

SUR CERTAINES APPLICATIONS DE LA FORMULE DE GREEN

PAR

Antoine PACQUEMENT

(Service de Mathématiques)

RÉSUMÉ

Les conditions de validité de la formule de GREEN revêtent de l'importance dans les deux questions suivantes :

1. Conditions de monogénéité d'une fonction de variable complexe.
2. Conditions pour qu'une forme différentielle dans R^2 soit une différentielle totale.

Nous consacrerons une étude à chaque question :

— Dans la première étude, partant d'inégalités dues à MENCHOFF, et utilisant la récurrence transfinie, nous établissons des conditions de monogénéité très générales, groupant les diverses hypothèses formulées par MONTEL, étendant les conditions de validité de LOOMAN-MENCHOFF, et couvrant pratiquement celles de BESICOVITCH.

— Dans la deuxième étude, utilisant un procédé qui dérive de la totalisation, que nous dénommons série-A, nous montrons qu'une forme différentielle dont la divergence est nulle et les coefficients à dérivées finies est une différentielle exacte.

ABSTRACT

The cases in which the GREEN formula is applied are of two main types :

1. Conditions for a complex valued function to be holomorphic.
2. Conditions for two functions to be the partial derivatives of a function of two variables.

We study separately each problem :

— First, using MENCHOFF's inequalities, combined with transfinite induction, we reach conditions of great generality for a function to be holomorphic,

which include the hypotheses of MONTEL, the conditions of LOOMAN-MENCHOFF and cover partially those of BESICOVITCH.

— Then, using a process derived from D-integration, which we call A-sequences, we prove that a differential in two variables is that of a function, if its coefficients have finite derivatives that are equal.

INTRODUCTION

La totalisation trouve un emploi tout indiqué dans l'étude des conditions de validité de la formule de GREEN.

Soit q_0 un intervalle fermé de R^2 ($a_0 < x < b_0$; $c_0 < y < d_0$), la formule de GREEN :

$$\iint_{q_0} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\Delta q_0} u dx + v dy$$

est acquise en vertu du théorème de FUBINI si $\frac{\partial v}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) sont sommables (ou totalisables) par rapport à l'ensemble des deux variables x et y .

Quand on abandonne ces hypothèses on se heurte à des difficultés que la théorie classique de l'intégration ne permet pas de résoudre. Par contre, le calcul totalisant trouve ici son domaine d'application.

Nous consacrerons à la formule de GREEN deux études :

I. Première étude (Section 1).

Cette étude vise à obtenir des conditions de monogénéité d'une fonction de variable complexe dans un domaine, généralisant autant que cela a paru possible le théorème de CAUCHY-GOURSAT.

En conséquence nous avons supposé les fonctions u et v partiellement dérivables par rapport à chacune des variables, sauf aux points d'un ensemble exceptionnel, Γ .

Nous utilisons un principe dû à MENCHOFF, qui joint au calcul totalisant, donne la validité de la formule de GREEN, lorsque

- i) la divergence est sommable.
- ii) les fonctions u et v sont bornées.

C'est M. MONTEL qui dans le cas des fonctions analytiques a avancé la suffisance de cette dernière hypothèse, énoncé qui a été prouvé par G.-P. TOLSTOV dans le cas où l'ensemble exceptionnel Γ est au plus dénombrable.

2. Deuxième étude (Section 2).

Nous cherchons les conditions pour que la forme linéaire

$$\omega = u dx + v dy$$

soit fermée dans un domaine plan.

Nous obtiendrons des énoncés valables dans le cas de u et v continues, (resp. continues et A.C.G.), les dérivées partielles générales (resp. approximatives) $\frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}$ existent partout (resp. presque partout).

Les considérations permettront d'obtenir certains cas de validité (que nous croyons originaux) de la formule de GREEN.

Remarque : Notons que K. MENCER a obtenu des énoncés très généraux concernant la monogénéité (resp. la validité de la formule de GREEN). Il suffit à cet effet de construire dans le rectangle q_0 un maillage vérifiant certaines propriétés.

Mais cet auteur n'indique pas de cas précis où l'application de sa méthode conduit effectivement à des résultats inédits.

SECTION I. — LE THÉORÈME DE MENCHOFF ET SES EXTENSIONS

La méthode de MENCHOFF réside dans le lemme suivant, dont nous donnons un énoncé sous une forme légèrement plus générale que la forme initiale, en nous inspirant d'une remarque de SAKS.

Dans cet énoncé, R désignera un carré de côtés parallèles aux axes, F un sous-ensemble fermé de R ; $x_1, x_2; y_1, y_2$ les abscisses et ordonnées des côtés du plus petit intervalle rectangulaire q_r , tel que

$$F \subset \bar{q}_r$$

On a alors le

LEMME 1 (MENCHOFF). — $\omega(x, y)$ étant une fonction réelle, continue séparément en x et en y , définie dans le carré fermé R , et dont les nombres

dérivés partiels extrêmes sont partout finis sur R , F un sous-ensemble fermé de R , tel que l'on ait, M étant une constante positive, les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\omega(x+h, y) - \omega(x, y)| &< M |h| \\ |\omega(x, y+k) - \omega(x, y)| &< M |k| \end{aligned}$$

pour tous les points $(x, y) \in F$ et les points $(x+h, y)$ et $(x, y+k)$ de R , on a les inégalités :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_2}^{x_1} [\omega(x, y_2) - \omega(x, y_1)] dx \right. \\ & \left. - \iint_F \frac{\partial_1 \omega}{\partial y} dx \wedge dy \right| < 5M \text{mes}(R - F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{y_1}^{y_2} [\omega(x_2, y) - \omega(x_1, y)] dy \right. \\ & \left. - \iint_F \frac{\partial_2 \omega}{\partial x} dx \wedge dy \right| < 5M \text{mes}(R - F) \end{aligned}$$

où $\frac{\partial_1 \omega}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial_2 \omega}{\partial y}$), désigne l'un quelconque des nombres dérivés extrêmes de ω par rapport à x (resp. par rapport à y), ou bien entendu la dérivée générale si ω est dérivable au sens ordinaire par rapport à x (resp. par rapport à y).

A partir de cet énoncé, MENCHOFF a déduit un important théorème sur les fonctions analytiques, qui dans le cas des formes différentielles conduit au

THÉORÈME 1 (DE MENCHOFF). — Si u et v sont deux fonctions continues dans q_0 possédant des dérivées partielles générales finies en x et en y , excepté aux points d'un ensemble au plus dénombrable D , et si l'on a presque partout l'égalité.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

alors pour tout intervalle $q \subset q_0$, on a l'égalité

$$\int_{\Delta q} u dx + v dy = 0.$$

Pour fixer les idées q sera supposé fermé, Δq désigne la frontière de q . Le théorème de MENCHOFF dont on trouve la démonstration pour le cas des fonctions analytiques dans le traité de SAKS, est un cas particulier du cas de validité ci-après de la formule de GREEN.

THÉORÈME 2. — Si u et v sont deux fonctions continues sur q_0 , possédant des nombres dérivés extrêmes finis par rapport à chacune des variables x et y , excepté aux points d'un ensemble Γ_0 contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles fermés rectifiables, alors

1° les dérivées partielles générales $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ finies existent presque partout dans q_0

2° si la divergence

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

est sommable dans q_0 , on a pour tout sous-intervalle rectangulaire, $q \subset q_0$ l'égalité

$$\iint_q \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\Delta q} u dx + v dy$$

Démonstration : on peut écrire

$$\Gamma_0 \subset \Gamma = \bigcup_{p=1}^{\infty} \Gamma_p$$

où les (Γ_p) sont rectifiables fermés.

Il est clair que Γ est de mesure nulle, aussi suffira-t-il de vérifier l'existence des dérivées presque partout dans $q_0 - \Gamma_0$.

Définissons ensuite avec MENCHOFF les ensembles (P_m) .

On désignera par P_m , l'ensemble des points $(x, y) \in q_0$ pour lesquelles chacune des valeurs absolues

$$\begin{aligned} &|u(x, y + h) - u(x, y)|, |u(x + h, y) - u(x, y)| \\ &|v(x, y + h) - v(x, y)|, |v(x + h, y) - v(x, y)| \end{aligned}$$

ne dépasse pas $m|h|$, pour $|h| < \frac{1}{m}$, m entier positif.

En vertu de la continuité de u et v , chacun des ensembles (P_m) est fermé, et on a :

$$q_0 = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right) \cup \Gamma = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m \right) \cup \left(\bigcup_{p=1}^{\infty} \Gamma_p \right)$$

En vertu du théorème de BAIRE, il existe un ouvert O partout dense dans q_0 , tel que, tout $q \subset O$ est inclus soit dans l'un des (P_m) soit dans l'un des (Γ_p) .

Les Γ_p étant sans points intérieurs, il s'ensuit que ces intervalles $q \subset O$ appartiennent à l'un des (P_m)

Sur chacun de ces intervalles les dérivées extrêmes de u (resp. de v) sont finis (bornés). Il résulte alors d'un théorème de P. MONTEL, que sur les sections q_x (resp. q_y) les dérivés extrêmes de v par rapport à x (de u par rapport à y) sont égaux presque partout.

Comme en outre, ces nombres dérivés extrêmes sont mesurables dès que u (resp. v) le sont, $\frac{\partial v}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) existe et est borné presque partout dans q ; et on peut appliquer à q la formule de GREEN :

$$\iint_q \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\Delta q} u dx + v dy$$

Prouvons que les intervalles $\overset{\circ}{q}$, engendrent une famille Φ vérifiant les conditions du Lemme de ROMANOVSKI.

Il est clair que l'axiome (i) est vérifié. Il est de même de (ii) si on l'applique à deux rectangles non empiétant ayant un côté commun. (iii) résulte de la continuité de u et v d'une part (continuité de l'intégrale simple) et de l'absolue continuité de la fonction d'intervalle $\iint_q \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$ d'autre part, puisque nous avons supposé la divergence sommable.

Tout revient à vérifier l'axiome (iv).

Appelant Φ_0 la famille maximale engendrée par Φ , $(q_i)_{i \in I}$ les éléments de Φ_0 , il faut prouver que Φ_0 comprend tous les sous-intervalles $\overset{\circ}{q}$, $q \subset q_0$.

Soit $\Omega = \overset{\circ}{\bigcup} q_i$; il faut prouver que $\Omega = \overset{\circ}{q}_0$.

Faisons l'hypothèse contraire. $q_0 - \Omega$ est un parfait ${}^{\circ}\Omega$ tel que

$${}^{\circ}\Omega \subset \left(\bigcup_m P_m \right) \cup \left(\bigcup_p \Gamma_p \right)$$

En vertu du théorème de BAIRE, il existe une portion

$$\Pi = q \cap {}^{\circ}\Omega$$

qui est incluse dans l'un des (P_m) ou dans l'un des (Γ_p) .

Montrons que dans chaque hypothèse $q \in \Phi$ ce qui prouvera (iv).

Premier cas :

$\Pi \subset P_N$, $P_N \in (P_m)$. On ne restreint pas la généralité en supposant les dimensions de q commensurables.

Divisons q en p carrés égaux, les $(R_n)_{n < p}$; ceux-ci sont de deux catégories

- les (R_k) contenant à leur intérieur des points de Π
- les (R_l) disjointes de Π .

Posons $E_k = \bigcup_k R_k - \Pi$,

on a, la mesure du fermé Π étant égale à sa mesure extérieure de JORDAN : $\lim_{p \rightarrow \infty} (\text{mes } E_k) = 0$.

Or d'après les inégalités de MENCHOFF (lemme 1) appliquées à chaque carré R_k et au fermé $R_k \cap \Pi$, q_k étant le plus petit intervalle rectangulaire tel que $R_k \cap \Pi \subset q_k$

on peut écrire :

$$(1) \quad \int_{\Delta q_k} u \, dx + v \, dy \\ = \iint_{q_k \cap \Pi} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \varepsilon_k$$

avec $|\varepsilon_k| < 10 N \text{ mes } (R_k - R_k \cap \Pi)$ (on a $R_k \cap \Pi = q_k \cap \Pi$).

Nous allons transformer l'égalité (1) de façon à y remplacer q_k par R_k .

Il est clair en effet que R_k admet une décomposition finie de la forme

$$R_k = q_k \cup (\cup_j K_j) \quad j < 8$$

et les K_j étant des intervalles non empiétant tels que $\overset{\circ}{K}_j \in \Phi_0$.

On a donc pour tout j

$$\int_{\Delta K_j} u \, dx + v \, dy \\ = \iint_{K_j} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

d'où par additivité finie avec (1)

$$(2) \quad \int_{\Delta R_k} u \, dx + v \, dy \\ = \iint_{R_k} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ - \iint_{[q_k - q_k \cap \Pi]} \left[\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right] (dx \wedge dy) + \varepsilon_k$$

Pour les (R_l) intérieurs à q , la formule de GREEN est applicable, soit

$$(3) \quad \int_{\Delta R_l} u \, dx + v \, dy \\ = \iint_{R_l} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ = \iint_{R_l} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Les (R_n) étant en nombre fini on peut ajouter les égalités (2) et (3) en faisant la sommation par rapport aux indices k et l . Il vient ainsi d'abord

$$(4) \quad \int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy \\ - \iint_q \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

$$= \sum_l \left[\int_{\Delta R_l} u \, dx + v \, dy \right. \\ \left. - \iint_{R_l} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right] \\ + \sum_k \left[\int_{\Delta R_k} u \, dx + v \, dy \right. \\ \left. - \iint_{R_k} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right]$$

La sommation en l donne un total nul, en vertu de (3).

La somme restante peut s'écrire, en tenant compte de (2)

$$\sum_k \iint [q_k - q_k \cap \Pi] \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ + \sum_k \varepsilon_k$$

Or, il est clair que

$$\cup_k (q_k - q_k \cap \Pi) \subset \cup_k (R_k - R_k \cap \Pi) = E_k$$

Par ailleurs pour presque toutes les sections $E_{k,x}$ (resp. $E_{k,y}$), les dérivées extrêmes (ici E_k peut contenir une partie de Γ , donc la propriété ne peut être affirmée de toutes les sections, mais de presque toutes car $\text{mes } \Gamma = 0$) de v par rapport à x (de u par rapport à y) sont égales, et comme ces fonctions sont mesurables on a presque toutes les valeurs de y , sur les $E_{k,x}$ en vertu du théorème de MONTEL

$$\overline{\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\partial v}{\partial x} = \overline{\frac{\partial v}{\partial x}}$$

et une égalité analogue pour $\frac{\partial u}{\partial y}$.

On peut donc écrire l'inégalité (4) sous la forme suivante

$$(4 \text{ bis}) \quad \left| \int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy \right. \\ \left. - \iint_q \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right| \\ < \iint \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right| dx \wedge dy + \sum_k \varepsilon_k$$

Dans le deuxième membre, la divergence étant sommable, l'intégrale tend vers zéro quand $p \rightarrow \infty$, car alors $\text{mes } E_k \rightarrow 0$ comme on l'a vu, et l'intégrale double indéfinie est A.C.

D'autre part $\sum_k \varepsilon_k < 10 N \text{ mes } E_k$ et tend vers zéro dans les mêmes conditions en faisant tendre p vers l'infini dans (4) [resp. 4 bis], il vient

$$(5) \quad \int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy = \iint_q \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

égalité qui est vraie pour tout intervalle $q_1 \subset q$.

Ce résultat appelle deux conclusions

a. Posons

$$(6) \quad \Phi(q_1) = \int_{\Delta q_1} u \, dx + v \, dy - \iint_{q_1} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Il résulte de 4 bis que la fonction d'intervalle $\Phi(q_1)$ est nulle.

Or on n'a pas précisé la nature des dérivées $\frac{\partial_1 v}{\partial x}, \frac{\partial_2 u}{\partial y}$, l'égalité (6) est donc vraie quelle que soit la définition de ces dérivées, dérivée extrême inférieure ou supérieure.

Aussi, pour tout intervalle $q_1 \subset q$, la quantité

$$\iint_{q_1} \left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

est-elle indépendante de ces définitions.

Ceci a déjà été prouvé quand $q_1 \cap \Pi = \emptyset$, puisque dans ce cas $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ existent presque partout dans q_1 .

Prouvons que c'est encore le cas quand $q_1 \cap \Pi \neq \emptyset$. Soient d'_1, d'_2 de nouvelles définitions des dérivées extrêmes de v (resp. de u), on aura d'après (6)

$$\iint_{q_1} \left[\left(\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} \right) - \left(\frac{d'_1 v}{\partial x} - \frac{d'_2 u}{\partial y} \right) \right] dx \wedge dy = 0$$

$q_1 \subset q$

La fonction d'intervalle ainsi définie est manifestement A.C., donc en vertu du théorème de RADON-NIKODYM sa densité est nulle presque partout, et donc on a presque partout

$$\frac{\partial_1 v}{\partial x} - \frac{\partial_2 u}{\partial y} = \frac{d'_1 v}{\partial x} - \frac{d'_2 u}{\partial y}$$

ce qui entraîne dans les mêmes conditions (en faisant $d_2 = d'_2$, puis $d_1 = d'_1$)

$$\frac{\partial_1 v}{\partial x} = \frac{d'_1 v}{\partial x} \quad \frac{\partial_2 u}{\partial y} = \frac{d'_2 u}{\partial y}$$

ce qui prouve la première partie du théorème.

b. On peut donc écrire l'égalité (5) sous la forme (5 bis)

$$\int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy = \iint_q \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

égalité qui sera valable pour tout intervalle $q_1 \subset q$.

Ainsi si q vérifie une condition de la forme $\Pi = q \cap \Omega \subset P_N$

q appartient à la famille Φ

Il reste à examiner le second cas.

Deuxième cas :

$\Pi \subset \Gamma_{p_0}, \Gamma_{p_0} \subset \Gamma_p$. — Soit η un module d'uniforme continuité correspondant à la constante ϵ , valable à la fois pour les fonctions u et v .

Π étant rectifiable, il existe une famille au plus dénombrable de cercles de diamètres inférieurs à η , dont la somme des longueurs des diamètres, Λ , diffère de la longueur L de Π de moins de ϵ (définition de la longueur de CARATHEODORY).

Mais ici on peut supposer la famille des cercles (γ_i) finie puisque Π est fermé.

A chacun des cercles γ_i , on fera correspondre le carré circonscrit q_i , de côtés parallèles aux axes. On classera les (γ_i) par diamètres décroissants (au sens large). Les (q_i) seront donc de côtés non croissants.

La réunion des (q_i) est une aire polygonale fermée qu'on peut décomposer en aires polygonales non empiétantes, les (q'_i) de la manière suivante : on prendra

$$q'_1 = q_1, q'_2 = q_2 - \overset{\circ}{q}_1, q'_3 = q_3 - \overset{\circ}{(q_1 \cup q_2)} \text{ etc.}$$

Chaque carré q_i se trouvera entaillé par des carrés de côtés non inférieurs. Il en résulte que le périmètre de q'_i sera inférieur ou au plus égal à celui de q_i , sa plus grande dimension (dans le sens parallèle aux axes) étant au plus égale au côté de q_i , c'est-à-dire au plus égale à η .

Achevons la décomposition de q en rectangles (R_j) au moyen de parallèles aux axes convenablement choisies, toujours en nombre fini.

On aura

$$q = \cup_j R_j \cup (\cup_i q'_i)$$

Cette décomposition est finie, et formée d'aires polygonales non empiétantes dont tous les côtés sont parallèles aux axes. On a par conséquent

$$\int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy = \sum_j \int_{\Delta R_j} u \, dx + v \, dy + \sum_i \int_{\Delta q'_i} u \, dx + v \, dy$$

Considérons séparément les deux sommes du second membre.

— Pour les (q'_i) , comme la distance entre côtés parallèles aux axes est inférieure à η et qu'en projection sur chaque axe l'intégrale est prise d'abord continûment dans un sens, puis continûment dans l'autre, on a

$$\left| \int_{\Delta q'_i} u dx + v dy \right| < \varepsilon \Delta x_i + \varepsilon \Delta y_i$$

où Δx_i , Δy_i sont les distances maximum entre côtés parallèles de q'_i .

On a donc

$$\left| \sum_i \int_{\Delta q'_i} u dx + v dy \right| < \varepsilon (\sum_i \Delta x_i + \sum_i \Delta y_i) < 2\varepsilon \Lambda$$

— Pour les R_j qui ne contiennent pas de point de Γ_{p_0} la formule de GREEN est applicable. Donc on a \forall_j

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta R_j} u dx + v dy \\ &= \iint_{R_j} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Notons que dans les (R_j) la divergence est déterminée presque partout, la formule de GREEN étant admise pour ces intervalles.

D'ailleurs elle est aussi déterminée presque partout dans q puisque Γ est de mesure nulle

$$\begin{aligned} \int_{\Delta q} u dx + v dy &= \sum_j \int_{\Delta R_j} u dx + v dy \\ &+ \sum \int_{\Delta q'_i} u dx + v dy \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Delta q} u dx + v dy \right. \\ & \left. - \iint_{\cup_j R_j} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx \wedge dy \right| < 2\varepsilon \Lambda \end{aligned}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\text{mes}(\cup_j R_j) \rightarrow \text{mes } q$, puisque Π rectifiable et fermé est quarrable ; et l'intégrale double du premier membre, en vertu de l'absolue continuité tend vers $\int_q \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx \wedge dy$.

On a donc, ε étant arbitraire et Λ tendant vers L finie

$$\int_{\Delta q} u dx + v dy = \iint_q \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

ce qui prouve que $q \in \Phi$, et $q \notin \Phi_0$. C.Q.F.D.

Ainsi Φ_0 n'est pas maximale, d'où la contradiction.

APPLICATION AUX FONCTIONS ANALYTIQUES

Les conditions d'applications du théorème 2 se trouvent réunies dans le cas des fonctions analytiques

Soit

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

une fonction de variable complexe, où u et v sont continues dans un domaine (D) du plan complexe ; ayant des dérivées partielles en x et y finies sauf aux points d'un ensemble Γ contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rectifiables.

Pour tout sous-intervalle rectangulaire $q \subset D$ on peut appliquer la formule de GREEN aux parties réelle et imaginaire de

$$\begin{aligned} \int_{\Delta q} f(z) dz &= \int_{\Delta q} u dx - v dy \\ &+ i \iint_{\Delta q} v dx + u dy \end{aligned}$$

l'on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Delta q} f(z) &= - \iint_q \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ &+ i \iint_q \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

les quantités figurant dans les intégrales doubles étant définies presque partout.

L'on déduit immédiatement de cette égalité le théorème suivant qui généralise celui de LOOMAN-MENCHOFF.

THÉORÈME 3. — Une fonction continue $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un domaine D du plan complexe si les dérivées partielles extrêmes de ses parties réelle et imaginaire u et v sont finies, sauf aux points d'un ensemble Γ contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rectifiables fermés, auquel cas ces fonctions ont des dérivées partielles finies presque partout, et si ces dérivées partielles vérifient les équations de CAUCHY-RIEMANN presque partout dans D .

En effet les intégrales du second membre de l'équation ci-dessus sont nulles.

Nous allons chercher dans quelle mesure on peut renoncer à la continuité des fonctions u et v ,

CAS OU U ET V PRÉSENTENT DES DISCONTINUITÉS

Nous supposerons pour simplifier u et v dérivables par rapport à x et à y , ce qui entraînera leur continuité par rapport à chacune de ces variables, mais la continuité par rapport à l'ensemble des deux variables ne sera plus exigée.

Γ désignera une réunion au plus dénombrable d'ensembles rectifiables fermés (Γ_p) .

Nous introduirons les notations suivantes :

Notations : Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables définie dans q_0 ; nous noterons $f_{x_0}(y)$ ou $f_t(y)$ la restriction de f aux points de la parallèle à Oy d'abscisse x_0 ou t . On définirait de même les fonctions $f_{y_0}(x)$ ou $f_s(x)$.

Le nombre positif ϵ étant donné, on notera $\eta(\epsilon, t)$ le module maximum d'uniforme continuité de $f_t(x)$ pour la constante ϵ .

Nous noterons (a, b, c, d) l'intervalle $q : [a < x < b ; c < y < d]$ q_0 sera noté (a_0, b_0, c_0, d_0) .

Les fonctions considérées possèdent certaines propriétés que nous allons indiquer.

LEMME 2 : f étant supposée continue par rapport à y , on peut choisir $\eta(\epsilon, t)$ de sorte que l'ensemble

$$A(\epsilon, t) = E \{ t \in [a_0, b_0] \text{ t.q. } \eta(\epsilon, t) < \frac{1}{2t} \}$$

Démonstration : Dans le cas contraire, il y aurait un ensemble non vide de valeurs t' de t pour lesquelles on aurait

$$\eta(\epsilon, t') < \frac{1}{2t'} \quad (\forall i \in N)$$

ce qui contredit à la continuité de $f_t'(y)$, pour $y \in [c_0, d_0]$.

Remarque 4 :

Notons $A'(\epsilon, t)$ le complémentaire de $A(\epsilon, t)$.

Donnons à ϵ et à λ respectivement les suites de valeurs positives $(\epsilon_j), (\lambda_j)$ décroissantes tendant vers zéro. On supposera $\lambda_j < \frac{1}{2j}$.

Au nombre ϵ correspondra l'ensemble $A(\epsilon_j, t_j)$ de mesure inférieure à λ_j .

Nous prouvons le

LEMME 3 : f étant supposée continue en x et en y , séparément, l'intervalle $[a_0, b_0]$ est la réunion d'une famille dénombrable (B_j) de fermés, tels que les fonctions $f_t(y)$ forment une famille équicontinue pour $t \in B_j$.

$$\text{Posons } B_j = \bigcap_{k>j} A'(\epsilon_k, t_k)$$

Sur les B_j , les $(f_t(y))$ forment une famille équicontinue. On peut supposer les B_j fermés en vertu de la continuité de f par rapport à x d'une part et du théorème d'ASCOLI de l'autre.

La suite (B_j) est évidemment croissante ; par ailleurs on a

$$\lim(\text{mes } B_j) = b_0 - a_0$$

puisque si B_j' désigne le complémentaire $[a_0, b_0] - B_j$, l'on a

$$\text{mes } B_j' < \sum_{k>j} \text{mes } A(\epsilon_k, t_k) < \frac{1}{2^{j-1}}$$

Et par ailleurs, d'après le lemme 2, $\bigcap_j B_j' = \emptyset$.

Remarque 5 :

On a évidemment un énoncé analogue pour $[c_0, d_0]$, et on peut écrire

$$[c_0, d_0] = \bigcup_j (C_j)$$

où les (C_j) sont fermés, et les fonctions $f_s(x)$ forment une famille équicontinue pour $s \in C_j$.

Enfin on peut considérer les ensembles fermés

$$D_j = (B_j \times [c_0, d_0]) \cap ([a_0, b_0] \times C_j)$$

il est clair que

$$q_0 = \bigcup_j D_j$$

Proposition 1 :

La restriction de f aux ensembles $B_j \times [c_0, d_0]$ (resp. $[a_0, b_0] \cap C_j, D_j$) est uniformément continue.

Démontrons la proposition pour les ensembles $B_j \times [c_0, d_0]$. En effet $f|_{B_j \times [c_0, d_0]}$ est continue en x , et uniformément continue en y (lemme 3).

Ainsi, l'ensemble $B_j \times [c_0, d_0]$ étant fermé, f est uniformément continue par rapport à l'ensemble des deux variables.

Remarque 6 :

Sur tout fermé $A \subset K_0$ il existe une portion $\Pi = H \cap q$, telle que la restriction $f|_{\Pi}$ soit continue.

C'est une conséquence du théorème de BAIRE appliqué à K_0 et aux ensembles (B_j) , ainsi que de la remarque 5.

Remarque 7 :

On peut appliquer simultanément la proposition 1 et la remarque 6 à un nombre fini de fonctions.

Nous allons maintenant étendre le théorème de MENCHOFF à certaines fonctions discontinues. Notre but étant une généralisation du théorème 3 nous négligeons l'obtention du théorème 2 ; nous simplifions aussi les conditions de validité de ce théorème.

THÉORÈME 4. — *u et v étant deux fonctions bornées sur q_0 , partiellement continues en x et en y possédant chacune des dérivées partielles finies par rapport aux deux variables, excepté aux points d'un ensemble Γ , réunion au plus dénombrable d'ensembles rectifiables fermés, et si l'on a presque partout la relation*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

pour tout sous-intervalle rectangulaire fermé $q \subset q_0$ on a l'égalité

$$(1) \quad \int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy = 0.$$

Démonstration. — Il s'agit de prouver que les intervalles \hat{q} , tels que q vérifiant l'égalité (1) forment une famille Φ satisfaisant aux conditions (i, iv) du lemme de ROMANOVSKI.

S'il existe une famille non vide Φ d'intervalles (q) vérifiant (1) et l'axiome (i), il est clair qu'elle vérifiera (ii) pour deux rectangles juxtaposés ayant un côté commun.

De même (iii) sera vérifiée. Soit en effet une sous-famille $(q_i)_{i \in I} \subset \Phi$ totalement ordonnée par inclusion, et si

$$\hat{q} = \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{(q_i)},$$

$q \in \Phi$.

Soit en effet (q_n) une suite extraite des (q_i) , ayant comme limite q , on aura :

$$\int_{\Delta q} u \, dx + v \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta q_n} u \, dx + v \, dy = 0$$

En effet quand $n \rightarrow \infty$

$$u|_{\Delta q_n} \rightarrow u|_{\Delta q} \quad v|_{\Delta q_n} \rightarrow v|_{\Delta q}$$

par suite de la continuité partielle de u en y (resp. de v en x).

La convergence des intégrales résulte du théorème de convergence dominée, applicable aux suites $u|_{\Delta q_n}$ (resp. $v|_{\Delta q_n}$) uniformément bornées (il y a d'ailleurs ici place pour des conditions moins restrictives que celles de l'énoncé).

Montrons que Φ vérifie la condition (iv). Soit

$$H = q_0 - \bigcup_{q \in \Phi} \overset{\circ}{q}.$$

H est évidemment fermé. Supposons

le non vide, et prouvons qu'on arrive à une contradiction. On peut supposer H parfait, car si M était un point isolé de H , il existerait un intervalle $q_M \subset M$, tel que $q_M \cap H = \{M\}$; si on décompose q_M en 4 rectangles par les parallèles aux axes menées

de M , q_r , $1 \leq r \leq 4$, et chaque q_r est limite de rectangles de Φ contenant pas de points de H ; ainsi $q_r \in \Phi$, et aussi $\bigcup_r q_r = q_M$.

Soit alors $\Pi = H \cap q$ une portion de H vérifiant les remarques (6) et (7). On peut définir sur Π les ensembles (P_m) et (Γ_p) figurant dans la démonstration du théorème 2. On a en effet

$$\Pi \subset \bigcup_m (P_m) \cup \bigcup_p (\Gamma_p)$$

Nous ferons la démonstration en deux étapes

1. $q - \Gamma \cap \Pi$ est une réunion d'intervalles qui vérifient l'égalité (1)

Comme on a

$$\Pi - \Gamma = \bigcup_m (P_m)$$

$\Pi - \Gamma$ qui est un G_δ est aussi un F_σ ; c'est donc un espace de BAIRE; autrement dit il existe une portion de $\Pi - \Gamma$

$$(2) \quad \Pi' = (\Pi - \Gamma) \cap q' \neq \emptyset \quad q' \neq \emptyset$$

délimitée par un intervalle q' et un indice N tel que l'on ait

$$\Pi' \subset P_N \cap \Pi \quad P_N \in (P_m)$$

On peut appliquer à q' le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 2 (1^{er} cas).

Supposant les dimensions de q' commensurables on peut décomposer q' en un nombre fini de carrés (R_k) et (R_l) .

(R_k) désignant les carrés rencontrant P_N , on appliquera à ceux-ci l'inégalité de MENCHOFF (qui ne suppose pas la continuité de u et de v).

(R_l) désignant les carrés ne rencontrant pas P_N , ces derniers vérifient par hypothèse l'égalité (1).

La démonstration est la même que pour le théorème 2, et on prouve que $q' \in \Phi$, d'où la contradiction qui justifie notre assertion.

2. q est lui-même réunion d'intervalles vérifiant l'égalité (1)

Comme on a

$$\Gamma - \bigcup_m (P_m) = \Gamma \cap \Pi = \bigcup_p (\Gamma_p \cap \Pi)$$

$\Gamma \cap \Pi$ est à la fois un G_δ et un F_σ , donc un espace de BAIRE.

On peut alors trouver une portion de $\Gamma \cap \Pi$, $\Gamma \cap q' \neq \emptyset$ et un indice p_0 tel que

$$\Gamma \cap q' \subset \Gamma_{p_0} \quad \Gamma_{p_0} \subset \Gamma$$

où Γ_{p_0} est rectifiable fermé; de longueur L .

Il faut montrer que $q' \in \Phi$.

Par définition de Π on a pour un indice j_0

$$\Pi \subset D_{j_0} = B_{j_0} \cap C_{j_0}$$

ε positif étant donné, les restrictions $u|_{\Pi}$ et $v|_{\Pi}$ étant continues, soit $\eta(\varepsilon)$ un module d'uniforme continuité valable pour ces deux fonctions.

Nous couvrirons q' avec un quadrillage tels que $R_j \cap \Gamma = \emptyset$, les (R_j) vérifiant l'égalité (1).

Soient $(R_k)_{k < k_0}$, les intervalles restants. Dans chaque R_k , on pourra comme dans la démonstration du théorème (2), couvrir $\Gamma_{p_0} \cap R_k$, avec un nombre fini de carrés qu'on notera $(q_i)_{i < n}$ de côtés parallèles aux axes, et dont la longueur totale des côtés parallèles à l'un des axes, dans R_k , ne dépassera pas $\frac{\Lambda}{k_0}$; on pourra choisir $\Lambda < 2L$.

Dans les (R_k) on peut remplacer les (q_i) par des aires polygonales q'_i , non empiétantes, comme dans la démonstration du théorème (2)

$$q'_1 = q_1 \quad q'_2 = q_2 - \overset{\circ}{q}_1 \quad q'_3 = q_3 - \overset{\circ}{q_1 \cup q_2}$$

Les (q'_i) contenus dans des (R_k) différents sont évidemment non empiétantes; chaque R_k renferme un nombre fini de (q'_i) . On peut dans chaque R_k , décomposer

$$R_k = \cup q'_i$$

en un nombre fini d'intervalles non empiétants, ne contenant pas de point de Γ , on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Delta q'} u dx + v dy &= \sum \int_{\Delta R_k} u dx + v dy \\ &= \sum_i \int_{\Delta q'_i} u dx + v dy \end{aligned}$$

On peut enfin remplacer les (q'_i) par des aires polygonales non empiétantes (q''_i) , $q''_i \subset q'_i$ de périmètres respectifs au plus égaux à ceux des q'_i et dont les côtés ont comme projection des points de B_j , (resp. de C_j).

Soit un côté de q'_i parallèle à Oy , q'_i sa projection sur Ox . Si $q'_i \notin B_{j_0}$, on remplacera q'_i par q''_i point de première espèce de B_j , tel que le produit de $[q'_i, q''_i]$ par le côté considéré forme un intervalle ne contenant pas de point de D_{j_0} à son intérieur. On aura donc

$$\int_{\Delta q'} u dx + v dy = \sum_i \int_{\Delta q''_i} u dx + v dy$$

et en appliquant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 2, il viendra

$$\left| \int_{\Delta q'} u dx + v dy \right| < 2\varepsilon \Lambda$$

ce qui prouve que $q' \in \Phi$, ε étant arbitraire.

Cette démonstration appliquée à $H = q_0$ prouve que la famille Φ n'est pas vide, et on voit immédiatement que les éléments ainsi obtenus vérifient

l'axiome (i), ainsi les intervalles Φ vérifient-ils le lemme de ROMANOVSKI — C.Q.F.D.

Remarque 8

Nous avons déjà fait remarquer au début de la démonstration qui précède (démonstration de la condition (iii) du lemme de ROMANOVSKI) que l'on pouvait remplacer l'hypothèse u et v bornées sur q_0 , par une hypothèse moins restrictive basée sur le théorème de convergence dominée.

A cette fin, il suffit qu'on puisse appliquer aux fonctions

$$u_s(x) \quad s \in [c_0, d_0] \quad v_t(y) \quad t \in [a_0, b_0]$$

le théorème de convergence dominée, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions sommables $u_0(x)$ (resp. $v_0(y)$) définies sur $[a_0, b_0]$, (resp. $[c_0, d_0]$) telles que

$$|u_s(x)| < u_0(x) \quad |v_t(y)| < v_0(y)$$

Appliqué aux fonctions analytiques le théorème (4) conduit à une variante de l'énoncé initial de M. P. MONTEL.

THÉORÈME 5. — Une fonction $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ est holomorphe à l'intérieur d'un domaine D si

a. ses parties réelle et imaginaire sont dérivables et de dérivées partielles finies en x et y , exception faite des points appartenant à la réunion Γ d'une famille dénombrable d'ensembles rectifiables fermés

b. si les égalités de CAUCHY-RIEMANN sont vérifiées presque partout dans D .

c. si f est bornée dans D ou

c'. si les fonctions $u_t(y)$, $u_s(x)$; $v_t(y)$, $v_s(x)$ sont justiciables du théorème de la convergence dominée ($\forall t$, ou $\forall s$).

Il résulte en effet des considérations développées ci-dessus (th. 4) que si z_0 et z sont les affixes de deux points M_0 et M de O , l'intégrale $\int_{z_0}^z f(t) dt$ est indépendante du contour d'intégration, si celui-ci est constitué par une ligne brisée formée de segments parallèles aux axes des coordonnées.

On définit de façon univoque une fonction $F(z)$

a. $F(z)$ est continue. — En effet plaçons-nous dans l'hypothèse c. écrivons $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, on aura

$$\begin{aligned} |F(z + \Delta z) - F(z)| &\leq |F[x + \Delta x + i(y + \Delta y)] \\ &\quad - F[x + \Delta x + iy]| + |F(x + \Delta x + iy) \\ &\quad - F(x + iy)| \\ &\leq \left| \int_x^{x + \Delta x} (u_x(t) + v_y(t)) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_y^{y + \Delta y} (u_x(s) + v_x(s)) ds \right| \end{aligned}$$

b. $F(z)$ a pour dérivée $f(z)$, tant par rapport à x que par rapport à y .

Ecrivons en effet :

$\int f(z) dz = \int u dx - v dy + i \int v dx + u dy$
faisant $dz = dx$, puis $dz = i dy$, on voit que le premier membre a dans les deux cas comme dérivée $u + i v$ qui est finie par hypothèse.

La monogénéité résulte alors du théorème de MENCHOFF (ici notre théorème 3). Le théorème 4 a été prouvé par TOLSTOV dans l'hypothèse c , avec Γ constitué par un ensemble de points au plus dénombrable.

COMPLÉMENT

SUR UN PROBLÈME POSÉ PAR S. SAKS

Ainsi que le signale S. SAKS dans son ouvrage « Theory of the Integral » on peut remplacer la condition de la dérivabilité partielle presque partout de u et de v par rapport à chaque variable par la suivante plus forte. (Cf. Théorème 2).

A : « u et v ont presque partout par rapport à chacune des variables des nombres dérivés extrêmes finis ».

S. SAKS prouve aussi le résultat suivant dû à A.S. BESICOVITCH

THÉORÈME 6. — Une fonction de la variable complexe, continue dans un domaine D , γ est holomorphe si elle est dérivable presque partout et si l'on a

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right| < +\infty$$

sauf peut-être aux points d'un ensemble Γ_0 dénombrablement rectifiable

et signale l'intérêt d'un énoncé englobant les deux théorèmes 4 et 6.

Il est clair que si l'on complète l'énoncé du théorème 4 en lui adjoignant la condition susmentionnée de SAKS, A, on obtient un énoncé très voisin de celui de BESICOVITCH, à ceci près que la définition des ensembles exceptionnels Γ et Γ_0 diffère.

Il reste à savoir si cette différence est essentielle, i. e. s'il existe des ensembles dénombrablement rectifiables, qu'on ne puisse inclure dans une réunion dénombrable d'ensembles rectifiables fermés.

Bien que nous n'ayons prouvé ce point, la réponse paraît devoir être négative.

SECTION II. — CONDITIONS POUR QU'UNE FORME LINÉAIRE DANS LE PLAN SOIT FERMÉE

Soit

$$\omega = u dx + v dy$$

une forme linéaire dans le plan.

On sait que pour qu'une forme de classe C_1 dans un domaine soit fermée, il faut et il suffit que l'on ait l'égalité

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Cette condition garantira encore que la forme est fermée, si u et v sont simplement différentiables, ou comme nous l'avons vu dans la première partie de la section I, continues et ayant des dérivées partielles en x et en y finies hors de certains ensembles exceptionnels Γ .

Nous ne connaissons pas d'énoncé dans le cas où $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont seuls supposés exister.

Pour prouver la suffisance de l'égalité (1) dans de tels cas, nous supposerons l'existence (dans un sens à préciser) et l'égalité des dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Nous construirons deux suites de fonctions (u_n) et (v_n) tendant respectivement vers u et v dans K_0 telles que

— les dérivées partielles $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ soient sommables dans K_0 et égales presque partout ;

— l'on puisse passer à la limite dans la formule

$$\int_{\Delta K} u_n dx + v_n dy = 0$$

Pour cela, l'intervalle K étant fixé, on définira les suites (u_n) et (v_n) de façon

— à ce que celles-ci soient uniformément bornées sur ΔK ;

— à ce que les suites de dérivées $\frac{\partial v_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ tendent respectivement vers $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

K étant fixé au cours de la démonstration, nous noterons cet intervalle K_0 .

L'existence de $\frac{\partial v}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) entraînera que les sections v_y (resp. u_x) sont des totales indéfinies continues de x (resp. de y), pour presque toutes les valeurs de y (resp. de x).

Cette remarque nous conduira à revenir sur la définition des fonctions A.C.G. continues, tant

dans R que dans R^2 . Dans la présente section toutes les fonctions A.C.G. seront supposées continues, sans que nous le rappelions expressément.

Pour étudier ces fonctions nous introduirons une notation qui aura l'avantage d'abrégier les développements, ce sera la notion de « série-A », séries se comportant pour toutes les valeurs des variables qu'un nombre fini de termes non nuls.

A ces séries correspondront évidemment un type de suites que nous nommerons les A-suites.

Nous sommes donc amenés à diviser notre exposé comme suit :

§. 1 — Rappels concernant les fonctions de deux variables A.C. et A.C.G ;

§. 2 — Propriétés des séries-A et des A-suites ;

§. 3 — Cas de validité de la formule de GREEN pour :

- A. les dérivées approximatives ;
- B. les dérivées générales.

§ 1. — RAPPELS CONCERNANT LES FONCTIONS A.C. ET A.C.G.

1. *Notations.* — Nous emploierons les mêmes notations que dans la note « Intégrations indéfinies dans R^2 ».

On utilisera pour une fonction d'intervalle $K \rightarrow F(K)$, ($F(K) \in R$) les notations

$K = (x_1, x_2 ; y_1, y_2)$ $K \subset K_0 = [a_1, a_2 ; b_1, b_2]$ ainsi que la notation $F.(M)$ ($M \in K_0$) pour la fonction de point correspondante.

On passe aisément de la première notion à la seconde en posant

$$F.(M) = \Delta[F ; a_1, x ; b_1, y]$$

et inversement, on a

$$F(K) = \Delta[F ; x_1, x_2 ; y_1, y_2] = F.(x_1, y_1) - F.(x_2, y_1) - F.(x_1, y_2) + F.(x_2, y_2).$$

Les sections de F par $x = x_0$ (resp. $y = y_0$) seront les fonctions de point

$$F_{x_0} = F.(x_0, y) \quad F_{y_0} = F.(x, y_0)$$

L'appellation « fonction F » définira aussi bien la fonction d'intervalle que la fonction de point.

2. *Définitions*

a. *Normes.* — Les normes des fonctions continues seront celles de la convergence uniforme.

b. *Fonctions A.C. sur un ensemble E .* — F sera dite A.C. sur l'ensemble mesurable E , s'il existe une fonction Φ , A.C. dans K_0 , telle que $F|E = \Phi|E$.

c. *Fonctions A.C.G.* — F sera dite A.C.G. si elle est

- i. continue ;
- ii. s'il existe une famille au plus dénombrable (E_n) d'ensembles fermés tels que, Φ_n étant A.C. dans K_0 , on ait

$$\bigcup_n E_n = K_0 \quad F|E_n = \Phi_n|E_n$$

d. *Fonction A.C.* (ou A.C. au sens restreint) sur $E \subset K_0$*

E étant fermé, (U_n) désignant les composantes connexes de $K_0 - E$, $\Omega(F, U_n)$ l'oscillation de F dans U_n , F sera dite A.C.* sur E si

- i. F est A.C. sur E ;
- ii. $\sum_n \Omega(F, U_n) < + \infty$.

3. *Propriétés des fonctions A.C. et A.C.G.*

Si $F(K)$ est A.C., il existe une fonction L-intégrable f telle que

$$\forall K \subset K_0 \quad F(K) = \iint_K f \, dx \, dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f_x \, dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f_y \, dx$$

en vertu du théorème de FUBINI.

On déduit de ces égalités le résultat suivant :

Proposition 1.

Si F est A.C. dans K_0 , F possède :

- 1. une dérivée partielle A.C. en x (resp. en y) pour presque toutes les valeurs de y (resp. de x).
- 2. presque partout une dérivée seconde mixte

$$F''_{x,y} = F''_{y,x} = f$$

Si F est A.C. sur l'ensemble mesurable E , on a en appliquant la définition, et à la fonction Φ la proposition 1, le résultat suivant

Proposition 2.

Si F est A.C. sur l'ensemble mesurable $E \subset K_0$, $F|E$ possède presque partout une dérivée partielle approximative en x (resp. en y) ; presque partout dans K_0 des dérivées secondes approximatives mixtes égales entre elles, et à la densité de Φ .

En effet F et Φ ont presque partout sur E les mêmes dérivées approximatives, (dérivée partielle par rapport à une variable ou dérivée seconde mixte).

Il s'ensuit pour F A.C.G. les propriétés suivantes :

Proposition 3.

Si F est A.C.G. dans K_0

1. Les sections F_x, F_y sont A.C.G.
2. F possède, presque partout, une dérivée partielle approximative en x (resp. en y).
3. F a presque partout des dérivées secondes approximatives mixtes égales entre elles.

Ces dérivées mixtes sont d'ailleurs égales presque partout à la dérivée approximative de F définie par M. V.G. CELIDZE.

Nous désignerons ces dérivées mixtes (resp. approximative) par le terme général de dérivée seconde ; si elles existent au point M_0 , on les notera $D_{ap} F(M_0)$.

On sait qu'une fonction A.C.G. d'intervalle est déterminée par la dérivée seconde définie presque partout, de façon univoque.

Nous aurons besoin de la propriété suivante :

Proposition 4.

Si la fonction de point $\varphi(M)$ est A.C., il en est de même de la fonction de point

$$\Phi(M) = \int_{a_1}^x \varphi(s, y) ds$$

Démonstration. — φ étant A.C.G. possède une dérivée seconde $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ (proposition 1) L-intégrable et on a

$$\varphi(x, y) = \iint_{[a_1, x; b_1, y]} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}$$

On peut se borner au cas où $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ est limite presque partout d'une suite croissante de fonctions en escalier (χ_m), toute fonction L-intégrable dans \mathbb{R}^2 pouvant être représentée comme différence de telles limites (F. RIESZ).

La suite

$$X_m(x, y) = \iint_{[a_1, x; b_1, y]} \chi_m ds dt$$

est une suite de CAUCHY, pour tout $M(x, y) \in K_0$ convergeant vers la limite $\varphi(x, y)$ d'après le théorème de B. LEVI.

Comme φ est continue, et la suite (X_m) monotone, il résulte du lemme de DINI que les (X_m) convergent uniformément vers φ . Donc

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon < 0 \exists m_0 \text{ t. q. } m, m' > m_0 \\ \Rightarrow & \iint_{[a_1, x; b_1, y]} |\chi_m - \chi_{m'}| ds dt < \varepsilon \end{aligned}$$

On peut donc intégrer les intégrales doubles sous le signe \int par rapport à x notamment, d'où l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{a_1}^x \left[\iint_{[a_1, \xi; b_1, y]} [\chi_m - \chi_{m'}] ds dt \right] d\xi \right| \\ & = \left| \iint_{[a_1, x; b_1, y]} \left[\frac{\partial \chi_m}{\partial t} - \frac{\partial \chi_{m'}}{\partial t} \right] ds dt \right| \\ & < \varepsilon [a_2 - a_1] \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(\frac{\partial \chi_m}{\partial t}\right)$ converge en moyenne.

Par conséquent, les intégrales indéfinies

$$\iint_{[a_1, x; b_1, y]} \frac{\partial \chi_m}{\partial t} ds dt = \int_{a_1}^x \chi_m(s, y) ds$$

ont une limite, et comme les χ_m tendent uniformément vers ψ , qui a une intégrale indéfinie bornée Φ , les primitives des (χ_m) convergent vers cette limite, soit :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{a_1}^x X_m(s, y) ds = \Phi(x, y)$$

Mais si la suite $\left(\frac{\partial X_m}{\partial y}\right)$ converge en moyenne,

comme on l'a noté ci-dessus, la suite des primitives, d'après le théorème de VITALI, possède la propriété d'absolue continuité uniforme, qui s'étend à la suite complétée par sa limite.

Ainsi la fonction Φ est A.C.

C.Q.F.D.

§ 2. — SÉRIES-A ET A-SUITES

Tout ce que nous dirons des séries se transporte immédiatement aux suites : nous nous bornerons à énoncer les définitions et propriétés concernant les séries.

Les séries-A ont comme caractéristique essentielle de ne comporter qu'un nombre fini de termes non nuls pour chaque valeur de la variable. En fait de telles séries ne présentent de l'intérêt que lorsque la variable est un élément d'un espace compact métrisable E, et principalement une partie compacte de \mathbb{R}^n

Les fonctions considérés seront des applications $E \rightarrow \mathbb{R}$.

On a la définition suivante :

Définition 4.

E étant compact, métrisable, la série

$$s = \sum_1^{\infty} w_n \quad w_n : E \rightarrow \mathbb{R}$$

sera dite « série-A », si les deux conditions suivantes sont remplies

- i. $\forall M \in E \exists n_0(M) : n > n_0 \implies w(M) = 0$
- ii. soit

$$A_n = \{M \in E, w_{n+p}(M) = 0 \forall p < 0\}$$

il existe un fermé B_n tel que

$$\forall n \quad B_n \subset A_n \quad \bigcup_n B_n = E$$

On écrira :

$$s = \sum_A w_n$$

Il est clair que si les (w_n) sont continues et vérifient la condition (i), elles vérifient la condition (ii).

Pour les A-suites (u_n) , la condition (i) s'écrit :

$$\forall M \in E_0 \exists n_0(M) : n > n_0, u_n(M) = u_{n_0}(M)$$

Si $u_n \rightarrow u$ quand $n \rightarrow \infty$ on écrira

$$u = \lim_A u_n$$

On a la propriété suivante :

Proposition 1

Toute somme, produit de séries-A est une série-A. Toute série-A dont les termes sont des séries-A est elle-même une série-A.

Nous nous contenterons de démontrer la dernière assertion, en nous limitant aux séries s_n à termes continus. Soit

$$\sigma = \sum_A s_n \quad s_n = \sum_A u_k$$

où les u_n^k sont continues.

Il est clair qu'en tout point de E_0 , σ est la somme d'un nombre fini de u_n^k non tous nuls, ce qui prouve que la condition (i) est vérifiée.

Ordonnons les (u_n^k) en une suite unique (w_n) , et définissons les (A_n) comme ci-dessus (Définition 1, (ii)).

Les (w_n) étant continues, les (A_n) sont fermés, et comme

$$\bigcup_n A_n = E$$

la condition (ii) est satisfaite.

Dans les propositions suivantes nous supposons que E est un intervalle de \mathbb{R}^m de la forme

$$K_0 = \prod_{i=1}^m ([a_i, b_i]). \text{ On a la}$$

Proposition 2

Si F est une fonction définie dans K_0 et s'il existe une suite de fermés (E_n) et de fonctions (F_n) tels que

$$\bigcup_n E_n = K_0 \quad F|E_n = F_n|E_n$$

les (F_n) possédant dans K_0 l'une des propriétés suivantes :

- a. Les (F_n) sont continues
- b. Les (F_n) sont A.C.
- c. Presque toutes les sections $F_n(\xi)$ sont A.C. dans $[a_m, b_m]$, avec $\xi \in \prod_{i=1}^{m-1} [a_i, b_i]$.

Alors F peut être représentée comme limite d'une A-suite (u_n) dont les termes ont les mêmes propriétés que les (F_n) .

On peut supposer la suite (E_n) croissante.

Soit $U_n = V(E_n, \frac{1}{n})$ le voisinage de E_n , d'ordre $\frac{1}{n}$

$$U_n = \{x \in K_0, d(x, E_n) < \frac{1}{n}\}$$

K_0 étant un espace compact est normal ; on peut trouver une fonction continue φ_n égale à un dans E_n et à zéro dans $K_0 - U_n$.

Montrons qu'on peut trouver une fonction A.C. φ_n satisfaisant aux mêmes conditions.

Il est aisé de construire à partir de φ_n une fonction $\tilde{\varphi}_n$ telle que

$$\tilde{\varphi}_n|E_n = \frac{3}{2} \quad \tilde{\varphi}_n|K_0 - U_n = -\frac{1}{2}$$

Appliquant à φ_n le théorème de WEIERSTRASS, on peut trouver un polynôme P_n tel que sur K_0

$$|P_n - \varphi_n| < \frac{1}{4}.$$

La fonction suivante :

$$\Psi_n(M) = \sup[\inf(P_n(M), 1), 0]$$

est A.C. dans K_0 .

Alors il est clair que la suite

$$u_n = F_n \Psi_n$$

répond aux conditions de l'énoncé.

Faisons la remarque suivante

Remarque 1

Si F est bornée, pour toute A -suite telle que

$$F = \lim_n u_n$$

on peut prendre

$$\|u_n\| < \|F\|$$

Si $\|F\| = M$ on peut sans modifier la nature de la suite (u_n) remplacer u_n par la quantité

$$u_{n,M} = \sup[\inf(u_n, M), -M]$$

Corollaire 1

Si F est A.C.G., F est limite d'une A -suite de fonctions A.C. (u_n) telles que $\|u_n\| < \|F\|$

En effet F continue est bornée ; et F A.C.G. vérifie les conditions de la proposition 2 (cas b).

Quand $K_0 \subset \mathbb{R}^2$ (resp. $K_0 \subset \mathbb{R}$) on a l'importante propriété suivante :

Proposition 3

Une série- A de fonctions A.C. peut être dérivée approximativement terme à terme presque partout.

On a d'après la définition 1, (ii) $K_0 = \cup (A_n)$; sur chaque A_n la série ne comprend qu'un nombre fini, constant de termes non nuls.

On peut donc la dériver approximativement terme à terme, là où les fonctions (u_n) sont dérivables, c'est-à-dire dans \mathbb{R}^2 , presque partout soit par rapport à l'une des variables x ou y , soit par rapport aux deux.

On a évidemment une propriété équivalente dans \mathbb{R} .

Dans le cas de \mathbb{R} , on a la variante suivante :

Corollaire 2

Soit $s = \sum u_n$ une série- A de fonctions définies dans un intervalle I_0 de \mathbb{R} , telle que s et chaque fonction u_n ait en tout point de I_0 à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable D , une dérivée générale ; alors la dérivation de la série s peut se faire terme à terme en dehors d'un ensemble au plus dénombrable D' .

En effet, les dérivées prises sur les (A_n) donnent le même résultat que la dérivation générale, sauf aux points de D et aux points isolés des (A_n) . D'où le corollaire.

Remarque 2

Quand il s'agit de dérivations approximatives ou générales (dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}), ne donnant suivant nos conventions que des fonctions définies presque partout, nous conviendrons de prendre celles-ci nulles aux points où elles cessent d'être définies.

Avec cette convention on peut énoncer le résultat suivant

La dérivée d'une série- A est une série- A .

De même quand on passera aux A -suites, on a l'énoncé suivant :

Corollaire 3

Étant donnée une A -suite de fonctions dérivables définies dans un ouvert de \mathbb{R}^2 (un intervalle de \mathbb{R}) on peut intervertir les opérations de dérivation approximative et de passage à la limite.

Corollaire 3 bis

Si on est dans \mathbb{R} , et si les termes de la A -suite et sa limite ont des dérivées générales, sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable D on peut intervertir les opérations de dérivation et de passage à la limite sauf aux points d'un ensemble au plus dénombrable D' .

Par contre il n'y a aucune raison pour que les primitives (partielles ou non) des termes d'une série- A (resp. d'une A -suite) forment une série- A (resp. une A -suite).

Nous introduirons la définition suivante :

Définition 2

A-primitive. — Si une fonction f est susceptible d'un développement en série- A , dont l'intégration terme à terme donne une série- A , on dira que f possède une A -primitive.

Si les termes de la série- A représentant f sont L -intégrables, la A -primitive, si elle existe est (A.C.G.).

Mais on ne peut garantir l'unicité d'une A -primitive.

D'où la nécessité d'obtenir des critères d'unicité de telles primitives. On a la

Proposition 4

Si la fonction f définie dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ possède une A -primitive A.C.G., celle-ci est déterminée à une constante additive près.

Soit $f = \sum_A u_n$; f ayant une A-primitive on a par définition

$$F = \sum_A U_n \quad \frac{d_{ap} U_n}{dx} = u_n p \cdot p.$$

F étant A.C.G. et ayant presque partout f comme dérivée approximative (proposition 3) est une totale indéfinie de f . C.Q.F.D.

Proposition 5

Si $s = \sum_A u_n$ provient de la dérivation terme à terme par rapport à x de la série-A

$$S = \sum_A U_n$$

où S et les U_n sont continues, où S_x est A.C.G., U_n égale à une fonction dont presque toutes les sections $U_{n,x}$ sont A.C. alors on peut intégrer la série s terme à terme par rapport à y .

(On peut évidemment échanger x et y dans cet énoncé).

Démonstration. — Si S_x est A.C.G., on peut dériver la série S terme à terme en y et on obtiendra :

$$s_x = \sum_A u_{n,x}$$

Inversement, il est clair que si l'on intègre terme à terme s_x on obtient S_x à une constante additive près, S_x étant la totale de s_x , puisque A.C.G. Soit c_x la constante d'intégration. Si la fonction

$$x \rightarrow c_x = \varphi(x)$$

est continue, $U_{n,x}$ coïncide presque partout dans K_0 avec la fonction $U(x, y) + \varphi(x) - U(x, b_1)$, et peut être prolongée par continuité à cette fonction. Cette fonction de point à son tour définit une fonction d'intervalle unique.

L'intégration terme à terme est donc justifiée ; au surplus dans les applications on prendra

$$\varphi(x) = U(x, b_1) = 0.$$

Il est utile de savoir dans quels cas une fonction f définie dans K_0 peut être développée en série-A, justiciable d'une intégration terme à terme.

On a le critère suivant inspiré de la proposition 5.

Proposition 6

Si f , définie dans K_0 , satisfait aux conditions suivantes :

a. Sur tout ensemble fermé $H \subset K_0$, il existe une portion

$$\pi = H \cap K$$

telle que $f|_{\pi_x}$ soit L-intégrable en y pour presque toutes les valeurs x ;

b. f_x possède une primitive en y pour presque toutes les valeurs de x , F_x , qui soit la section d'une fonction F continue dans K_0 , et telle que dans chaque portion π définie en a, F soit égale à une fonction continue \tilde{F}_π , pour laquelle presque toutes les sections $(\tilde{F}_\pi|_{\pi})_x$ sont A.C. en y .

Alors f peut être représentée comme une série-A intégrable terme à terme en y .

Prouvons que F vérifie la proposition 2 condition c).

Pour cela nous nous proposons d'extraire des portions π de l'énoncé (que nous substituons aux fermés H), une sous-famille au plus d'nombrable (π_n) , et construire une suite de fonctions (F_n) , telles que

$$F_n |_{\pi_n} = \tilde{F}_{\pi_n} |_{\pi_n}$$

les (F_n) formant une A-suite de limite F , vérifiant la condition c de la proposition 2.

Nous noterons $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base de la topologie de K_0 formée de rectangles ouverts.

De a) appliquée à K_0 , on déduit l'existence d'une famille d'intervalles $(K_{m,1}) \subset (K_1)$, telle que $f_x|_{K_{m,1}}$ soit L-intégrable en y pour presque toutes les valeurs de x . Nous noterons.

$$\pi_{m,1} = K_{m,1} \quad O_1 = \overline{\bigcup_m \pi_{m,1}} \quad H_1 = K_0 - O_1$$

De même en appliquant a) à H_1 , on conclut à l'existence d'une nouvelle famille $(K_{m,2}) \subset (K_1)$, $\pi_{m,2} = H_1 \cap \overline{K_{m,2}}$, la fonction $f_x|_{\pi_{m,2}}$ soit L-intégrable en y pour presque toutes les valeurs de x . On prendra

$$O_2 = \overline{\bigcup_m K_{m,2}} \cup O_1 = \overline{\bigcup_m \pi_{m,2}} \cup \overline{\bigcup_m (\pi_{m,1})} \quad H_2 = K_0 - O_2$$

On construit ainsi de proche en proche une famille d'ouverts et de fermés

$$O_\alpha = \overline{\bigcup_{j < \alpha} (\bigcup_m \pi_{m,j})} \quad H_\alpha = K_0 - O_\alpha$$

où les (H_α) forment une famille strictement décroissante.

Il suit du théorème de BAIRE-CANTOR que cette famille est au plus dénombrable et qu'il existe un transfini de première espèce α_0 , tel que

$$O_{\alpha_0} = \overset{\circ}{K}_0 \quad H_{\alpha_0} = \emptyset$$

où

$$O_{\alpha_0} = \overline{\bigcup_{j < \alpha_0} (\bigcup_m \pi_{m,j})}$$

Les (π_n) formant une famille au plus dénombrable on peut les noter avec un indice unique $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On prendra lors $F_n = \tilde{F}_{\pi_n}$.

Les conditions de la proposition 2 c sont donc vérifiées, et on peut représenter F comme limite d'une A-suite (u_n) de fonctions dont presque toutes les sections $u_{n,x}$ sont A.C.

Comme F est continue, F est A.C.G. pour toutes ces sections, d'après la proposition 2 appliquée à R.

Enfin d'après b, et la proposition 3, on a presque partout dans K_0

$$f(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \lim_A \frac{\partial u_n}{\partial y}$$

les dérivées étant approximatives, et pouvant être générales si F_x et les $u_{n,x}$ vérifient les propriétés du corollaire 2, ce qui prouve la proposition (compte tenu de la proposition 5).

Remarque 3

Le développement de f en série-A intégrable terme à terme, est liée à l'obtention d'une famille dénombrable de portions (π_n) disjointes, et recouvrant K_0 ; sur chacune de celle-ci f est la dérivée approximative (presque partout) ou générale d'une fonction continue F_n , dont presque toutes (resp. toutes) les sections $F_{n,x}$ sont A.C. en y .

§ 3. — CONDITIONS DE VALIDITÉ DE LA FORMULE DE GREEN

Nous nous placerons successivement dans deux hypothèses, chacune conduisant à l'application de la proposition 6 du §. 2.

La démarche sera essentiellement la même dans les deux cas.

Nous supposons d'abord la divergence nulle et chercherons une subdivision de K_0 en portions (π_n) (que nous noterons (π_r) $r \in \mathbb{N}$ pour éviter des doubles emplois d'indices), qui soit valable tant pour la fonction $\frac{\partial v}{\partial x}$ que $\frac{\partial u}{\partial y}$, et permette d'exprimer ces fonctions comme limites de A-suites pour lesquelles le passage à la limite sous le signe \int soit licite.

En fait nous devons procéder en deux étapes :

— dans une première étape, u sera représentée comme limite d'une A-suite de fonctions A.C., (α_n) , bornées dans leur ensemble, telle que sur chaque portion π_r , α_n reste le même à partir d'un certain indice n_r .

On déterminera alors une suite (β_n) présentant la même propriété relativement aux (π_r) et telle que,

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial y}$$

les β_n étant eux-mêmes A.C. mais non nécessairement bornés dans leur ensemble.

— dans une seconde étape, pour justifier le passage à la limite sur ΔK , $K \subset K_0$, nous substituerons aux suites (α_n) , et (β_n) deux A-suites déduites des précédentes (u_n) et (v_n) uniformément bornées sur ΔK , de même limite que les (α_n) et les (β_n) respectivement.

On aura alors en vertu du théorème de convergence de LEBESGUE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta K} u_n dx + v_n dy = \int_{\Delta K} u dx + v dy = 0$$

le premier membre devant être nul par suite du choix des (u_n) et des (v_n) .

On déduira alors, des démonstrations données dans le cas de la divergence nulle, des cas de validité de la formule de GREEN avec la divergence non nulle, dans certains cas particuliers, variant avec l'hypothèse admise.

Cette hypothèse sera liée aux types de dérivées considérés, approximative ou générale.

A. Première hypothèse

u et v continues sont A.C.G. par rapport à l'ensemble des deux variables.

Suivant la définition des dérivées partielles, qui ici sont approximatives on peut considérer que celles-ci existent et sont finies, vérifiant la condition

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

quitté à remplacer ces dérivées par la valeur zéro, là où les propriétés requises ne seraient pas satisfaites (cf. §. 2 proposition 3, et remarque 1).

On pourra étendre cette propriété à d'autres fonctions, pourvu que celles-ci forment une famille au plus dénombrable; et parler de limites, là où il n'y a de limites que presque partout, en adoptant des conventions similaires.

L'on peut alors énoncer le résultat suivant

Théorème 1

Si les fonctions continues u et v sont A.C.G. dans K_0 , et qu'on y ait l'égalité

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

la forme $\omega = u dx + v dy$ vérifie pour tout $K \subset K_0$ l'égalité

$$\int_{\Delta K} u dx + v dy = 0$$

Démonstration. — Comme nous l'avons expliqué plus haut, les suites de fonctions que nous allons construire, dépendent de l'intervalle K choisi, qui sera fixé au cours de la démonstration.

On prendra donc $K = K_0$.

La démonstration sera divisée en plusieurs parties.

A. *Détermination des portions (π_r) , des suites (α_n) et (β_n) .*

u et v étant A.C.G., sur tout fermé $H \subset K_0$, il existe une portion $\pi = H \cap K$, ($K \in (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ base de la Topologie de K_0) sur laquelle les restrictions $u|_{\pi}$ et $v|_{\pi}$ sont A.C. simultanément.

Il en est de même (§. 1 proposition 1) de presque toutes les sections $\frac{\partial u}{\partial y}|_{\pi_x}, \frac{\partial v}{\partial x}|_{\pi_y}$.

En reprenant la démonstration de la proposition 5 du §. 2, on voit que u peut être représentée comme limite d'une A-suite (α_n) , telle que

$$(2) \quad u = \lim_A \alpha_n \quad \|\alpha_n\| < \|u\|$$

et par conséquent

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_A \frac{\partial \alpha_n}{\partial y}$$

D'après la démonstration de la proposition 6 du §. 2, l'on peut trouver une famille au plus dénombrable de portions $\pi, (\pi_r)_{r \in \mathbb{N}}$, disjointes, telles que

$$K_0 = \bigcup_r \pi_r$$

et que pour tout r on puisse trouver un indice n_r tel que

$$n \geq n_r \Rightarrow \alpha_n|_{\pi_r} = \alpha_{n_r}|_{\pi_r}$$

Nous déterminerons alors la suite (β_n) par l'égalité dans π_r

$$(4) \quad \frac{\partial \beta_n}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial y}$$

Les $\frac{\partial \beta_n}{\partial x}$ formant une A-suite, et restant comme

les (α_n) égaux dès que $n \geq n_r$ à $\frac{\partial \beta_{n_r}}{\partial x}$

Montrons que la suite $(\frac{\partial \beta_n}{\partial x})$ vérifie les conditions de la proposition 6 du §. 2.

La définition des (π_r) montre que la condition a de cette proposition est satisfaite : on pourra toujours, d'après le théorème de BAIRE, prendre

$$\pi \subset \pi_r$$

pour une valeur convenable de r .

La A-limite des $\frac{\partial \beta_n}{\partial x}$ est d'après (4) la même que celle des $\frac{\partial \alpha_n}{\partial y}$ c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial y}$ ou $\frac{\partial v}{\partial x}$ d'après (1). On a donc

$$\lim_A \frac{\partial \beta_n}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

v d'autre part est continue dans K_0 par hypothèse ; et elle est la primitive de $\frac{\partial v}{\partial x}$ pour presque toutes les valeurs de y .

Par définition des π_r , et puisque l'on prend $\pi \subset \pi_r$, $v|_{\pi}$ est la restriction à π d'une des fonctions $v|_{\pi_r}$, elle-même, par définition des (π_r) restriction d'une fonction A.C. La condition b de la proposition 6 du §. 2 est vérifiée.

Ainsi la suite $(\frac{\partial \beta_n}{\partial x})$ est intégrable en x , en prenant

$$\beta_n(a_1, x) = v(a_1, y) = 0$$

la suite des intégrales (β_n) est d'après la proposition 6 précitée une A-suite de limite v .

Enfin comme résultat de (4) on aura

$$(5) \quad \int_{\Delta K_0} \alpha_n dx + \beta_n dy = 0$$

B. *Détermination des suites (u_n) et (v_n)*

i. En vertu du §. 1 proposition, on peut supposer v_x A.C.G., et en particulier v_{a_2}

D'après le §. 2, corollaire 1, dans R , on peut représenter v_{a_2} comme limite d'une A-suite (w_n) de fonctions de y A.C. uniformément bornées, soit

$$v_{a_2} = \lim_A w_n \quad \|w_n\| \leq \|v_{a_2}\|$$

Choisissons $c \in [a_1, a_2]$, v_c est A.C.G. en y .

Nous allons modifier α_n et β_n dans la bande $[c, a_2] \times [b_1, b_2]$ n étant provisoirement fixé. On introduira deux nouvelles fonctions (qui dépendent de c), \tilde{u}_n et \tilde{v}_n telles que

$$(6) \quad \tilde{v}_n(a_2, y) = w_n(y) \quad \tilde{v}_n(c, y) = \beta_n(c, y)$$

et on prendra $\tilde{v}_{n,y}$ linéaire et continue en x , pour $x \in [c, a_2]$

d'où

$$(7) \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{w_n(y) - \beta_n(c, y)}{a_2 - c}$$

cette quantité est donc indépendante de x , pour $x \in [c, a_2]$.

Puis on déterminera u_n par la condition

$$(8) \quad \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} \quad \tilde{u}_n(x, b_1) = 0$$

Les deux intégrales suivantes sont bien définies

$$(9) \quad \int_{\Delta K_0} \tilde{v}_n dy = \int_{b_1}^{b_2} \tilde{v}_n(a_2, y) dy,$$

$$\int_{\Delta K_0} \tilde{u}_n dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{u}_n(x, b_2) dx$$

Il suffit de montrer que cela est vrai, des intégrales doubles suivantes :

$$(10) \quad \iint_{K_0} \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x} dx dy = \iint_{K_0} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y} dx dy$$

Il est clair que si l'une est définie, il en est de même de l'autre, puisque les fonctions à intégrer sont égales en vertu de (8) d'une part et de (4) de l'autre.

Prenons la première intégrale. Si

$$-x \in [a_1, c] \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{d\beta_n}{dx} = \frac{d\alpha_n}{dy},$$

or, cette fonction est sommable en vertu de la proposition 4 du §. 1 ;

- $x \in [c, a_2]$ $\frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial x}$ est la fonction de y définie par (7) continue dans $[c, a_2] \times [b_1, b_2]$.

Ainsi les intégrales doubles sont celles de fonctions L-intégrables et peuvent être calculées par intégrations successives, d'où l'existence des intégrales (9).

En appliquant le théorème de FUBINI à la différence des intégrales (10), on trouve finalement

$$(11) \quad \int_{\Delta K_0} \tilde{u}_n dx + \tilde{v}_n dy = 0$$

ii. On va pouvoir des fonctions \tilde{u}_n , et \tilde{v}_n déduire la suite (u_n) et (v_n) cherchées.

On a déjà remarqué que la détermination de \tilde{u}_n et \tilde{v}_n dépendait du nombre c .

Donnons à c une suite croissante de valeurs (c_p) tendant vers a_2 . A chacune de ces valeurs, pour n

fixé, correspondent des fonctions \tilde{u}_n et \tilde{v}_n différentes, qu'on notera $\tilde{u}_{n,p}$ et $\tilde{v}_{n,p}$.

On prendra alors

$$u_n = \tilde{u}_{n,n} \quad v_n = \tilde{v}_{n,n}$$

et (u_n) et (v_n) sont des A-suites en vertu du §. 2. Proposition 1, et on aura

$$(12) \quad u = \lim_A u_n \quad v = \lim_A v_n$$

et en vertu de (11)

$$(13) \quad \int_{\Delta K_0} u_n dx + v_n dy = 0$$

C. *Démonstration de la formule de GREEN*

Il faut justifier le passage à la limite dans la formule (13), qui s'écrit compte tenu de

$$u_n(a_1, y) = 0, \quad v_n(x, b_1) = 0$$

$$(14) \quad \int_{a_1}^{a_2} u_n(s, b_2) ds = \int_{b_1}^{b_2} v_n(a_2, t) dt$$

Or, on a par définition (6)

$$\int_{b_1}^{b_2} v_n(a_2, t) dt = \int_{b_1}^{b_2} w_n(t) dt$$

et les (w_n) étant uniformément bornées, de A-limite v , on a

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b_1}^{b_2} v_n(a_2, t) dt = \int_{b_1}^{b_2} v(t) dt$$

Etudions la première des intégrales (14).

On a, dès que $x \leq c_n$, $u_n(x, y) = \tilde{u}_{n,n}(x, y) = \alpha_n(x, y)$ d'où pour $c_n \geq x_j > x_i$, les α_n étant uniformément bornés (2).

$$\left| \int_{x_i}^{x_j} u_n(s, b_2) ds \right| = \left| \int_{x_i}^{x_j} \alpha_n(s, b_2) ds \right| \leq \|u\| (x_j - x_i)$$

Par ailleurs pour $x \geq c_n$, on a

$$u_n(x, b_2) = \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) dy$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial \tilde{u}_{n,n}}{\partial x} dy = \varphi(c_n)$$

puisque cette quantité, d'après (7) ne dépend pas de x .

On a donc pour $x \geq c_n$.

$$u_n(x, b_2) = u_n(c_n, b_2)$$

et puisque u_n est égale à α_n pour $x = c_n$, (et $\|\alpha_n\| \leq \|u\|$)

$$(17) \quad \left| \int_x^{a_2} u_n(s, b_2) ds \right| \leq \|u\| (a_2 - x)$$

De (16) et (17) on déduit pour $x_i, x_j \in [a_1, a_2]$

$$\left| \int_{x_i}^{x_j} u_n(s, b_2) ds \right| \leq \|u\| (x_j - x_i)$$

et par passage à la limite

$$(18) \quad \left| \lim \int_{x_i}^{x_j} u_n(s, b_2) ds \right| \leq \|u\| (x_j - x_i)$$

ce qui prouve la continuité de cette limite sur $[a_1, a_2]$.

Par ailleurs la quantité $\int_{a_1}^x u(s, b_2) ds$ est une fonction continue de x et comme pour $x < a_2$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^x u_n(s, b_2) ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^x \alpha_n(s, b_2) ds \\ &= \int_{a_1}^x u(s, b_2) ds \end{aligned}$$

puisque les $|\alpha_n|$ sont bornées dans leur ensemble, on a par continuité des deux membres

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_1}^{a_2} u_n(s, b_2) ds = \int_{a_1}^{a_2} u(s, b_2) ds$$

ce qui justifie le passage à la limite dans la première intégrale.

On peut donc passer à la limite dans l'égalité (13) et la formule de GREEN est prouvée dans ce cas.

Corollaire 1

La formule de GREEN est applicable à K_0 si les conditions suivantes sont satisfaites

- a. u et v sont A.C.G ;
- b. la divergence $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ est essentiellement bornée.

Démonstration. — Posons

$$\delta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

on a évidemment

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \delta$$

Alors on peut appliquer le théorème 1, si on peut poser

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \delta = \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$\frac{\partial \omega}{\partial y}$ ayant une primitive continue en y .

Or, δ_x est sommable pour presque toutes les valeurs de x ; donc sa primitive partielle

$$D(x, y) = \int_{a_2}^y \delta(x, t) dt$$

est bien définie, continue puisque δ est essentiellement bornée, et A.C. pour presque toutes les valeurs de x .

Il s'ensuit que $\frac{\partial u}{\partial y} + \delta$ vérifie les conditions du §. 2 proposition 6. C.Q.F.D.

B. Deuxième hypothèse

Supposant à nouveau la divergence nulle, nous étudierons le cas où u et v continues, possèdent partout des dérivées partielles générales finies telles que :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Rappelons quelques propriétés de ces dérivées.

On raisonnera sur u (resp. $\frac{\partial u}{\partial y}$) ; les propriétés correspondantes pour la fonction v sont immédiates.

Proposition 1

Sur tout ensemble fermé H , il y a une portion π , où une dérivée partielle générale partout finie d'une fonction continue est bornée.

Posons

$$u_h = \frac{u(x, y + h) - u(x, y)}{h}$$

h étant une constante. Il est clair que

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Comme cette limite est finie, d'après le théorème d'OSCOOD, sur tout fermé H , il existe une portion π (délimitée par un intervalle ouvert K). et un nombre positif A , tels que

$$M \in \pi = H \cap K \Rightarrow |U_h| < A, \forall h$$

cette inégalité est encore vraie à la limite quand $h \rightarrow 0$. C.Q.F.D.

Nous aurons aussi à utiliser la proposition suivante qui est démontrée dans le traité de S. SAKS (6) pour les fonctions d'une variable.

Proposition 2

Si la fonction continue u est partout dérivable en y , sur tout ensemble fermé $H \subset K_0$, il y a une portion π , où la fonction u_x est A.C.* en y , et cela uniformément en x .

Soit, n étant entier positif, l'ensemble suivant

$$H_n = E \{ (x, y) \in H, 0 < t - y < \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$|u(x, t) - u(x, y)| < n(t - y) \}$$

et pour i entier ≥ 0 , posons

$$H_n^i = H_n \cap ([a_1, a_2] \times [b_1 + \frac{i}{n}, b_1 + \frac{i+1}{n}])$$

Il est clair que

$$H = \bigcup_n H_n = \bigcup_n \bigcup_i H_n^i$$

Soit

$$J = \{x\} \times [y_1, y_2]$$

un intervalle dont les extrémités appartiennent à H_n^i , on a

$$\forall t \in J, 0 < t - y_1 < \frac{1}{n} \Rightarrow |u(x, t) - u(x, y_1)| < n(t - y_1) < n |J|$$

Ainsi l'oscillation de u dans J vérifie l'inégalité $O(u, J) < 2n |J|$

Si (J_k) est une suite de tels intervalles, non empiétants, on aura

$$\sum O(u, J_k) < 2n \sum |J_k| < 2n(b_2 - b_1)$$

Comme les (H_n^i) sont fermés par suite de la continuité de u il y a une portion $\pi = H \cap K$, qui appartient à l'un des (H_n^i) en vertu du théorème de BAIRE.

Cette portion vérifie les conditions de l'énoncé.

C.Q.F.D.

Ces propriétés entraînent la conséquence suivante

Corollaire 2

Si u est continue, et possède partout une dérivée partielle générale finie, par rapport à y , alors u vérifie les conditions de la proposition 6 du § 2.

Démonstration. — Il faut vérifier que les conditions a et b de cette proposition sont satisfaites.

1. La condition a est satisfaite, $\frac{\partial u}{\partial y}$ étant bornée dans les portions π de H , définies dans la proposition 1.

2. La condition b l'est aussi.

Soit H un sous-ensemble fermé de K_0 .

Nous appellerons portion π de H toute ensemble de la forme

$$\pi = H \cap K, \quad K \subset K_0, \quad K \in (K_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

où les (K_i) sont des intervalles ouverts formant une base de la topologie de K_0 .

Nous étudierons successivement plusieurs cas.

i. $\pi = H \cap K$ (1) est réduit à un point isolé $M_0(x_0, y_0) \in H$. La fonction u n'est pas A.C. au voisinage de M_0 , mais l'est dans K sur toute partie fermée ne contenant pas M_0 .

On peut alors (cf. démonstration de la proposition 2 du § 2), trouver une fonction \tilde{u} égale à u sur $\text{Fr } K$ et en M_0 , et A.C. dans $\overset{\circ}{K}$.

On substituera alors \tilde{u} à u , dans cet intervalle.

ii. π est dénombrable ; comme π est fermé, il est clairsemé. Alors la répétition, éventuellement transfinie du procédé décrit en (i) permet de définir \tilde{u} dans $\overset{\circ}{K}$.

iii. π non dénombrable. — π est la réunion de son noyau parfait P et d'un ensemble clairsemé D (Théorème de CANTOR-BENDIXSON).

Alors l'application du procédé indiqué en (ii) permet d'éliminer de π la partie dénombrable D et de se ramener au cas où π est réduit à P . Nous raisonnerons donc en supposant π parfait, et sans points intérieurs. (Si π contient de tels points, $\overset{\circ}{\pi}$ n'est pas vide, et $\overset{\circ}{\pi}$ est réunion d'intervalles dans lesquels $\frac{\partial u}{\partial y}$ est borné).

iv. π parfait premier cas. — Soient

$$\pi = H \cap K \quad U = K - \pi$$

U comporte une famille au plus dénombrable de composantes connexes ouvertes $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Nous remplacerons K par un intervalle concentrique K'

$$K' \subset K \quad K' \in (K_i)_{i \in \mathbb{N}}, \text{ et } \pi' = H \cap K' \neq \emptyset$$

π' sera, aussi, parfait. On peut écrire

$$K - \pi = (\bar{K} - \bar{K}') \cup \bigcup_j K' \cap U_j$$

$$\text{Posons } V_j = \bar{K}' \cap U_j.$$

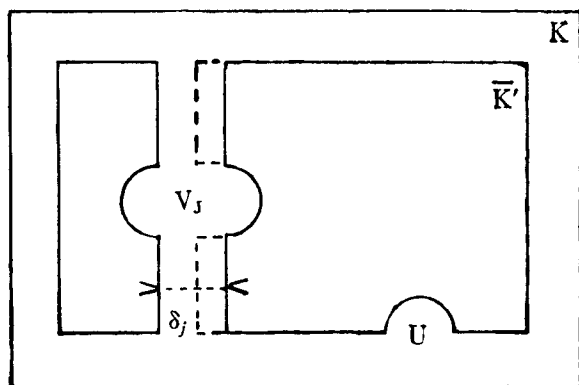
Nous nous placerons alors dans l'une des deux hypothèses suivantes

Hypothèse 1

$\bar{K}' - \bigcup_j V_j$ n'a pas de composante connexe réduite à un seul point.

Une partie des V_j ont une frontière commune avec $K - \bar{K}'$. On les réunira avec $K - K'$ en un seul domaine U .

(1) On rappelle qu'on a écrit $K = [x_1, x_2, y_1, y_2]$



Nous raccorderons les V_j restants à $K - K'$ par une bande parallèle à Oy , de largeur $\delta_j = \frac{\epsilon}{2j}$.

On notera W_j l'union de V_j et de la bande précitée (cf. figure).

Alors l'union de U et des W_j formera un seul domaine Ω , dont on peut supposer que le complément n'a pas de composante connexe réduite à un seul point (ce cas de toute façon est examiné plus loin).

On peut alors (cf. AHLFORS, Complex Analysis), résoudre pour Ω le problème de DIRICHLET, c'est-à-dire, dans le cas présent, trouver une fonction φ , harmonique dans Ω , et égale à u sur $\text{Fr } \Omega$ (On a $\text{Fr } K \subset \text{Fr } \Omega$).

Définissons alors la fonction \tilde{u} suivante

— $\tilde{u} = \varphi$ si $M \in \Omega$

— $\tilde{u} = u$ si $M \in \bar{K} - \Omega$

et montrons que \tilde{u}_x est A.C. en y , si $K_x \neq \emptyset$.

Soit K_1 un intervalle concentrique à K , tel que ΔK_1 soit voisin de ΔK . $\Delta K_1 \subset \overset{\circ}{K} - \bar{K}'$ φ étant harmonique en Ω , il en est de même de $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ qui est bornée en norme dans $\bar{\Omega} \cap K_1$ par un nombre que nous noterons M' .

Dans les intervalles de $K_{1,x}$ qui ne contiennent pas de points de π' , le module d'absolue continuité correspondant à la constante ϵ est $\frac{\epsilon}{M'}$.

Ainsi \tilde{u}_x est A.C. pour toutes les sections ne rencontrant pas π' .

Pour les sections telles que $\pi'_x \neq \emptyset$, on sait

— que \tilde{u}_x est uniformément A.C.* en y (proposition 2)

— dans les contigus (intérieurs à $\bar{\Omega}$) extrémités comprises, le module d'absolue continuité est au plus $\frac{\epsilon}{M'}$.

Ainsi sur ces sections \tilde{u}_x est également A.C.

Donc \tilde{u}_x est A.C. en y , quand $K_{1,x} \neq \emptyset$, (on peut même dire que les \tilde{v}_x ont l'absolue continuité uniforme dans K').

Mais ceci ne permet pas de conclure à une propriété similaire pour π' (si on a pu le faire pour $\pi' - \Omega$).

On va raisonner comme suit :

Donnons à la constante ϵ (cf. supra définition des (δ_j)) une suite de valeurs tendant vers zéro (ϵ_n) .

A chaque ϵ_n , correspondra une famille de bandes $\delta_{j,n}$. Nous supposons que les $\delta_{j,n}$ gardent (pour j fixé) la frontière parallèle à Oy d'abscisse minimum, fixe.

A chaque constante ϵ_n correspondra un domaine Ω_n ; une fonction harmonique φ_n , et une fonction \tilde{u}_n dont les sections $\tilde{u}_{n,x}$ seront A.C.

Il est clair que l'on aura

$\pi' = \cup (\pi' - \Omega_n)$ puisque $\cap (\Omega_n \cap \pi') = \emptyset$ d'après l'hypothèse faite sur les $\delta_{j,n}$.

Il existera donc une portion π'' de π' , et un indice n_1 , en vertu du théorème de BAIRE, telle que

$$\pi'' = K'' \cap \pi' \neq \emptyset \quad \pi'' \in \pi' - \Omega_{n_1}$$

sur K'' , \tilde{u}_{n_1} sera égale à u sur π'' , continue et on aura $\tilde{u}'_{n_1,x}$ A.C. pour les sections telles que $K''_x \neq \emptyset$.

La condition b de la proposition 6 du §. 2 est ainsi satisfaite.

v. π parfait ; second cas : L'hypothèse 1 n'est pas vérifiée :

On peut supposer que π est un ensemble discontinu. En effet $\pi = H \cap K$ étant, sans points intérieurs, est partout non dense dans K , il en est de même des continus non réduits à un point éventuellement inclus dans π .

Il existe donc des sous-intervalles fermés de K qui ne contiennent pas la réunion de ces continus ; alors

— ou bien ces sous-intervalles ne contiennent pas de point de π et on est ramené à l'hypothèse (iv).

— ou bien ces sous-intervalles contiennent des points de π . Comme π est supposé parfait, ces points forment un ensemble parfait totalement discontinu dans l'un de ces sous-intervalles.

Notre hypothèse est ainsi justifiée.

Il résulte alors d'un théorème de L. ZORETTI qu'il existe une courbe de JORDAN, $\Gamma \subset K$, telle que

$$\pi \subset \Gamma$$

Supposons Γ paramétré par $t \in [0,1]$, et soit
 $T = \{t \in [0,1], M(t) \in \pi\}$
 T sera parfait.

On peut prolonger u définie sur π en une fonction continue u^* définie sur Γ telle que

$$u^*(M) = u(M) \text{ si } M \in \pi$$

Si t est dans un contigu à T , soit $]t_1, t_2[\subset [0,1]$, on définira $u^*[M(t)]$ linéaire et continue en t , sur $]t_1, t_2]$.

On choisira ensuite dans les composantes connexes de $K - \Gamma$ (composantes au nombre de deux au maximum), une fonction φ harmonique égale à u^* sur Γ et à u sur $\text{Fr } K$, en résolvant le problème de DIRICHLET correspondant à chacune de ces composantes.

Prouvons que φ_x est A.C. pour tous les x tels que $K_x \neq \emptyset$. Comme dans le cas précédent $\frac{d\varphi}{dy}$ est borné en norme dans chacun des deux domaines ; d'après les propriétés des fonctions harmoniques (si $\frac{d\varphi}{dy}$ n'était pas bornée sur $\text{Fr } K$ on pourrait réduire cet intervalle en lui substituant un intervalle concentrique $K' \subset K$).

Soit M' cette borne.

Alors dans les intervalles K_x tels que $K_x \cap \pi = \emptyset$, le module d'absolue continuité correspondent à la constante ε sera au moins égal à $\frac{\varepsilon}{M'}$.

Quand $K_x \cap \pi = \emptyset$, φ_x est uniformément A.C. en y d'après la proposition 2, ainsi que dans les contigus à $K_x \cap \pi$.

Donc φ_x est A.C. en y d'après la proposition 2 dans π , quel que soit x , et u vérifie encore les conditions de la proposition 6 du § 2.

De ces considérations on peut déduire le résultat suivant

Théorème 2

Si les fonctions u et v sont continues dans K_o , et possèdent des dérivées partielles finies $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ vérifiant partout l'égalité

$$(1) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy}$$

Alors la forme $\omega = u dx + v dy$ est fermée dans $\overset{\circ}{K}_o$.

En effet, il résulte du corollaire 2 ci-dessus que u est la limite d'une suite de fonctions A.C. en y (u_n) pour toutes les valeurs de x .

On démontre de façon identique la même propriété pour v (en écrivant que les (v_n) sont A.C. en x); on a donc $v = \lim_A (v_n)$.

Enfin on peut supposer que les fermés H , rencontrés dans la démonstration, seront les mêmes pour u et v , ainsi que les portions π , comme il résulte de la proposition 1, ces portions formant une famille au plus dénombrable (comme dans la démonstration de la proposition 6 du § 2).

On peut donc reprendre, sans modification, la démonstration du théorème 1, et on prouverait que pour $K \subset K_o$ on a

$$\int_{\Delta K} u dx + v dy = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Dans le cas où l'on ne suppose pas la divergence nulle, la précision apportée aux hypothèses ($\frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}$ finis partout) ne permet pas d'obtenir un énoncé identique au corollaire 1.

Par contre on obtient immédiatement, par une démonstration en tous points semblable, le résultat suivant :

Corollaire 3

Si u et v sont continues dans K_o , et si $\frac{du}{dy}$ et $\frac{dv}{dx}$ sont partout finies, et telles que la divergence

$$\delta = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}$$

soit continue, on a la formule de GREEN pour $K \subset K_o$

$$\iint_K \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) dx \wedge dy = \int_{\Delta K} u dx + v dy$$

Manuscrit reçu, le 29 mai 1971.

BIBLIOGRAPHIE

- MONTEL P. — *Thèse* — Gauthier-Villars, Paris (1907).
 MONTEL P. — *Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes* « C.R. Ac. Sc. », Paris 156 (1913), p. 1 820.
 MENCHOFF A.-D. — *Les conditions de monogénéité*, HERMANN et C^{ie} (1936).
 MENCER K. — *Proceedings National Academy of Science*, vol 25, n° 12 (1939), pp. 621-625.
 MENCER K. — *Ibid.* vol 26, n° 11 (1940), pp. 660-664.
 MARKOUCHEVITCH A.-I. — *Fonctions d'une variable complexe. Problèmes contemporains*. Gauthier-Villars, Paris (1962).
 CELIDZE V.-G. — *Ueber derivierte Zahlen einer Funktion Zweier Variablen* « C.-R. Ac. Sc. » URSS 15 (1937), pp. 13-15.
 RIESZ F. et NAGY B. — *Analyse fonctionnelle* Gauthier-Villars, Paris, 2^e édit. (1953).
 SAKS S. — *Theory of the integral*. Hafner New-York (1937).
 AHLFORS L. — *Complex analysis*. Mc Graw Hill Inc. N.Y. (1953).
 PACQUEMENT A. — *Intégration indéfinie dans R²*. « Annales de l'Université de Madagascar n° 8 (1971) », pp. 7 à 13.

ADDENDUM

(1) Nous avons basé nos démonstrations par récurrence transfinie sur le Lemme de ROMANOVSKI.

Comme il existe plusieurs versions de ce Lemme, nous allons préciser celle que nous utilisons dans le présent travail.

Φ désignera une famille d'intervalles ouverts $(q_i)_{i \in I}$, $q_i \subset q_0$ possédant une certaine propriété. Le lemme est alors le suivant :

(i) *Hérédité.* — Si $q \in \Phi$, et $\tilde{q} \subset q$ alors $\tilde{q} \in \Phi$.

(ii) *Additivité.* — Si un nombre fini d'intervalles $q_j (1 < j < n)$ non empiétant, tels que

$$\forall j, q_j \in \Phi \quad \bigcup_j^o q_j = q, \text{ alors } q \in \Phi$$

(iii) *Continuité.* — Si q est un intervalle tel que pour tout $\tilde{q} \subset \overset{\circ}{q}$, on ait, $\tilde{q} \in \Phi$ alors $q \in \Phi$.

(iv) *Extension.* — Sur tout ensemble parfait $P \subset q_0$, il existe une portion non vide $P \cap q$ telle que $q \in \Phi$. Alors $q_0 \in \Phi$.

(2) Le théorème 2 de la section II a déjà été énoncé par le Professeur G. BENNETON ; (cf. note sur la formule de GREEN et les conditions suffisantes d'analyticité CR. Ac. Sc. T. 248 pp. 2548-2549 (1959)) mais sans qu'une démonstration complète ait été donn e.

La marche, très ingénieuse, indiqu e par l'auteur ne fait pas appel à la totalisation.

Il nous paraît toutefois très douteux que l'on puisse obtenir une preuve valable sans recourir à des méthodes similaires à celles que nous avons employ es.