COMMENTAIRES SUR UNE ERREUR

PAR

Jean FRONTEAU

(Laboratoire de Physique)

RÉSUMÉ

Commentaires sur une erreur qui a été trouvée dans un précédent article.

ABSTRACT

Comments on an error which has been found in a preceding paper.

Dans l'article (1) intitulé *Une conséquence de l'interprétation causale de la Mécanique Ondulatoire*, l'auteur parvenait à décomposer l'une des relations fondamentales de l'interprétation causale, $M_0^2 = m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\Box a}{a}$, en deux relations : $M_0^2 = ka$ et $m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\Box a}{a} = ka$. L'apparition d'une équation aux dérivées partielles non linéaire et portant uniquement sur le module de la fonction d'onde était fort surprenante, et les spécialistes de la question avaient dès le premier abord repoussé cette conclusion. Louis de BROGLIE (2) avait affirmé par deux fois qu'il y avait une erreur dans le raisonnement, mais sans parvenir à la déceler. Francis FER (3) avait jugé contradictoires, si j'ai bien compris, les paragraphes IV-1/*a* et IV-1/*b* parce que, dans le premier, les u_μ et les x_μ ne sont pas indépendants, et qu'ils le deviennent dans le second. Plus tard, et indépendamment, John S. BELL (4) a situé l'erreur au même endroit, et son raisonnement, quoique plus détaillé, fait cependant appel, me semble-t-il, à la même idée. *J. S. Bell en conclut qu'on n'a pas le droit d'identifier le jacobien J_8 du paragraphe III au jacobien J_8 du paragraphe IV.* Je suis aujourd'hui convaincu que cette conclusion de J. S. BELL est exacte, quoique je ne reprenne pas l'argumentation de F. FER et J. S. BELL. En effet, lorsqu'on écrit un système différentiel du second ordre sous forme d'un système du premier ordre équivalent, les variables x_μ u_μ qui figurent dans ce nouveau système sont indépendantes, par définition, et ce quel que soit le système différentiel original.

L'erreur me paraît être en réalité la suivante. Lorsque je déduis du système $dx_\mu/d\tau = f_\mu\ (x_\nu)$ le système $d^2x^\mu/d\tau^2 = \sum\limits_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau}$ (*cf.* paragraphe IV-1/*b*), j'oublie que ce système du second ordre n'est pas le seul qui découle du système du premier ordre, et que la relation $J_4 = C_2\, J_8$ que fournit le théorème de LIOUVILLE n'est donc pas la seule possible. Utiliser ce système particulier du second ordre, c'est imposer une certaine relation entre J_4 et J_8 ; c'est donc introduire un postulat nouveau, de sorte que les conclusions qui suivent ne découlent pas seulement de l'Interprétation Causale, mais aussi d'une *hypothèse supplémentaire* qui lui est extérieure.

Il suffit pour se convaincre de considérer les deux cas suivants qui conduisent à des conclusions radicalement opposées (et ces deux cas ne sont encore que des cas particuliers choisis parmi une infinité d'autres) :

$dx_\mu/d\tau = f_\mu\ (x_\nu)$	$dx_\mu/d\tau = f_\mu\ (x_\nu)$
d'où :	
$d^2x_\mu/d\tau^2 = \sum\limits_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{d\tau}$	$d^2x_\mu/d\tau^2 = \sum\limits_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} f_\nu$
ou :	
$\begin{cases} dx_\mu/d\tau = u_\mu \\ du_\mu/d\tau = \sum\limits_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} u_\nu \end{cases}$	$\begin{cases} dx_\mu/d\tau = u_\mu \\ du_\mu/d\tau = \sum\limits_\nu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} f_\nu \end{cases}$
d'où encore, du fait du théorème de LIOUVILLE :	
$\frac{d}{d\tau}\mathrm{Log}\, J_8 = \sum\limits_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{d}{d\tau}\mathrm{Log}\, J_4$	$\frac{d}{d\tau}\mathrm{Log}\ J_8 = 0$
$\boxed{J_4 = C_2\ J_8}$	$\boxed{J_8 = 1}$

Le jacobien J_8 dépend du système différentiel du second ordre que l'on choisit.

Illustrons ceci par le cas élémentaire suivant :

1. — Equation du premier ordre considérée

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \qquad \alpha = \text{Constante}$$

$$\text{Div}_1 = \alpha \longrightarrow \boxed{J_1 = e^{\alpha t}}$$

L'équation s'intègre et donne : $x = x_0\, e^{\alpha t}$

On vérifie que : $J_1 = \dfrac{D(x)}{D(x_0)} = e^{\alpha t}$

2. — Première équation dérivée

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{dx}{dt}$$

ou :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{du}{dt} &= \alpha u \end{aligned}\right. \longrightarrow \text{Div}_2 = \alpha \longrightarrow \boxed{J_2 = e^{\alpha t} = J_1}$$

L'intégration fournit :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie que $J_2 = e^{\alpha t}$.

On remarque aussi que si les conditions initiales satisfont à $x'_0 = \alpha x_0$, la solution se réduit à la solution de l'équation originelle du premier ordre. En effet :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\, x'_0 \\ x'_0 &= \alpha\, x_0 \end{aligned}\right.$$

d'où :

$$x = x_0 + \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\, \alpha x_0 = e^{\alpha t} x_0$$

3. — Seconde équation dérivée

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha\,(\alpha x)$$ (en dérivant, et en remplaçant la dérivée première par sa valeur)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha^2 x = 0$$

$$\text{ou} \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{du}{dt} &= \alpha^2 x \end{aligned}\right. \longrightarrow \text{Div}_2 = 0 \longrightarrow \boxed{J_2 = 1 \neq J_1}$$

Après intégration, il vient :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\ \alpha t & \frac{1}{\alpha}\, sh\ \alpha t \\ \alpha\, sh\ \alpha t & ch\ \alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $J_2 = 1$, et l'on remarque encore que l'on retrouve la solution de l'équation originelle du premier ordre si $x'_0 = \alpha x_0$. En effet :

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0\, ch\ \alpha t + \frac{x'_0}{\alpha}\, sh\ \alpha t \\ x'_0 &= \alpha\ x_0 \end{aligned}\right.$$

d'où :

$$x = x_0\, ch\ \alpha t + x_0\, sh\ \alpha t = x_0\, e^{\alpha t}$$

4. — Equations dérivées par diverses combinaisons linéaires

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \quad \begin{matrix} \nearrow & \dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha \dfrac{dx}{dt} \\ \searrow & \dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x \end{matrix}$$

On en déduit :

$$\left\{\begin{aligned} m\, \frac{d^2x}{dt^2} &= m\ \alpha\, \frac{dx}{dt} \\ n\, \frac{d^2x}{dt^2} &= n\ \alpha^2\ x \end{aligned}\right.$$

et, par addition, si $(m + n) \neq 0$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{m}{m+n}\, \alpha \frac{dx}{dt} - \frac{n}{m+n}\, \alpha^2 x = 0$$

ou :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u \\ \frac{du}{dt} &= \frac{m}{m+n}\, \alpha u + \frac{n}{m+n}\, \alpha^2 x \end{aligned}\right.$$

Il vient alors :

$$\text{Div}_2 = \frac{m}{m+n}\, \alpha \longrightarrow \boxed{J_2 = e^{\frac{m}{m+n}\alpha t} \neq J_1}$$

Le jacobien J_2 dépend de l'équation différentielle du second ordre que l'on choisit.

En guise de conclusion, revenons à J_8. Une question se pose, me semble-t-il, et c'est la suivante : *du fait qu'il existe différents systèmes différentiels qui conduisent à des relations différentes entre J_4 et J_8, faut-il renoncer définitivement à toute* *relation entre J_4 et J_8, ou bien peut-on penser au contraire que des raisons physiques seraient susceptibles d'imposer le choix de l'un des systèmes, à l'exclusion de tous les autres ?*

Je remercie Messieurs Louis de Broglie, Francis Fer et John S. Bell qui m'ont amené, par leurs critiques, à me pencher de nouveau sur la question, ainsi que mon collègue mathématicien Boubakar Ba qui, à Tananarive, m'a aidé à analyser l'erreur qui m'avait été signalée.

Manuscrit remis, le 8 mai **1971.**

RÉFÉRENCES

(1) J. Fronteau. *Une conséquence de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire.* « Annales de l'Université de Madagascar » (série Sciences de la nature et Mathématiques) *8*, 23 (1971).

(2) L. de Broglie. Communications privées, 1er avril 1970 et 15 avril 1971.

(3) F. Fer. Communication privée, 22 mai 1970.

(4) J. S. Bell. Communication privée, 22 avril 1971.