l}_{\vec{k}}$.

Le calcul de $\tau^{(n)}_{a}$ peut se faire facilement en utilisant ce que nous avons établi plus haut. En effet, désignant par $a^{l\,+}_{-k}$ le conjugué hermitique de a^{l}_{-k}, nous obtenons les relations suivantes :

$$\tau^{(1)}_{a} \equiv [\tau, a^{l}_{\vec{k}}]_{-} = -\,i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} a^{l}_{\vec{k}} + (\theta^{(2)}_{l,\vec{k}} + i\theta^{(1)}_{l,\vec{k}})\, a^{l\,+}_{-\vec{k}}$$

$$\tau^{(1)}_{a^+} \equiv [\tau, a^{l\,+}_{-\vec{k}}]_{-} = i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} a^{l\,+}_{-\vec{k}} + (\theta^{(2)}_{l,\vec{k}} - i\theta^{(1)}_{l,\vec{k}})\, a^{l}_{\vec{k}}$$

Remarquons que la seconde formule peut s'obtenir de la première par conjugaison hermitique et en changeant l'impulsion $\vec{k} \to -\vec{k}$.

Pour calculer le commutateur $\tau^{(n)}_{a\,(a^+)}$ d'ordre n de τ par rapport à a^{l}_{k} ($a^{l\,+}_{k}$), nous allons raisonner par récurrence. Posons :

$$\tau^{(n)}_{a} = B_n\, a^{l}_{\vec{k}} + D_n\, a^{l\,+}_{-\vec{k}}$$

B_n et D_n sont respectivement les coefficients de $a^{l}_{\vec{k}}$ et de $a^{l\,+}_{-\vec{k}}$ dans l'expression de $\tau^{(n)}_{a}$.

Le commutateur $\tau^{(n+1)}_{a}$ d'ordre $(n+1)$ de τ par rapport à $a^{l}_{\vec{k}}$ est :

$$\tau^{(n+1)}_{a} \equiv [\tau, \tau^{(n)}_{a}] \equiv B_{n+1}\, a^{l}_{\vec{k}} + D_{n+1}\, a^{l\,+}_{-\vec{k}}$$

et nous obtenons pour les coefficients B_n et D_n les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} B_{n+1} = -\,i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} B_n + (-\,i\theta^{(1)}_{l,\vec{k}} + \theta^{(2)}_{l,\vec{k}})\, D_n \\ D_{n+1} = (i\theta^{(1)}_{l,\vec{k}} + \theta^{(2)}_{l,\vec{k}})\, B_n + i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} D_n \end{cases}$$

Ces dernières ont la même forme que les relations (30) avec comme matrice M :

$$[M] = \begin{bmatrix} -\,i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} & -\,i\,\theta^{(1)}_{l,\vec{k}} + \theta^{(2)}_{l,\vec{k}} \\ i\theta^{(1)}_{l,\vec{k}} + \theta^{(2)}_{l,\vec{k}} & i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}} \end{bmatrix} = \vec{\sigma}\,.\,\vec{\theta} \text{ où } \vec{\theta} = (\theta^{(2)}_{l,\vec{k}}, \theta^{(1)}_{l,\vec{k}}, -\,i\theta^{(3)}_{l,\vec{k}})$$

si nous décomposons M sur les matrices $\vec{\sigma}$ de Pauli.

Les relations de récurrence se résolvent donc facilement. Les fonctions génératrices :

$$\text{(41)} \qquad \begin{vmatrix} G_a(\rho) \\ G'_a(\rho) \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \begin{vmatrix} B_n \\ D_n \end{vmatrix}$$

donnent :

$$\text{(42)} \qquad \begin{vmatrix} G_a(\rho) \\ G'_a(\rho) \end{vmatrix} = \exp \{\rho\, \vec{\sigma}\,.\,\vec{\theta}\} \begin{vmatrix} B_0 \\ D_0 \end{vmatrix}$$

Comme :

$$\exp\{\rho\,\vec{\sigma}\,.\,\vec{\theta}\} = \mathrm{ch}\,\rho\,\theta\, I + \frac{\vec{\sigma}\,.\,\vec{\theta}}{\theta}\,\mathrm{sh}\,\rho\,\theta$$

$$\text{où } \theta = \sqrt{(\theta\,(^2)^2 + \theta\,(^1)^2 - \theta\,(^3)^2}$$

nous obtenons les fonctions génératrices $G(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} B_n$ et $G'(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} D_n$ par la relation matricielle :

$$\text{(43)} \qquad \begin{vmatrix} G_a(\rho) \\ G'_a(\rho) \end{vmatrix} = [\mathrm{ch}\,\rho\,\theta\, I + \frac{\vec{\sigma}\,.\,\vec{\theta}}{\theta}\,\mathrm{sh}\,\rho\,\theta] \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Pour $a^{l+}_{-\vec{k}}$ nous devons prendre le vecteur-colonne $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ au lieu de $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Le calcul de (39) est alors terminé ; en effet :

$$e^{\rho\tau} a^{l}_{\vec{k}} e^{-\rho\tau} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} B_n) a^{l}_{\vec{k}} + (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} D_n) a^{l+}_{-\vec{k}}$$
$$= G_a(\rho) a^{l}_{\vec{k}} + G'_a(\rho) a^{l+}_{-\vec{k}}$$

où $G_a(\rho)$ et $G'_a(\rho)$ sont les fonctions génératrices définies au (41-42-43). Donc, nous avons :

$$\alpha^{l}_{\vec{k}}(\rho) = (\text{ch}\,\rho\,\theta - i\frac{\theta^{(3)}}{\theta}\text{sh}\,\rho\,\theta)\, a^{l}_{\vec{k}} + \frac{\theta^{(2)} + i\theta^{(1)}}{\theta}\text{sh}\,\rho\,\theta\, a^{l+}_{-\vec{k}}$$

$$\alpha^{l+}_{-\vec{k}}(\rho) = \frac{(\theta^{(2)} - i\theta^{(1)})}{\theta}\text{sh}\,\rho\,\theta\, a^{l}_{\vec{k}} + (\text{ch}\,\rho\,\theta + i\frac{\theta^{(3)}}{\theta}\text{sh}\,\rho\,\theta)\, a^{l+}_{-\vec{k}}$$

et le résultat final s'obtient en posant dans ces deux relations $\rho = 1$.

Nous voyons ici l'intérêt de la décomposition sur les matrices $(\vec{\sigma}, I)$ qui simplifie considérablement le calcul. Bien entendu, le calcul direct de (38) peut se faire mais est compliqué alors qu'ici nous voyons que nous avons pu simplifier considérablement le calcul par la méthode matricielle et l'introduction des fonctions génératrices $G_a(\rho)$ et $G'_a(\rho)$.

APPENDICE A

Les formules (20) et (21) peuvent être généralisées au cas des matrices complexes. Une matrice carrée M (réelle ou complexe) quelconque régulière de dimension 2 peut être mise sous la forme :

$$\text{(A1)} \qquad \left[M\right] = (\text{dét } M)^{1/2} \left[\boldsymbol{m}(\theta, A, B)\right]$$

$$\text{où} \quad \equiv \left[\boldsymbol{m}(\theta, A, B)\right] \equiv \begin{bmatrix} \text{ch}\theta + A\,\text{sh}\theta & \frac{1 - A^2}{B}\text{sh}\,\theta \\ B\,\text{sh}\theta & \text{ch}\theta - A\,\text{sh}\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{ch}\theta \equiv \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \equiv \tfrac{1}{2}\text{Tr}\,M$$

$$B = m_{21}\frac{1}{\text{sh}\,\theta}$$

$$A = (m_{11} - m_{22})\frac{1}{2\,\text{sh}\,\theta}$$

où les paramètres θ, A et B sont complexes ; $(\det M)^{1/2}$ est une des deux déterminations des racines de dét M.

L'intérêt de la mise en évidence du paramètre θ réside dans la relation suivante :

$$\text{(A2)} \quad = \prod_{i=1}^{n}\left[M(\theta_i, A, B)\right]$$
$$= (\prod_{i=1}^{n} \text{dét } M_i)^{1/2}\left[\boldsymbol{m}(\sum_{i=1}^{n}\theta_i, A, B)\right]$$

où $\prod_{i=1}^{n}$ désigne le produit de n matrices carrées $M(\theta_i, A, B)$ mises sous la forme (A1) et qui ont les les mêmes paramètres A et B. La démonstration de la formule (A2) par récurrence est facile.

Remarques

1° La mise sous la forme (A1) d'une matrice M quelconque n'est pas unique. En effet $(\text{dét } M)^{1/2}$ est à deux déterminations, θ est aussi à deux déterminations logarithmiques. En effet :

$$\theta = \text{Log}\,t = \text{Log}\,|t| + i(\arg t + 2\,k\pi)$$

$$\text{où} \quad t = \tfrac{1}{2}\text{Tr}M + \left[(\tfrac{1}{2}\text{Tr}M)^2 - 1\right]^{1/2}$$

2° Dans le cas où la matrice M est *réelle*, θ peut être réel ou complexe. En effet,

— si $(\frac{1}{2}\text{Tr}M)^2 - 1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $|\frac{1}{2}\text{Tr}\,M| \geqslant 1$, alors t est réel donc θ est aussi réel. Et nous retrouvons la décomposition (21).

— si $(\frac{1}{2}\text{Tr}\,M)^2 - 1 \leqslant 0$ c'est-à-dire $|\frac{1}{2}\text{Tr}\,M| \leqslant 1$, alors t est complexe. Nous trouvons aussi que $|t| = 1$ de sorte que θ est imaginaire pur, et nous retrouvons la décomposition (20).

La puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice M quelconque se calcule alors aisément. En effet, nous la mettons sous la forme (A1) et nous obtenons immédiatement par application de la relation (A. 2) :

$$[M]^n = (\text{dét } M)^{n/2}\left[\boldsymbol{m}(n\theta, A, B)\right]$$

APPENDICE B

L'expression de :

$$\text{(B.1)} \quad S(t) = \exp\{t\,M\} = (\exp t\,M)\,(I\,\text{ch}\,t\sqrt{\vec{M}^2} + \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{M}}{\sqrt{\vec{M}^2}}\text{sh}\,t\sqrt{\vec{M}^2})$$

que nous avons donnée dans le chapitre (II. A 2e) peut encore s'écrire sous la forme suivante en exprimant tout en fonction de la matrice M *seule :*

(B.2)

$$\exp\left\{t\,\mathrm{M}\right\} = \exp\left\{\frac{t}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}\right\}\left\{\mathrm{I}\left(\mathrm{ch}t\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{sh}t\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2}}{\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2}}\right) + \mathrm{M}\,\frac{\mathrm{sh}t\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2}}{\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2}}\right\}$$

où $\vec{\mathrm{M}}^2 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{M}_i \mathrm{M}_i = (\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M})^2 - \mathrm{dét}\,\mathrm{M} =$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}^2 - (\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\mathrm{M})^2$$

Démonstration :

a. Calculons d'abord $\vec{\mathrm{M}}^2$

$$\mathrm{M}_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\{\sigma_i\,\mathrm{M}\}$$

$$\vec{\mathrm{M}}^2 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{M}_i\,\mathrm{M}_i$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{\substack{a,\,\alpha \\ b,\,\beta}} \sum_{i=1}^{3} (\sigma_i)_{\alpha a}\,(\mathrm{M})_{a\alpha}\,(\sigma_i)_{\beta b}(\mathrm{M})_{b\beta}$$

En utilisant la relation (13''), nous obtenons :

$$\vec{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}^2 - (\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\mathrm{M})^2$$

Si nous calculons maintenant le second membre de façon explicite, nous trouvons :

$$\vec{\mathrm{M}}^2 = (\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\mathrm{M})^2 - \mathrm{dét}\,\mathrm{M}$$

b. Pour obtenir la formule (B.2), il suffit maintenant de remplacer dans l'expression (B.1) :

$$\vec{\sigma}\,.\,\vec{\mathrm{M}} = \mathrm{M} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}\,.\,\mathrm{I}$$

Nous avons encore la relation suivante :

(B.3) $$\mathrm{Tr}\exp t\mathrm{M} = 2\,.\,\mathrm{ch}t\sqrt{\vec{\mathrm{M}}^2}\exp\left(\frac{t}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}\right)$$

(Remarquons que $\mathrm{dét}\exp\{t\mathrm{M}\} = \exp\mathrm{Tr}\,\mathrm{M}$)

Démonstration de (B.3) :

On peut l'obtenir de deux façons.

1° La première façon consiste à prendre tout simplement la Trace des deux membres de (B.2)

2° La seconde façon, qui est directe, fait appel à l'invariance de la Trace par un changement de base B. Nous effectuons le changement de base B de façon que M soit diagonale :

$$\mathrm{BMB}^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{vmatrix}$$ où λ_+ et λ_-

sont les valeurs propres de M, déterminées par l'équation aux valeurs propres $\mathrm{dét}\,(\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}) = 0$

λ_+ et λ_- sont les deux racines de l'équation :

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,\mathrm{M}\,\lambda + \mathrm{dét}\,\mathrm{M} = 0$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M} \pm \sqrt{(\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{M})^2 - \mathrm{dét}\,\mathrm{M}}$$

$$\mathrm{Tr}\exp t\,\mathrm{M} = \mathrm{Tr}\exp t\,\mathrm{BMB}^{-1} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} e^{\lambda+t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda-t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{\lambda+t} + e^{\lambda-t}$$

Si nous remplaçons λ_+ et λ_- par leurs expressions, nous obtenons alors (B.3).

Manuscrit reçu, le 15 mai 1971.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.-Y. Bernard. *Initiation à la Mécanique Quantique.* Librairie Hachette (1960).

[2] Raoelina Andriambololona. — C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965) 5205.

Raoelina Andriambololona. — *Thèse de doctorat d'Etat.* Faculté des Sciences de Marseille (1967).

Pour la transformation de Bogoliubov, voir par exemple

N.-N. Bogoliubov Soviet Phys. J.E.T.P. *34* (1958) 41-51.

N.-N. Bogoliubov — Tolmachev — D.-V. Shirkov — Anew method in the theory of supraconductivit (Consultants Bureau 1959).