APPLICATION DE LA DÉRIVÉE PARTICULAIRE A LA MAGNÉTODYNAMIQUE DES FLUIDES ÉLECTRIQUEMENT CHARGÉS

PAR

R. RABESAOTRA

(Laboratoire de Mathématiques)

RÉSUMÉ

Cette note est consacrée à la formulation des écoulements des fluides sous l'action d'un champ électromagnétique, les fluides n'étant plus électriquement neutres.

Dans une première partie, nous étudions les transformations à apporter aux formules de Maxwell en utilisant la notion de dérivée particulaire appliquée à des intégrales de volume et de surface, ce qui nous amène à donner des définitions précises des courants électriques pris en considération.

Dans la partie suivante, nous établissons les formules proprement dites en y mettant en évidence les changements dus à la présence des charges.

Nous terminons en transformant les formules en vue de leurs applications les plus courantes.

ABSTRACT

This paper is devoted to the formulation of equations governing the motions of electrically charged fluids subjected to an electromagnetic field.

In a first part, we deal with modifications to bring to Maxwell's formulas by using the notion of « particlar derivative » applied to volume and surface integrals, that leads us to give precise definitions of electric currents under consideration.

In the next part, we establish the very formulas by underlining modifications because of the presence of charges.

The end consists in transformations to give to formulas convenient forms for their usual applications-

0 — Rappel

Soit $K(t) = \int\int\int_V \psi(x_1, x_2, x_3, t)\, dv$, l'intégrale étant étendue à une portion de volume V, limitée par une surface S d'un fluide que l'on suit dans son mouvement, on a :

$$(0.1) \quad \frac{d}{dt}\iiint_V \psi(x_1, x_2, x_3, t)\, dv = \iiint_V \left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi\vec{U})\right] dv = \iiint_V \frac{\partial\psi}{\partial t}\, dv + \iint_S \psi\vec{U}.\vec{n}\, ds,$$

$$(0.2) \quad \frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\vec{n}\, ds = \iint_S \left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{B}\wedge\vec{U}) + \vec{U}\operatorname{div}\vec{B}\right].\vec{n}\, ds$$

où $\vec{U}$ est la vitesse de la particule et $\vec{n}$ la normale unitaire orientée vers l'extérieur de S.

I

LES ÉQUATIONS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME DANS LA MAGNÉTODYNAMIQUE DES FLUIDES

§. 1 Position du problème :

Nous prenons comme point de départ les formules de Maxwell auxquelles on joint le principe de la conservation de la charge et leurs conséquences. Il est à souligner que ces formules sont valables dans un repère par rapport auquel la plupart des circuits sont immobiles, en particulier l'induction magnétique $\vec{B}$ est définie à partir d'une distribution de charges dans ce repère. Nous nous proposons, avec les mêmes données : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ lorsque les conducteurs sont immobiles, d'étudier les variations des grandeurs caractéristiques dues au mouvement du fluide-conducteur, et des relations qui les lient. Ces considérations nous amènent à préciser certaines définitions et à introduire d'autres. Nous nous limitons aux fluides électriquement isotropes et négligeons le phénomène de polarisation.

§. 2 Courant de conduction, courant de convection

a. Dans un conducteur les charges (électrons) sont libres. Un courant à l'intérieur d'un conducteur est dû à un mouvement « ordonné » de charges. On arrive ainsi à la définition classique des courants de « conduction » $\vec{J}$ et des lois qui gouvernent leur comportement.

Conservation de la charge :

$$\text{(I. 1)} \qquad \iint_S \vec{J}.\vec{n}\, ds = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e\, dv$$

Le conducteur (solide, liquide ou gazeux que nous qualifierons désormais de fluide) étant immobile dans le repère considéré, il en est de même du volume V et de la surface S fermée qui le limite, on obtient en utilisant la formule de la divergence l'équation locale :

$$\text{(I. 2)} \qquad div \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

b. Nous étudions maintenant le cas où le fluide est mobile avec une vitesse $\vec{U}$ par rapport au repère considéré.

Si le fluide n'est pas parcouru par un courant de conduction mais a toujours une densité de charge ρ_e par unité de volume, il est passé cependant à travers la portion de surface ds un flux de courant $\rho_e \vec{U}.\vec{n}\, ds$, la densité de courant $\vec{J}_e = \rho_e \vec{U}$ définit « le courant de convection. »

Si le fluide était toujours parcouru par un courant de conduction $\vec{J}$, le principe de la conservation de la charge (1) dans lequel on applique la formule de la dérivée particulaire donne :

$$\iint_S \vec{J}.\vec{n}\, ds = -\iiint_V \left\{ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + div\, \rho_e \vec{U}) \right\} dv$$

soit l'équation locale :

$$div \vec{J} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} - div\, \rho_e \vec{U} \text{ ou}$$

$$\text{(I.3)} \qquad div\,(\vec{J} + \rho_e \vec{U}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

§. 3 Formules de Maxwell

a. Le fluide étant immobile, on a les formules locales :

$$\text{(I.4)} \qquad \begin{cases} \text{rot}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\[2ex] \text{rot}\, \vec{H} - \vec{J} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Il convient de préciser ici que nos hypothèses se traduisent par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$\vec{J}$ désigne ici bien sûr la densité de courant de conduction et $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ le courant de déplacement. Le champ d'induction $\vec{B}$ a son origine dans une distribution de charges dans l'espace considéré et est indépendant des circuits fixes ou mobiles sur lesquels il exerce des forces.

Appliquons l'opérateur div aux deux membres des 2 équations (4) il en résulte :

$$\begin{cases} 0 = \text{div}\,(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = \dfrac{\partial}{\partial t}(\text{div}\, \vec{B}) \\[2ex] 0 - \text{div}\, \vec{J} = \text{div}\, \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\text{div}\, \vec{D}) \end{cases}$$

Cette dernière équation devient, en tenant compte de (2) :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\text{div}\, (\vec{D}) - \rho_e] = 0$$

Si à un moment donné, div B $= \vec{0}$ et div $\vec{D} = \rho_e$, il en résulte :

$$\text{(I.5)} \qquad \begin{cases} \text{div}\, \vec{B} \equiv 0 \\ \text{div}\, \vec{D} \equiv \rho_e \end{cases}$$

On fait en général dans les applications ces hypothèses supplémentaires.

Remarquons qu'on sait (résultat expérimental) que lorsque un élément de volume dv portant une charge $\rho_e\, dv$ est mû à une vitesse $\vec{U}$ dans un champ d'induction $\vec{B}$, il est soumis à cause de $\vec{B}$, à une force $d\vec{F} = \rho_e\, dv\, \vec{U} \wedge \vec{B}$ ce qui correspond à un champ électrique $\vec{e} = \dfrac{d\vec{F}}{\rho_e\, dv} = \vec{U} \wedge \vec{B}$. On voit que le champ électrique augmente de $\vec{U} \wedge \vec{B}$ (induction électrique).

b. Considérons maintenant le cas où le fluide est en mouvement et désignons par $\vec{E}'$ et $\vec{H}'$ les nouveaux champs électrique et magnétique. Les équations de Maxwell sous formes intégrales s'écrivent :

$$(I.6)\left\{\begin{aligned} &\iint_S \operatorname{rot} \vec{E}'.\vec{n}\, ds = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\vec{n}\, ds \\ &\iint_S \operatorname{rot} \vec{H}'.\vec{n}\, ds - \iint_S \vec{J}.\vec{n}\, ds \\ &\qquad = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}.\vec{n}\, ds \end{aligned}\right.$$

En utilisant la formule de la dérivée particulaire aux seconds membres, il vient les équations locales :

$$\operatorname{rot} \vec{E}' = -\left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{B} \wedge \vec{U}) + \vec{U} \operatorname{div} \vec{B}\right]$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}' - \vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\vec{D} \wedge \vec{U}) + \vec{U} \operatorname{div} \vec{D}$$

En tenant compte de (I.5), ces équations s'écrivent :

$$(I.7)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}[\vec{E}' - \vec{U} \wedge \vec{B}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{rot}[\vec{H}' + \vec{U} \wedge \vec{D}] - (\vec{J} + \rho_e \vec{U}) \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

En comparant avec $\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}\right.$

que l'on pourrait appeler état initial, on voit que lorsque le fluide est en mouvement, on a les relations :

$$(I.8)\left\{\begin{aligned} &\vec{E}' - \vec{U} \wedge \vec{B} = \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \vec{U} \wedge \vec{B} \\ &\vec{H}' + \vec{U} \wedge \vec{D} = \vec{H} \Leftrightarrow \vec{H}' = \vec{H} - \vec{U} \wedge \vec{D} \end{aligned}\right.$$

et le courant de conduction $\vec{J}$ doit être remplacé par le courant total $\vec{J} + \rho_e \vec{U}$.

Dans ces conditions les grandeurs sont liées par les formules :

$$(I.9)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{(loi de Faraday, inchangée par le mouvement).} \\ &\operatorname{rot} \vec{H} - (\vec{J} + \rho_e \vec{U}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{(loi d'Ampère)} \\ &\operatorname{div}(\rho_e \vec{U} + \vec{J}) = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad \text{(conservation de la charge)} \end{aligned}\right.$$

En appliquant l'opérateur divergence aux 2 premières équations et en tenant compte de la 3^{me}, on a toujours :

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_e - \operatorname{div} \vec{D}] = 0$$

Remarques :

— Il est clair que lorsqu'on fait U = O, on retrouve les formules de Maxwell.

— Ces formules sont bien celles obtenues en relativité restreinte lorsque l'on néglige les termes d'ordre ≥ 2 en $\frac{1}{c}$.

§. 4 Expression des forces et de l'énergie électromagnétiques

Force de Lorentz : Dans un champ électrique $\vec{E}$ superposé à un champ d'induction $\vec{B}$, un élément de volume unitaire traversé par un courant total $(\vec{J} + \rho_e \vec{U})$ est soumis à une force :

$$(I.10) \qquad \vec{\emptyset} = \rho_e \vec{E} + (\vec{J} + \rho_e \vec{U}) \wedge \vec{B}$$

(densité volumique de force électromagnétique).

La densité volumique d'énergie életromagnétique est :

$$(I.11) \qquad \varepsilon_m = \vec{E}.(\vec{J} + \rho_e \vec{U})$$

On peut transformer cette expression en y faisant apparaître d'une part l'énergie relative au déplacement du fluide et d'autre part l'effet Joule.

En effet, en remarquant que la loi d'Ohm régit le courant de conduction :

$$(I.12) \qquad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \wedge \vec{B})$$

on obtient

$$\varepsilon_m = \rho_e \vec{E}.\vec{U} + (\vec{U}, \vec{J}, \vec{B}) + \rho_e (\vec{U}, \vec{U}, \vec{B}) + \vec{J}.\vec{E} + (\vec{J}, \vec{U}, \vec{B})$$

$$(I.13) \qquad \varepsilon_m = \vec{\emptyset}.\vec{U} + \frac{J^2}{\sigma}$$

II

§. 1 Equations intégrales de la magnétodynamique des fluides

Equation de la conservation de la masse ou continuité :

$$(II.1) \qquad \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dv = 0$$

avec ρ densité ou masse volumique.

Equation de la quantité de mouvement :

$$\text{(II.2)} \quad \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{U}\, dv = \iiint_V (\rho\vec{F} + \vec{\phi})\, dv + \iint_S \overleftrightarrow{C}.\vec{n}\, ds$$

$\vec{U}$: vitesse.

$\vec{F}$: force d'origine mécanique par unité de masse.

$\vec{\phi}$: densité volumique des forces électromagnétiques.

$\overleftrightarrow{C}$: tenseur des contraintes mécaniques.

Equation de l'énergie :

$$\text{(II.3)} \quad \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right) dv = \iiint_V (\rho\, \vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m)\, dv + \iint_S [(\overleftrightarrow{C}.\vec{n}).\vec{U} - \vec{\theta}.\vec{n}]\, ds$$

avec e : énergie interne par unité de masse.

$\frac{U^2}{2}$: énergie cinétique par unité de masse.

ε_m : énergie électromagnétique par unité de volume.

$\vec{\theta}$: flux de chaleur sortant par unité de surface.

Nous avons les inconnues :

Mécaniques : ρ, $\vec{U}$: 4 scalaires, $\vec{F}$ étant supposé connu.

Thermodynamiques : e, $\vec{\theta}$: 4 scalaires.

Electromagnétiques : $\vec{H}$, $\vec{E}$, q : 7 scalaires.
soit 15 inconnues scalaires.

Il faut exprimer les expressions figurant dans les équations en fonction de ces inconnues et des données. Pour déterminer le problème, il faut 15 équations scalaires.

Les équations générales du mouvement des milieux continus nous en fournissent :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Continuité} & \to 1 \\ \text{Quantité de mouvement} & \to 3 \\ \text{Energie} & \to 1 \end{array}\right\} \text{5 équations scalaires.}$$

Les équations de comportements mécanique, thermodynamique et électromagnétique nous fournissent le reste.

a. Mécanique :

$$\text{(II.4)} \quad \overleftrightarrow{C} = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{U})\overleftrightarrow{I} + 2\mu\overleftrightarrow{D}$$

Avec $\overleftrightarrow{I} = [\delta_{ij}]$

$$\overleftrightarrow{D} = \tfrac{1}{2}(\overleftrightarrow{\text{grad}}\, \vec{U} + \overline{\overleftrightarrow{\text{grad}}\, \vec{U}})$$

$$\overleftrightarrow{D} = [\varepsilon_{ij}] = \tfrac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$$

λ et $\mu \geq 0$ sont les coefficients de viscosité mécanique, fonctions supposées connues de ρ, T (hypothèse homogénéité et isotropie). Dans les applications que nous aurons à étudier, on les considère comme des constantes.

Lorsque $\lambda = \mu = 0$, on dit que le fluide est parfait, il n'y a pas dissipation d'énergie par viscosité mécanique.

On remarquera que cette relation ne donne pas d'équation supplémentaire. On a simplement explicité $\overleftrightarrow{C}$ en fonction de $\vec{U}$.

b. Thermodynamique :

(i.) On sait qu'il y a deux variables indépendantes soient s et $\tau = \frac{1}{\rho}$

$$\text{(II.5)} \quad e = e(s, \tau)$$

s : entropie spécifique.

$\tau = \frac{1}{\rho}$: volume spécifique.

Le premier principe de la thermodynamique exprime que $de + p\, d\tau$ admet un facteur intégrant $\frac{1}{T}$ d'où :

$$\text{(II.6)} \quad de = +T\, ds - p\, d\tau$$

$$\text{Donc} \begin{cases} T = \frac{\partial e}{\partial s} : \text{température absolue} \\ p = -\frac{\partial e}{\partial \tau} : \text{pression} \end{cases}$$

En éliminant s entre ces 2 dernières équations on obtient l'équation d'état :

$$\text{(II.7)} \quad p = p(\rho, T).$$

On voit ainsi que connaissant l'expression de l'énergie interne, on en déduit l'équation d'état.

Inversement, si l'on connaît l'équation d'état on déduit l'énergie interne e par l'équation aux dérivées partielles.

$$\text{(II.8)} \quad \frac{\partial e}{\partial \tau} + p\left(\tau^{-1}, \frac{\partial e}{\partial s}\right) = 0$$

Selon le problème à résoudre, on suppose *donnée* l'une ou l'autre des 2 fonctions.

Souvent dans les applications, au lieu de prendre e comme inconnue, on la remplace par s. On remarquera ici encore que la donnée de l'une de ces fonctions ne fournit pas une équation supplémentaire car elle introduit une nouvelle variable s ou T.

Signalons le cas particulier des gaz parfaits :

(II.9) $\quad p\,\tau = RT$ où R est une constante.

Le gaz est polytropique si l'on a $e = C_v\,T$ où C_v est la chaleur spécifique à volume constant. L'équation d'état s'écrit :

alors

(II.10) $\quad p = A\,(s)\,\rho^{\gamma}$

avec $\gamma = 1 + \dfrac{R}{C_v}$ appelé coefficient adiabatique $1 < \gamma < 2$. En évolution isothermique ($T = C^{te}$) on voit immédiatement $p = RT\rho$.

(*ii*) Pour la conduction thermique, on a la relation :

(II.11) $\quad \vec{\theta} = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$

où le coefficient de conductivité thermique $k \geq 0$ est une fonction supposée connue de T. On voit que cette relation *jointe* à l'équation d'état ou à la donnée de la fonction de l'énergie interne est une équation vectorielle n'introduisant pas de nouvelle variable.

En résumé donc la *thermodynamique* par *(i)* et *(ii)* nous *fournit* 3 *équations scalaires* supplémentaires.

Signalons que lorsque $k = 0$, alors $\vec{\theta} = 0$. Dans ce cas, il n'y a pas dissipation d'énergie thermique par conduction.

c. Electromagnétique :

$\vec{J}$ désigne dans tout ce qui suit la densité de « courant de conduction », la densité de courant de convection sera toujours donnée par son expression $q\,\vec{U}$ où q est la charge par unité de volume.

On a d'abord le principe de la conservation de la charge qui s'exprime par :

(II.12) $$\iiint_V \left[\text{div}\,(\vec{J} + q\,\vec{U}) + \frac{\partial q}{\partial t}\right] dv = 0$$

et les 2 lois de Maxwell :

(II.13) $$\iint_S \left\{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} + \mu_m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right\} . \vec{n}\, ds = 0$$

(II.14) $$\iint_S \left\{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{H} - (\vec{J} + q\,\vec{U}) - \varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\} . \vec{n}\, ds = 0$$

le volume V, limité par la surface S étant quelconque, nous avons là 7 *équations scalaires.* Il est vrai ici qu'on a introduit une nouvelle variable $\vec{J}$ mais d'après la loi d'Ohm, on a :

(II.15) $\quad \vec{J} = \sigma\,(\vec{E} + \vec{U} \wedge \mu_m\,\vec{H})$

où σ est le cœfficient de conductivité électrique. En vertu de l'isotropie et de l'homogéneité du milieu étudié σ se réduit à une constante positive.

Rappelons qu'en écrivant ces formules nous avons utilisé les relations :

(II.16) $$\left|\begin{array}{l} \vec{B} = \mu_m\,\vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{ll} \mu_m & : \text{perméabilité magnétique} \\ \varepsilon & : \text{cœfficient diélectrique} \end{array}\right\}$ qui sont en général, des fonctions connues de ρ et T mais que nous considérerons comme des constantes.

Signalons que lorsque $\sigma = 0$, $\vec{J} = 0$ et l'électromagnétisme nous fournit toujours 7 équations scalaires.

De même lorsque $\sigma^{-1} = 0$, la loi d'Ohm est remplacée par l'équation :

(II.17) $\quad \vec{E} + \vec{U} \wedge \mu_m\,\vec{H} = 0$

Il nous reste, pour terminer à écrire les expressions $\vec{\phi}$ et ε_m soit :

(II.18) $\quad \vec{\phi} = q\,\vec{E} + (\vec{J} + q\,\vec{U}) \wedge \mu_m\,\vec{H}$

(II.19) $\quad \varepsilon_m = (\vec{J} + q\,\vec{U}) \,.\, \vec{E}$

On a ainsi obtenu les 10 équations scalaires qui manquaient.

§. 2 Équations générales locales des mouvements continus

Pour obtenir les équations locales, il suffit d'appliquer dans les équations intégrales de la dynamique des fluides, la formule de la dérivée particulaire, et d'utiliser la formule de la divergence (Ostrogradski). Par suite de l'arbitraire du volume V limité par la surface S, moyennant la régularité des fonctions à intégrer, on obtient les équations locales par le théorème de Gauss.

Continuité ou conservation de la masse :

(II.20) $$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dv = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\ \rho\,\vec{U}\right) dv = 0$$

(II.21) $$\Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\vec{U} = 0$$

Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{U}\, dv = \iiint_V (\rho\vec{F} + \vec{\boldsymbol{\phi}})\, dv + \iint_S \overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}\,.\vec{n}\, ds$$

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\,(\rho\vec{U} \otimes \vec{U})\right] dv = \iiint_V (\rho\vec{F} + \vec{\boldsymbol{\phi}} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}})\, dv$$

(II.22) $$\Longrightarrow \frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho\vec{F} + \vec{\boldsymbol{\phi}} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}})$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right) dv = \iiint_V (\rho\vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m)\, dv + \iint_S [(\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}.\vec{n}).\vec{U} - \vec{\theta}.\vec{n}]\, ds,$$

$$\iiint_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}\rho\left[\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\vec{U}\right]\right\} dv = \iiint_V [\rho\vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m + \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}.\vec{U}) - \operatorname{div}\vec{\theta}]\, dv$$

(II.23) $$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\vec{U}\right] = \rho\vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m + \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}.\vec{U}) - \operatorname{div}\vec{\theta}$$

A ces 5 équations scalaires, il faut joindre les équations de comportement.

Les équations de comportements mécanique et thermodynamique sont déjà données sous formes locales.

En électromagnétisme, on a :

(II.24) $$\operatorname{div}(\vec{J} + q\vec{U}) + \frac{\partial q}{\partial t} = 0$$

les 2 équations de Maxwell :

(II.25) $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} + \mu_m \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0$$

(II.26) $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + q\vec{U} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

et la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{U}\,\Lambda\,\mu_m\vec{H})$$

En résumé, nous avons donc le système ci-dessous :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{U}) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho\vec{F} + \vec{\boldsymbol{\phi}} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\vec{U}\right] = \rho\vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m + \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}\vec{U}) - \operatorname{div}\vec{\theta}$$

Pour fixer les idées, nous supposons donné $e = e(s, \tau)$

d'où $$\begin{cases} T = \dfrac{\partial e}{\partial s} \\ p = -\dfrac{\partial e}{\partial \tau} \end{cases}$$

$$\vec{\theta} = -k\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,T$$

et enfin : $\operatorname{div}(\vec{J} + q\vec{U}) + \dfrac{\partial q}{\partial t} = 0$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} + \mu_m\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{H} = \vec{J} + q\vec{U} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{U}\,\Lambda\,\mu_m\vec{H})$$

avec

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{C}} = (-p + \operatorname{div}\vec{U})\overleftrightarrow{I} + 2\mu\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} \text{ où } \overleftrightarrow{I} = 1 = [\delta_{ij}]$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} = \tfrac{1}{2}(\overleftrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{U} + \overline{\overleftrightarrow{\operatorname{grad}}\,\vec{U}})$$

$$\vec{\boldsymbol{\phi}} = q\vec{E} + (\vec{J} + q\vec{U})\,\Lambda\,\mu_m\vec{H}$$

$$\varepsilon_m = (\vec{J} + q\vec{U}).\vec{E}$$

III

TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS

En vue de leurs utilisations dans les applications les plus courantes, il convient de transformer ces formules.

En ce qui concerne l'emploi des indices, nous nous conformerons aux notations habituelles de l'analyse vectorielle et tensorielle.

Transformations relatives aux grandeurs mécaniques et thermodynamiques

On a $\rho\vec{U} \otimes \vec{U} = [\rho U_i U_j]$ d'où

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{div}}\, \rho\vec{U} \otimes \vec{U})_i &= (\rho U_i U_j),_j \\ &= \rho,_j U_i U_j + \rho U_{i,j} U_j + \rho U_i U_{j,j} \\ &= U_i(\rho,_j U_j + \rho U_{j,j}) + \rho U_{i,j} U_j \\ &= U_i(\rho U_j),_j + \rho U_j U_{i,j} \\ &= [\vec{U}\, \mathrm{div}(\rho\vec{U}) + \rho(\vec{U}\nabla)\vec{U}]_i \text{ d'où}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \vec{U}\, \mathrm{div}(\rho\vec{U}) + \rho(\vec{U}\nabla)\vec{U}$$

mais $(\vec{U}\nabla)\vec{U} = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}) \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{U^2}{2}$ donc

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \vec{U}\, \mathrm{div}(\rho\vec{U}) + \rho(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{U^2}{2})$$

D'autre part

$$\frac{\eth}{\eth t}(\rho\vec{U}) = \vec{U}\frac{\eth\rho}{\eth t} + \rho\frac{\eth\vec{U}}{\eth t}$$

qui, compte tenu de l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\eth}{\eth t}(\rho\vec{U}) = \vec{U}[-\mathrm{div}(\rho\vec{U})] + \rho\frac{\eth\vec{U}}{\eth t},$$

si bien que l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho\left[\frac{\eth\vec{U}}{\eth t} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{U^2}{2}\right] = \rho\vec{F} + \vec{\phi} + \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overleftrightarrow{C}$$

Dans l'équation de l'énergie, on a au premier membre :

$$\frac{\eth}{\eth t}\left[\rho(e + \frac{U^2}{2})\right] + \mathrm{div}\left[\rho(e + \frac{U^2}{2})\vec{U}\right] =$$

$$\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\frac{\eth\rho}{\eth t} + \rho\frac{\eth}{\eth t}\left(e + \frac{U^2}{2}\right) + \rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\mathrm{div}\,\vec{U}$$

$$+ \vec{U}.[\rho\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(e + \frac{U^2}{2}\right) + \left(e + \frac{U^2}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho]$$

qui se réduit en utilisant encore l'équation de la continuité et la formule de la dérivée particulaire d'un scalaire à

$$\begin{aligned}&= \rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{U^2}{2}\right) \\ &= \rho\frac{de}{dt} + \rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2}\end{aligned}$$

Au lieu de l'énergie interne e, on peut prendre comme inconnue l'entropie s. En effet :

$de = \mathrm{T}\, ds - p\, d\tau$ avec $\tau = \frac{1}{\rho}$ d'où $d\tau = -\frac{d\rho}{\rho^2}$ et

$de = \mathrm{T}\, ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$ donc $\frac{de}{dt} = \mathrm{T}\frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$

mais d'après la continuité $\frac{d\rho}{dt} = -\rho\, \mathrm{div}\,\vec{U}$ d'où

$\frac{de}{dt} = \mathrm{T}\frac{ds}{dt} - \frac{p}{\rho}\mathrm{div}\,\vec{U}$, finalement

$$\frac{\eth}{\eth t}\left[\rho(e + \frac{U^2}{2})\right] + \mathrm{div}\left[\rho(e + \frac{U^2}{2})\vec{U}\right] = \rho\,\mathrm{T}\frac{ds}{dt} - p\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2}$$

D'autre part

$$\vec{\theta} = -k\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{T} \text{ d'où } \mathrm{div}\,\vec{\theta} = -k\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\mathrm{T}) = -k\,\Delta\mathrm{T}$$

en considérant $k = C^{te}$

L'équation de l'énergie prend maintenant la forme :

$$\rho\mathrm{T}\frac{ds}{dt} - p\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2} = \rho\vec{F}.\vec{U} + \varepsilon_m + \mathrm{div}(\overleftrightarrow{C}\vec{U}) + k\,\Delta\mathrm{T}$$

Nous allons faire subir une dernière transformation à cette équation. Multiplions scalairement l'équation de la quantité de mouvement par $\vec{U}$, il vient :

$$\rho[\vec{U}.\frac{\eth\vec{U}}{\eth t} + \vec{U}.(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} \wedge \vec{U}) + \vec{U}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{U^2}{2}]$$

$$= \rho\vec{F}.\vec{U} + \vec{\phi}.\vec{U} + (\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overleftrightarrow{C}).\vec{U} \quad \text{ou}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2} = \rho\vec{F}.\vec{U} + \vec{\phi}.\vec{U} + (\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overleftrightarrow{C}).\vec{U}$$

Compte tenu de ce résultat, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho\,\mathrm{T}\frac{ds}{dt} - p\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2} = \rho\frac{d}{dt}\frac{U^2}{2} + \frac{J^2}{\sigma} + \mathrm{div}(\overleftrightarrow{C}\vec{U}) - (\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overleftrightarrow{C})\vec{U} + k\,\Delta\mathrm{T}$$

on a :

$$\mathrm{div}(\overleftrightarrow{C}\vec{U}) - (\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\overleftrightarrow{C}).\vec{U} = \overleftrightarrow{C} : \overleftrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{U}$$

mais :

$$\overleftrightarrow{C} = (-p + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{U})\overleftrightarrow{I} + 2\mu\,\overleftrightarrow{D}$$

donc le second membre s'écrit :

$$\begin{aligned}&= (-p + \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{U})\overleftrightarrow{I} : \overleftrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{U} + 2\mu\,\overleftrightarrow{D} : \overleftrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{U} \\ &= -p\,\mathrm{div}\,\vec{U} + \lambda(\mathrm{div}\,\vec{U})^2 + 2\mu\,\overleftrightarrow{D} : \overleftrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{U}\end{aligned}$$

On a ainsi l'expression finale de l'expression de l'énergie :

$$\rho\,\mathrm{T}\frac{ds}{dt} = \frac{J^2}{\sigma} + \lambda\,(\mathrm{div}\,\vec{U})^2 + 2\mu\,\overleftrightarrow{D} : \overleftrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{U} + k\,\Delta\mathrm{T}$$

Transformations relatives aux grandeurs électromagnétiques

Elles donnent une certaine symétrie à l'équation de la quantité de mouvement, éliminent le courant de conduction $\vec{J}$ et font apparaître le vecteur de Poynting $\vec{E} \wedge \vec{H}$. On a la conservation de la charge : $\operatorname{div}(\vec{J} + q\vec{U}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$, les 2 équations de Maxwell :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = -\mu_m \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} = (\vec{J} + q\vec{U}) + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}\right.$$

On tient compte du courant de déplacement.

Prenons la divergence des équations de Maxwell, il en résulte :

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{H}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\vec{J} + q\vec{U}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{d'où}$$

en prenant comme hypothèse qu'à l'instant initial, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \text{ (champ magnétique conservatif)} \\ \varepsilon \operatorname{div} E - q = 0 \text{ ou } q = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E}\text{, ces égalités deviennent des identités} \end{array}\right.$$

On a :

$$\vec{\phi} = q\vec{E} + (\vec{J} + q\vec{U}) \wedge \mu_m \vec{H}.$$

Compte tenu des équations ci-dessus, ceci s'écrit

$$\vec{\phi} = (\varepsilon \operatorname{div} \vec{E})\, \vec{E} + (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} - \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \wedge \mu_m \vec{H}$$

$$\vec{\phi} = (\varepsilon \operatorname{div} \vec{E})\vec{E} - \varepsilon\mu_m \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge H + \mu_m \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} \wedge \vec{H}$$

$$\text{Or } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ mais } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_m} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{H}) - \frac{1}{\mu_m} (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} \wedge \vec{E}) \text{ d'où}$$

$$\vec{\phi} = (\varepsilon \operatorname{div} \vec{E})\vec{E} + \varepsilon\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} \wedge \vec{E} + \mu_m \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{H} \wedge \vec{H} + (\mu_m \operatorname{div} \vec{H})\vec{H} - \varepsilon\mu_m \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \wedge \vec{H})$$

mais $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} \wedge \vec{A} = (\vec{A}\nabla)\vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}} \frac{A^2}{2}$ donc

$$\vec{\phi} = \varepsilon \left[(\operatorname{div} \vec{E})\, \vec{E} + (\vec{E}\nabla)\vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} \frac{E^2}{2} \right] + \mu_m \left[(\operatorname{div} \vec{H})\vec{H} + (\vec{H}\nabla)\vec{H} - \overrightarrow{\text{grad}} \frac{H^2}{2} \right] - \varepsilon\mu_m \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

<u>*Définition*</u> : On appelle tenseur de contrainte électromagnétique $\overleftrightarrow{\boldsymbol{E}}$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{E}} = \varepsilon(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{E^2}{2}\overleftrightarrow{I}) + \mu_m(\vec{H} \otimes \vec{H} - \frac{H^2}{2}\overleftrightarrow{I})$$

et densité de moment électromagnétique $\vec{g}$

$$\vec{g} = \varepsilon\mu_m(\vec{E} \wedge \vec{H})$$

On voit alors qu'on peut écrire :

$$\vec{\phi} = \overrightarrow{\text{div}}\, (\overleftrightarrow{\boldsymbol{E}}) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{g}$$

L'équation de la quantité de mouvement prend alors la forme :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\vec{U} \right] = \rho\vec{F} + \overrightarrow{\text{div}}\, (\overleftrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}) - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

Les 3 équations fondamentales sont finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho\vec{U}) = 0$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U}\nabla)\, \vec{U} \right] = \rho\vec{F} + \overrightarrow{\text{div}}\, (\overleftrightarrow{\boldsymbol{E}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{C}}) - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

$$\rho\, T \frac{ds}{dt} = \lambda(\operatorname{div} \vec{U})^2 + 2\mu\, \overleftrightarrow{\boldsymbol{D}} : \overleftrightarrow{\text{grad}}\, \vec{U} + k\, \Delta T + \frac{J^2}{\sigma}$$

BIBLIOGRAPHIE

I. GERMAIN (P.). — Mécanique des milieux continus. 1 vol. édit. Masson et Cie. Paris 1962.

II. GERMAIN (P.). — Introduction à l'étude de l'aéromagnétodynamique. Cahiers de Physique no 103, 1959, pp. 98-128.

III. KULIKOVSKIY (A.-G.) et LYUBIMOV (G.-A.). — Magnetohydrodynamics, Addison-Wesley. Massachusetts, 1965.

IV. LANDAU (L.), LIFCHITZ (E.). — Electrodynamique des milieux continus. Edition MIR, Moscou 1969.

V. ESKINAZI (S.). — Vector Mechanics of fluids and Magnetofluids. Academic Press 1967.

VI. CABANNES (H.). — Magnétodynamique des fluides. Centre de Documentation Universitaire 1969.