

INTÉGRATION INDÉFINIE DANS R^2

PAR

Antoine PACQUEMENT

(Service de Mathématiques)

RÉSUMÉ

La présente étude a pour but d'étendre à R^2 la notion d'Intégrale indéfinie définie dans R par M.-A. DENJOY, c'est-à-dire le calcul inverse de la dérivation.

Diverses méthodes d'extension ont été présentées par plusieurs auteurs (1), mais d'une part ceux-ci choisissent comme mode de dérivation celle des fonctions d'intervalle ; d'autre part l'intégration correspondante ne paraît pas dépasser le stade de la totalisation complète.

Dans notre étude nous substituons aux dérivées de fonction d'intervalle, la notion de dérivée approximative décrite dans une note presque inconnue de V.-G. CELIDZE.

On peut ainsi étendre à R^2 la notion de totale indéfinie (continue) de MM. DENJOY et KHINTCHIN.

L'on indique en terminant un mode de calcul de l'intégrale indéfinie ainsi obtenue, basé sur le calcul totalisant.

ABSTRACT

The aim of this study is to extend to functions of two variables the definition of the D. Integral on the real line.

Definitions already given, rely mostly on the BURKILL derivation theory of functions of an interval and the corresponding integrations do not extend further than the so-called D^* — Integral.

In this paper, we make use of the more general notion of the approximate derivate, seldom mentioned, and due to Mr. V.-G. CELIDZE.

We are thus enabled to extend to the plane the descriptive definition of the D-Integral as given by MM. DENJOY and KHINTCHIN.

A mode of calculus based on transfinite induction is given in fine.

INTRODUCTION

Pour une fonction numérique dérivable, f , définie dans un intervalle compact $I = [a, b] \subset R$, le problème de l'intégration indéfinie est la recherche d'un processus permettant le calcul de f à partir de sa dérivée f' .

On sait que si f' est seulement supposée partout finie, et bien que la fonction primitive soit déterminée à une constante additive près, l'intégration de LEBESGUE ne permet pas de calculer la fonction f , hors le cas où celle-ci est absolument continue (A.C.).

Il appartenait à M. A. DENJOY (2) de résoudre le problème ainsi posé, en instaurant un processus sommatoire dénommé calcul totalisant ; dans cette perspective f est la « totale indéfinie » de f' , et jouit d'une propriété remarquable, l'absolue continuité généralisée ; on dira que f est A.C.G.

La manière la plus simple de caractériser une fonction A.C.G. est la suivante : « Une fonction numérique f sera dite « A.C.G. », s'il existe une suite d'ensembles (E_n) , telle que dans chaque E_n , f soit égale à la restriction d'une fonction A.C. : f_n ».

De plus f étant continue, on peut supposer les E_n fermés.

Il s'avère alors que f est dérivable presque partout en un sens à préciser ; cette dérivée, dite dérivée approximative, est presque partout égale à celle de la fonction f_n .

Si l'on appelle f'_{ap} la dérivée ainsi obtenue, il s'avère en outre que f'_{ap} est totalisable et a pour totale f . D'où une définition descriptive des totales indéfinies :

La fonction f sera dite une totale indéfinie continue de la fonction φ , si les conditions suivantes sont vérifiées :

- a. f est A.C.G.
- b. f a pour dérivée approximative φ presque partout.

Quand on passe des fonctions numériques d'une variable, aux fonctions de deux variables la question

se présente d'une manière plus complexe, ne serait-ce que du fait de l'imprécision de la notion de « dérivée » de fonction de deux variables.

Notre étude comportera donc deux parties :

I. Dérivation et fonctions A.C.G. dans \mathbb{R}^2 .

II. — Définition et calcul de l'intégrale indéfinie dans \mathbb{R}^2 .

I. DÉRIVATION ET FONCTIONS ACG

Nous bornerons notre étude à celle de fonctions numériques définies dans un intervalle (rectangle) de \mathbb{R}^2 , $q_0 = [a_1, a_2; b_1, b_2]$.

Signalons qu'il y a deux méthodes principales d'introduire une dérivation dans \mathbb{R}^2 .

— La première, avec BURKILL (3), utilise principalement la notion de fonction d'intervalle. $q = [x_1, x_2; y_1, y_2]$ étant un sous-intervalle de q_0 , F une fonction continue de l'intervalle q , la dérivée en un point $M_0 \in q_0$, sera la limite de rapports de la forme :

$$\frac{F(q)}{|q|} \text{ où } x_0 \in q \text{ et } |q| \rightarrow 0.$$

— La seconde, développée dans une note peu connue de V.-G. CELIDZE (4) utilise plutôt la notion de fonction de point, et bien que semblable pour l'essentiel à la précédente, aboutit à une théorie plus simple.

C'est celle-ci que nous suivrons.

Notre rôle se bornera pratiquement à un rappel des résultats de M. CELIDZE, mis à part les énoncés sur les dérivées secondes mixtes, qui ne se trouvent pas chez cet auteur.

I. 1 — Notations. — q désignera un intervalle rectangulaire de \mathbb{R}^2 ; on notera :

$$q = (x_1, x_2; y_1, y_2)$$

où x_1, x_2 sont les abscisses extrêmes des côtés; y_1, y_2 les ordonnées extrêmes. L'on aura toujours $q \subset q_0$.

On désignera pour la fonction de point F définie dans q_0 par $F(q)$ la quantité :

$$\Delta(F; x_1, x_2, y_1, y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2)$$

Il est clair que si l'on connaît $F(a_1, y)$ et $F(y, b_1)$, la formule précédente appliquée à $q = (a_1, x; b_1, y)$ permet de définir une fonction de point à partir de $F(q)$.

On passera donc d'une notation à l'autre suivant les besoins de l'exposé.

La fonction $F(q)$ est additive au sens restreint, c'est-à-dire que si q_1, q_2, \dots, q_n forment une famille d'intervalles non empiétant (i.e. sans points intérieurs communs) on pourra écrire :

$$F(q_1 \cup q_2 \dots \cup q_n) = F(q_1) + F(q_2) \dots + F(q_n)$$

Enfin si $F(x, y)$ est continue, il en est de même de $F(q)$, c'est-à-dire que $|q|$ désignant la mesure de l'intervalle q

$$|q| \rightarrow 0 \implies |F(q)| \rightarrow 0$$

Réciproquement, $F(a_1, y)$ et $F(x, b_1)$ étant supposées continues, la continuité de $F(q)$ entraîne celle de $F(x, y)$.

I. 2 — Définition 1. — La fonction $F(x, y)$ sera dite absolument continue dans q_0 , si ε , et α désignant des nombres positifs, q_1, q_2, \dots, q_n étant des intervalles non empiétant,

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha \text{ t. } q \sum_{i=1}^n |q_i| < \alpha \implies \sum_{i=1}^n |F(q_i)| < \varepsilon$$

I. 2 — Définition 2. — La fonction $F(x, y)$ sera dite absolument continue sur un ensemble $E \subset q_0$, s'il existe une fonction absolument continue $\Phi(x, y)$ dans q_0 , telle que

$$\Phi|E = F|E$$

Pour abréger nous écrirons A.C. pour absolument continue.

I. 2 — Définition 3. — La fonction F sera dite absolument continue généralisée et on écrira A.C.G., s'il existe une partition au plus dénombrable de $q_0 = \bigcup_n E_n$, telle que

$$\forall n \ F|E_n \text{ soit A.C.}$$

Si F est en outre continue, ce que nous supposons dorénavant, on pourra supposer les (E_n) fermés.

I. 3 — Définition de la densité. — E étant un ensemble mesurable, x_0 un point de E , on définira la densité de E au point x_0 comme suit :

I. 3. 1. — (q_n) désignant une suite décroissante d'intervalles contenant x_0 , tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = 0$,

on appellera densité de E au point x_0 , la limite quand elle existe du rapport $\frac{|E \cap q_n|}{|q_n|}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Plus précisément on a le théorème suivant dû à SAKS (5).

I. 3. 2. — Théorème : Si E est mesurable, E a presque partout une densité égale à un. Plus précisément, étant donné les nombres positifs ε , α et β on peut trouver un sous-ensemble fermé $A \subset E$, et deux nombres positifs σ_1 et σ_2 , tels que :

$$1. |E - A| < 2\varepsilon$$

2. $\forall (x_0, y_0) \in A$, l'ensemble $A \cap [x_0, x; y_0, y]$, ait une densité relative supérieure à $(1-\alpha)(1-\beta)$, si $|x-x_0| < \sigma_1$ et $|y-y_0| < \sigma_2$.

On démontre même que l'on peut déterminer l'ensemble $A \cap [x_0, x; y_0, y]$ précédent de façon à ce que ses sections :

— par une parallèle à Ox , aient pour projection sur cet axe un même ensemble $E(x_0, \xi)$ de densité relative supérieure à $1-\alpha$ sur $[x_0, x]$

— par une parallèle à Oy soit un ensemble $E(y, \eta)$ de densité relative supérieure à $1-\beta$ sur $[y_0, y]$.

1. 4 — *Dérivation semi-régulière des fonctions d'intervalle.*

1. 4 — *Définition 1* : On dit qu'un intervalle q a pour paramètre de régularité le nombre k , si l'on a

$$\frac{1}{k} \leq \frac{|y_1 - y_2|}{|x_1 - x_2|} \leq k$$

1. 4 — *Définition 2* : Si $F(q)$ est une fonction d'intervalle définie dans q_0 , on appelle *dérivée semi-régulière de raison k , au point x_0 la limite, quand elle existe de l'expression*

$$\frac{F(q)}{|q|}$$

lorsque $|q| \in 0, x_0 \in q$, le paramètre de régularité de q n'excédant pas k .

On a le théorème suivant dû à BURKILL.

1. 4. 3 — Théorème. — *Soit f une fonction sommable dans q_0 ,*

1. 4. 3. 1
$$F(q) = \int \int_q f(x, y) dx dy$$

son intégrale indéfinie, $F(q)$ a presque partout f comme dérivée semi-régulière de raison k .

1. 5 — *Dérivation approximative de la fonction de point.*

On peut remarquer que les ensembles de densité un au point $M_0(x_0, y_0)$ forment une base de filtre $\mathcal{F}(M_0)$.

On introduira la définition suivante :

1. 5. 1 — *F étant définie sur un ensemble $E \ni M_0$, on dira que F possède en M_0 une dérivée approximative $DF_{ap}(x_0, y_0)$, s'il existe un élément $E' \subset \mathcal{F}(M_0)$ tel que la quantité*

$$\frac{\Delta(F; x_0, x; y_0, y)}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

ait une limite quand $M(x, y)$ tend vers M_0 , avec $M \in E' \cap E$

L'unicité de la dérivée, quand elle existe, tient à ce que $f(M_0)$ est une base de filtre.

Ces définitions rappelées on a les théorèmes suivants dus à M. V.-G. CELIDZE.

1. 5. Théorème. — *Si au point $M_0(x_0, y_0)$ la fonction continue $F(x, y)$ a une dérivée semi-régulière d'intervalle de raison k , quel que soit le nombre k , F possède en M_0 une dérivée approximative.*

1. 5. 1 — Corollaire 1. — *Si f est sommable dans q_0 , son intégrale indéfinie $F(q)$ (1. 4. 3. 1) a f presque partout comme dérivée approximative.*

Ce corollaire résulte du théorème précédent et du théorème de BURKILL (1. 4. 3).

1. 5. Théorème 2. — *Si $F(x, y)$ est A.C.G. dans q_0 , F a presque partout une dérivée approximative finie.*

1. 5. Théorème 3. — *Si la fonction $F(x, y)$ continue, a en tout point de q_0 , à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable, une dérivée approximative finie, alors F est A.C.G.*

1. 5. Théorème 4. — *Si $F(x, y)$ est A.C.G. dans q_0 et a presque partout une dérivée approximative nulle ; $F(x, y)$ est de la forme*

$$F(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) \quad (\varphi \text{ et } \psi \text{ continues}).$$

1. 5. 4 — Corollaire 1. — *Une fonction A.C.G. dans q_0 est déterminée par la donnée de sa dérivée approximative, finie presque partout, a une expression de la forme $\varphi(x) + \psi(y)$ près.*

Venons maintenant à la relation entre dérivée approximative et dérivée seconde mixte.

1. 6 — Proposition 1. — *Si $F(x, y)$ est A.C. sur un ensemble mesurable E , il existe une fonction sommable $f(x, y)$ telle que :*

- i)
$$F(x, y) = \int \int_{[a_1, x; b_1, y]} f(s, t) ds dt$$
- ii)
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \right] = f(x, y) \text{ presque partout sur } E$$

F n'est en effet sur E (1. 2. 2) que la restriction d'une fonction A.C. Φ , définie dans q_0 . Si donc Φ est A.C. dans q_0 on a en vertu du théorème de RADON NIKODYM

(1. 6. 1. 1)
$$\Phi(x, y) = \int \int_{[a_1, x; b_1, y]} f(s, t) ds dt$$

où f est une fonction sommable ; ce qui équivaut à l'assertion i) pour $(x, y) \in E$.

On a donc en vertu du théorème de FUBINI appliqué à Φ

(1. 6. 1. 2)
$$\Phi(x, y) = \int_{a_1}^x dt \int_{b_1}^y f(t, s) ds$$

Il s'ensuit que pour presque toutes les valeurs de x .

On a

(1. 6. 1. 3)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \int_{b_1}^y f(t, s) ds = \varphi(x, y)$$

Ceci entraîne que l'on a presque partout l'égalité

(1. 6. 1. 4)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \varphi(x, y)$$



En effet, on sait que (cf. SAKS *loc. cit.* IV.3) que les nombres dérivés (supérieur et inférieur) à droite de DINI d'une fonction mesurable, sont mesurables.

Appelant $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ces nombres dérivés, l'ensemble

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{q}_0, \frac{\partial\Phi}{\partial x} \approx \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right\}$$

est mesurable, et comme sa section par toute parallèle à Ox est de mesure nulle, E_1 est lui-même de mesure nulle en vertu du théorème de FUBINI ; l'égalité (1. 6. 1. 4) est donc vérifiée presque partout.

Un raisonnement analogue effectué sur $\psi(x, y)$, (on pourra prendre $\psi(x, y) = 0$ sur l'ensemble des parallèles à Oy , sur lesquelles ψ n'aurait pas été défini par (1. 6. 1. 3)), prouve que l'on a presque partout dans q_0

$$(1. 6. 1. 5) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \zeta(x, y) = f(x, y)$$

Si l'on veut passer de la fonction Φ à la fonction F , il faut noter que les dérivations ne doivent être prises que sur l'ensemble E , en sorte que la dérivée ordinaire doit être remplacée par la notion de dérivée approximative. Toutefois, cette nouvelle exigence ne modifie pas le résultat. On a en effet le théorème suivant dû à SAKS (*ibid* IX. 11.2)

« Si une fonction finie de deux variables F est mesurable sur un ensemble E , ses dérivées approximatives, supérieure et inférieure, sont mesurables sur E ».

Appelant $\bar{D}_{ap, x}$ et $\underline{D}_{ap, x}$ les dérivées approximatives extrêmes, on verra comme ci-dessus que l'on a pour presque toutes les valeurs de x

$$\varphi (1. 5. 1. 6) \quad \bar{D}_{ap, x} F(x, y) = \underline{D}_{ap, x} F(x, y) = \zeta(x, y)$$

et que l'ensemble

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{q}_0, \bar{D}_{ap, x} F \approx \underline{D}_{ap, x} F \right\}$$

étant mesurable, l'égalité (1. 6. 1. 5) a lieu presque partout dans \mathfrak{q}_0 — un raisonnement analogue est applicable à $\psi(x, y)$, d'où l'assertion *ii*.

Il nous faut encore prouver l'énoncé ci-après :

1. 6 — Proposition 2. — Si $F(x, y)$ est A.C. sur un ensemble mesurable E , $F|E$ a presque partout pour dérivée approximative la fonction f de 1. 6. 1.

Si la propriété est vérifiée pour $E = \mathfrak{q}_0$ (1. 5. 1. Cor. 1) elle n'est pas évidente pour E mesurable, car si (x_0, y_0) , $(x, y) \in E$, il n'en va pas forcément de même des points (x_0, y) , (x, y_0) .

En fait ce point va découler, presque partout, du théorème de densité 1. 3. 2.

On peut supposer d'abord que (x_0, y_0) appartient à l'ensemble A défini dans la démonstration de ce théorème.

Soit \mathfrak{q}_1 , l'intervalle centré sur (x_0, y_0) , pour lequel on a $|x-x_0| < \sigma_1$; $|y-y_0| < \sigma_2$; posons $E_1 = E \cap \mathfrak{q}_1$

Dans la définition de la dérivée approximative (1. 5. 1), on prendra $(x, y) \in E_1$, $x \in E(x_0, \xi)$; $y \in E(y, \eta) \cap E(y_0, \eta)$. Le premier ensemble (cf. 1. 3. 2) a sur $[x_0, x]$ une densité relative supérieure à $1-\alpha$, le second une densité relative supérieure à $1-2\beta$.

En sorte que l'ensemble

$$E(x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in E_1 ; x \in E(x_0, \xi), y \in E(y, \eta) \cap E(y_0, \eta) \right\}$$

a dans tout intervalle concentrique à \mathfrak{q}_1 une densité relative supérieure à $(1-\alpha)(1-2\beta)$.

Donnons alors à $\varepsilon, \alpha, \beta$ une suite de valeurs décroissantes tendant vers zéro (ε_i), (α_i), (β_i), et soit A_1 l'ensemble défini à partir des nombres $\varepsilon_i, \alpha_i, \beta_i$, comme A l'a été à partir de $\varepsilon, \alpha, \beta$; soit A_0 l'ensemble limite inférieure des A_i . Il est clair que l'on a

$$|E - A_0| = 0$$

F étant la restriction de Φ à E , on a presque partout dans A_0

$$D_{ap} \Phi(x, y) = f(x, y)$$

Mais comme $(x, y) \in A_0$, il existe un entier n_0 , tel que

$$\forall n > n_0 \implies (x, y) \in A_n$$

Posant $M = (x, y)$, $M' = (x+h, y+k)$, supposons que $\Phi(x, y)$ ait une dérivée approximative en M , c'est-à-dire qu'il existe un ensemble E' de densité un en M , tel que le rapport

$$(1. 6. 2. 1) \quad \frac{\Delta[F; x, x+h; y, y+k]}{h.k}$$

ait une limite quand $h, k \rightarrow 0$ et $M' \in E'$.

Etant donné $\eta > 0$, on peut trouver un nombre α' , tel que \mathfrak{q}' désignant un intervalle centré sur (x, y) , de côtés inférieurs à $2\alpha'$, on ait :

$$|E' \subset \mathfrak{q}'| < (1-\eta) |\mathfrak{q}'|$$

Choisissons n_0 assez grand pour que $n > n_0$ on ait : $\alpha_n < \alpha'$ $\beta_n < \beta'$

l'ensemble des points $M' \in \mathfrak{q}' \cap A_n$ aura une densité superficielle supérieure à $1-2\varepsilon_n - \eta$.

Ainsi si on fait tendre M' vers M , de façon à avoir $M' \in A_0 \cap E'$, on aura $x+h \in A_{0,y}$, $y_0+k \in A_{0,x}$, et dans A_0 , la limite approximative du rapport 1.6.2.1., sera la même pour Φ que pour $F|E$, c'est-à-dire pour F . C.Q.F.D.

Revenant à 1.2. Définition 3 : Si F est A.C.G. dans \mathfrak{q}_0 , supposons que $F|E_n$ soit égale à la restriction d'une fonction A.C. Φ_n , on a le corollaire suivant :

1.6.3. — Corollaire. — *En presque tous les points de E_n , F et Φ_n ont la même dérivée approximative.*

C'est une conséquence immédiate de 1.6.2. et de la définition 1.2.3.

Des propositions 1 et 2 et du corollaire on déduit l'énoncé suivant (énoncé général du théorème de SCHWARTZ).

1.6.4. — Théorème. — *Si F est A.C.G. dans q_0 :*

a. *F possède presque partout des dérivées secondes mixtes (approximatives) et une dérivée approximative.*

b. *Les 3 dérivées sont presque partout égales.*

II. DÉFINITION ET CALCUL DE L'INTÉGRALE INDÉFINIE

La définition de la dérivée approximative d'une fonction de deux variables et les théorèmes de M. V.G. CELIDZE permettent d'étendre à R^2 la définition descriptive des totales de MM. DENJOY et KHINTCHIN. On a la définition suivante :

II.1. — Définition. — *La fonction numérique f définie dans q_0 , sera dite totalisable et de totale F , s'il existe une fonction F . A.C.G. dans q_0 et ayant f pour dérivée approximative presque partout.*

II.1. — Proposition 1. — *Si f est totalisable, la totale $F(x, y)$ est définie à une expression de la forme $\varphi(x) + \psi(y)$ près.*

La fonction $F(q)$ est définie sans ambiguïté pour tout $q \subset q_0$.

C'est une conséquence immédiate de 1.5.4.

Ainsi F est déterminée par f dans le sens que nous venons de préciser. Pour éviter toute ambiguïté, on supposera par la suite que l'on a $F(x, y) = 0$ si $x = a_1$ (pour tout y) ou $y = b_1$ (pour tout x). La définition II.1. généralise donc celle des totales des fonctions d'une variable.

Elle est plus générale que celle obtenue par la méthode des fonctions d'intervalle (définitions de S. KEMPSTY et P. ROMANOVSKI) qui ne dépasse pas le stade de la totalisation complète.

Toutefois, quand on veut passer au problème du calcul de l'intégrale indéfinie, on rencontre deux séries d'obstacles.

i. Difficulté d'étendre à R^2 la méthode de calcul par récurrence transfinie.

ii. L'on ne possède pas de théorème pour les totales, analogue au théorème de FUBINI pour l'intégration des fonctions sommables de deux variables.

Plus précisément G.-P. TOLSTOV (6) a prouvé l'impossibilité d'un tel théorème pour les totales.

L'on peut néanmoins présenter un mode de calcul de la primitive F basé :

— D'une part sur le théorème de FUBINI pour les fonctions sommables.

— De l'autre sur le calcul totalisant.

Nous ferons un certain nombre de remarques préliminaires.

II.2. — Remarque I. — *Soit $F(x, y)$ une primitive de f , pour presque tout x_0 , $F_{x_0}(y)$ est une fonction A.C.G.*

En effet, sur chaque E_n (1.2. Déf. 3), $F(x, y)$ est égale à une fonction A.C. sur q_0 , $\Phi_n(x, y)$.

Comme par hypothèse $F(a_1, y) = 0$, on pourra prendre $\Phi_0(a_1, y) = 0$. Soit γ le module d'absolue continuité de Φ_0 correspondant au nombre positif ε , et soit $O = \bigcup_k [\alpha_k, \beta_k]$, un ouvert situé sur $\{x_0\} \times R$, tel que les points (α_k) (β_k) appartiennent à E_n ; et $|O| > \gamma$. On aura :

$$\sum_k |F_{x_0}(\beta_k) - F_{x_0}(\alpha_k)| = \sum_k |\Phi_{x_0}(\beta_k) - \Phi_{x_0}(\alpha_k) - \Phi_{a_1}(\beta_k) + \Phi_{a_1}(\alpha_k)| < \varepsilon$$

Ainsi $F_{x_0}(y)$ est A.C. sur E_n .

Enfin comme il est clair que $F_{x_0}(y)$ est continue $F_{x_0}(y)$ est A.C.G., pour presque tout x_0 .

II.2. — Remarque 2. — *Le calcul de $F_{x_0}(y)$ peut se faire à partir de la dérivée première $\frac{\delta F}{\delta y}[x_0, y]$ supposée connue presque partout.*

C'est une conséquence immédiate de la remarque qui précède et du fait que sur presque toute parallèle à Oy , les points où $\frac{\delta F}{\delta y}$ est connue forment un ensemble partout dense.

II.2. — Remarque 3. — *Pour tout $H \subset q_0$, il existe une portion π , un intervalle K et un entier n_1 , tels que :*

$$\pi = H \cap K \quad \pi \subset E_{n_1}$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de BAIRE. En particulier :

II.2. — Remarque 4. — *Il existe un ouvert O_1 partout dense sur q_0 , tel que pour tout intervalle fermé q tel que :*

$$q \subset O_1$$

F soit A.C. sur q .

O_1 est la réunion de tous les intervalles ouverts dans lesquels f est sommable.

On appellera F_1 , l'ensemble $q_0 - O_1$.

D'après II.2.3., il existe une portion $\pi = F_i \cap K$, $\pi \subset E_{n_1}$, sur E_{n_1} on aura $F(x, y) = \Phi_{n_1}(x, y)$, $\pi_{n_1}(x, y)$ étant A.C. sur q_0 .

II.3. — *Calcul de $F(x, y)$.* — La méthode que nous allons exposer repose sur le calcul totalisant.

Il nous suffira d'expliciter la première étape de ce calcul, i.e. le calcul de F , dans l'intervalle $K[\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2]$ défini en II.2.3. où H est remplacé par E_1 .

K sera un intervalle où la restriction F/E_1 sera sommable ; et $K \cap E_1 \neq \emptyset$.

L'ouvert $O_1 \cap K$ comprend une famille au plus dénombrable, et partout dense de parties annexes (D_m) , telles que $O_1 \cap K = \bigcup_m (D_m)$.

Sur le fermé $E_{n_1} = K - O_1$, F est égale à Φ_{n_1} .

Nous envisagerons deux cas :

II. 3. 1^{er} cas. — $\Phi_{n_1}(x, y)$ est nulle sur E_{n_1} .

Dans chaque domaine D_m , on peut calculer $F(x, y)$ avec une indétermination que nous allons indiquer.

Sur tout intervalle fermé $q \subset D_m$, f est sommable ; on peut donc trouver de proche en proche, en utilisant des rectangles accolés, la valeur de la primitive F dans f dans D_m à une expression de la forme $\varphi(x) + \psi(y)$ près.

Pour calculer F dans K sur une parallèle à Oy , d'abscisse x_0 , on notera que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y)$ est totalisable (II.2.2.) ; $\frac{\partial F}{\partial y}$ dans D_m est déterminée à une fonction totalisable ψ'_y près.

Par ailleurs il résulte de I.6.2. que sur E_{n_1} $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ est égal à $\frac{\partial \Phi_{n_1}}{\partial x}(x, y)$, c'est-à-dire à zéro, presque partout. Si l'on se donne la fonction $\varphi(x)$, on aura :

$$F(x_0, y) = \int_{\beta_1}^y \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, s) dx + \psi(y) + \varphi(x)$$

et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ étant totalisable, F est connue dans K avec l'indétermination annoncée.

II. 3. 2^e cas. — $\Phi_{n_1}(x, y)$ n'est pas supposée nulle.

On se ramène au cas précédent en prenant pour Φ_{n_1} une fonction A.C. dans K , simplement assujettie à avoir pour dérivée seconde mixte f sur E_{n_1} . (Il y a une infinité de solutions).

Φ_{n_1} étant ainsi fixée, on raisonne comme précédemment, en substituant à F la fonction :

$$G(x, y) = F(x, y) - \Phi_{n_1}(x, y)$$

et à f la fonction, déterminée presque partout et totalisable

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x, y)$$

II.3.3. — *Conclusion.* — Il est clair que les intervalles, tels que K , forment une famille partout dense $(K_i)_{i \in I}$; soit $O_2 = \bigcup_i (K_i)$.

On pourra raisonner sur le fermé $F_2 = q_0 - O_2$ comme on vient de le faire sur F_1 .

D'après II.2.3, il existe une portion π' de F_2 , appartenant à l'un des E_n , i.e. sur laquelle f sera sommable.

Soit $\pi' = F_2 \cap K'$.

On calculera F dans K' , comme on vient de le faire dans K , les intervalles (K_i) étant substitués aux intervalles dénommés q dans II.3.1, et on aura F dans K' avec une indétermination de la forme : $\varphi(x) + \psi(y)$.

Bien entendu l'indétermination dans les (K_i) sera précisé par le choix des fonctions φ et ψ dans K' .

La famille $F_1, F_2, \dots, F_\alpha$ étant strictement décroissante, on aura $F_\alpha = \emptyset$ pour un ordinal au plus dénombrable $\alpha = \alpha_0$.

Et notre procédé de calcul aura donné $F(M)$, $\forall M \in q_0$, à une expression de la forme : $\varphi(x) + \psi(y)$ près.

II. 4 — CAS PARTICULIERS

Nous terminerons en indiquant divers cas particuliers, où la méthode précédente se simplifie, et où le calcul de l'intégrale double peut se faire par intégrations successives, comme pour les fonctions sommables.

Il s'agit de cas où la fonction F possède, pour presque toutes les valeurs de x , une dérivée partielle en x , F'_x qui remplisse des conditions suffisantes pour être une primitive de $y \rightarrow f(x, y)$.

C'est ce qui aura lieu si le critère suivant est vérifié : F'_x est dérivable en y pour presque toutes les valeurs de y . On aura alors :

$$F'_x(x, y) = \int_{\beta_1}^y f(x, s) ds$$

pour presque toutes les valeurs de y ; puis :

$$F(x, y) = \int_{\alpha_1}^x F'_s(s, y) ds$$

puisque F est continue et A.C.G. en x et a pour presque tout x F'_x comme dérivée partielle.

C'est ce qui a lieu dans les cas suivants.

Premier cas. — F possède une différentielle seconde. — Si F possède la différentielle seconde f en tout point M (x, y) de q_0 , F vérifie en ces points une égalité de la forme :

$$|\Delta F; x, x + h, y, y + k - f(x, y) h.k.| = \varepsilon(h, k) |h.k.|$$

où $\varepsilon(h, k)$ tend vers zéro avec $|h| + |k|$.

F est évidemment continue.

Par ailleurs, il résulte de 1.5. Théorème 1 que F(x, y) a f(x, y) comme dérivée approximative partout, et de 1.5. Théorème 3 que F(x, y) est A.C.G. dans q_0 .

D'après la propriété des différentielles secondes, F est alors continûment différentiable en x, et sa dérivée partielle F'_x est elle-même dérivable en y et de dérivée f. (On a d'ailleurs les mêmes conclusions en échangeant x et y).

Le critère précédemment énoncé est vérifié, d'où l'énoncé ci-après :

II.4. — Proposition 1 : Si la fonction F possède une différentielle seconde mixte finie f, en tous les points de q_0 , F est la totale indéfinie de f et le calcul de F à partir de f peut se faire par intégrations successives.

Deuxième cas. — Validité de la formule de GREEN. — P désignant une fonction continue partout dérivable en x, la formule ci-après :

$$\int \int_{q_0} \frac{\partial P}{\partial y} dx \, d\Lambda y = \int_{\Delta q_0} P(x, y) dx$$

n'a de sens que si la fonction $\frac{\partial P}{\partial y}$ est totalisable, ce qui exige que le second membre soit A.C.G., propriété qui n'a rien d'automatique.

Appelons $\prod(q)$ ce second membre, qui est une fonction d'intervalle additive et continue.

Il est clair que $\prod(q)$ définit une fonction de point $\prod(x, y)$ (Cf. I. 1) et que π a pour dérivée partielle en x.

$$\prod'_x = P(x, y)$$

qui est continue et dérivable en y.

Ainsi la formule (1) a un sens si la fonction :

$$\pi(q) = \int_{\Delta q} P(x, y) dx$$

est A.C.G.

On peut encore énoncer la proposition suivante :

II.4. — Proposition 2. — Pour que la formule de GREEN :

$$\int \int_{q_0} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \wedge dy = \int_{q_0} P dx + Q dy$$

soit valable, il suffit que :

— Les fonctions P et Q soient bornées.

— Les fonctions $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ partout définies soient, chacune, totalisables dans q_0 .

Manuscrit reçu le 15 mars 1970

BIBLIOGRAPHIE

- (1) KEMPISTY (St). — *Fonctions d'intervalle non additives* Hermann et Cie, (1937).
- (2) DENJOY (A.). — *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse.* GAUTHIER-VILLARS (1954).
- (3) BURKILL (J.-C.) — *The derivatives of functions of intervals.* Fund Math., t. 5, pp. 321-327 (1924).
- (4) CELIDZE (V.-G.). — *Ueber desivierte zahlen einer Funktion zweier variablen.* C.R. Akademia Sc.URSS, t.15, pp. 13-15 (1937).
- (5) SAKS (S.). — *Theory of the integral.* 2^e éd. HAFNER — New York (1937).
- (6) TOLSTOV G.-P.). — *Matematicheskii Sbornik*, t. 24, pp. 263-278 (1949).