TRANSFORMATION INDUITE PAR LA TRANSFORMATION DE BOGOLIUBOV SUR LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE DIRAC

PAR

RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA*

(Laboratoire de Physique)

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les principaux résultats de la généralisation de la transformation de Bogoliubov T, nous étudions la transformation induite par T dans l'espace des solutions de l'équation de Dirac. Des hypothèses simples sur les formes des paramètres de la transformation T montrent que les fonctions d'onde attachées aux quasi-particules satisfont à une équation similaire à celle de Dirac.

ABSTRACT

After having recalled the main results obtained from the generalization of the Bogoliubov transformation, we study the transformation induced by it in the space of the solutions of Dirac's equation. Then, simple hypothesis on the form of the Bogoliubov transformation parameters lead to the fact that the quasi-particle wave functions may satisfy an equation similar to Dirac's one.

INTRODUCTION

Dans la théorie de la supraconductibilité en seconde quantification [1], Bogoliubov a introduit des combinaisons linéaires d'opérateurs de création et d'annihilation de particules (transformation de Bogoliubov). Ces combinaisons appelées opérateurs de quasi-particules sont astreintes à satisfaire deux conditions :

a. Elles vérifient les mêmes relations de commutation que celles des particules ;

b. La valeur moyenne d'un hamiltonien pris entre le « vide » des quasi-particules est minima.

Cette transformation de Bogoliubov T a été ensuite utilisée dans les problèmes à N-corps, dans l'étude des mouvements collectifs. Dans tous les cas, on se réfère toujours à une certaine forme de hamiltonien, donc à un modèle.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à la première condition *a.* c'est-à-dire aux relations de commutation, et nous ne considérerons pas de modèle. Les résultats obtenus seront donc indépendants de tout type de hamiltonien. Nous aborderons l'étude des relations de commutation sous l'optique des transformations formellement unitaires T. Les opérateurs de quasi-particules sont alors définis comme étant les transmués par T des opérateurs de particules. Cette méthode, non seulement assure que les relations de commutation sont conservées, mais présente l'avantage suivant : elle donne immédiatement et sans aucun calcul l'expression du vide des quasi-particules $|0 \gg$ (« vide physique ») en fonction du vide des particules $|0>$ (« vide nu ») : $|0 \gg = T\,|0 \gg$. Certes, d'après le théorème de von Neuman, dans un espace de dimension finie, deux représentations d'une loi de commutation déterminée sont unitairement équivalentes. On peut alors se demander si les deux représentations sont unitairement équivalentes ou unitairement inéquivalentes. Ce problème ne sera pas toutefois étudié dans ce travail.

Nous considérons alors la transformation de Bogoliubov T comme une transformation formellement unitaire dans un espace abstrait : il est possible ainsi d'en donner une généralisation, de parler de paramètres de rotation et de translation, d'introduire les générateurs de translation et de rotation et finalement de définir des transformations homogènes et inhomogènes [2] [3]. Dans le chapitre I, nous rappelons les résultats concernant le cas des fermions car dans le chapitre II, nous allons nous intéresser à l'étude de la transformation induite dans l'espace des spineurs solutions de l'équation

---

* Ancien chargé de recherches au Centre National Français de la Recherche Scientifique.

de DIRAC. Exprimant les opérateurs de création et d'annihilation de fermions à partir des opérateurs de quasi-fermions, nous développons l'opérateur de champ de fermion en fonction de ces derniers. Nous obtenons alors que les spineurs, coefficients des opérateurs des quasi-particules (nous pouvons les appeler fonctions d'onde attachées aux quasi-particules tout comme les solutions de l'équation de DIRAC sont les fonctions d'onde attachées aux particules) peuvent vérifier une équation similaire à celle de DIRAC, moyennant des hypothèses *simples* sur la forme (et *uniquement* sur la forme) des paramètres de la transformation T. Il est cependant étonnant de remarquer qu'une des solutions ainsi obtenues *coïncide exactement* avec celle donnée par la diagonalisation d'un hamiltonien de type de Fermi (modèle de Fermi de champ de fermion en auto-intéraction) [2]. Rappelons qu'ici nous n'avons fait appel à aucun hamiltonien.

De même, non seulement l'équation ainsi obtenue, tout comme l'équation de DIRAC, contient déjà l'équation de KLEIN-GORDON, mais on peut aussi introduire des projecteurs où la matrice pseudo-scalaire γ_5 joue un rôle important et qui correspondent en quelque sorte aux projecteurs habituels obtenus à partir de l'équation de DIRAC. Dans ce travail nous ne souleverons pas la discussion, certes importante, sur la covariance relativiste l'équation obtenue.

I. RAPPEL SUR LA TRANSFORMATION DE BOGOLIUBOV POUR LES FERMIONS

Nous pouvons généraliser la transformation introduite par BOGOLIUBOV [1] dans la théorie de la supraconductivité en la considérant sous l'optique des transformations formellement unitaires [2] [3]. Nous introduisons des groupes d'opérateurs qui ont les mêmes relations de commutation que les moments angulaires et qui jouent le rôle de « générateurs de rotation » pour les transformations homogènes. Pour la translation qui n'est autre que la transformation utilisée par TOMONAGA dans la théorie de la source fixe, nous pouvons de même envisager les opérateurs infinitésimaux correspondants. La transformation inhomogène s'obtient en combinant la transformation homogène et la translation.

Dans ce travail, nous nous intéressons au cas des fermions. Il y a alors quatre paramètres ; cependant deux seuls sont intéressants, les deux autres ne donnent que des changements de phase. Dans la suite, nous calculerons des quantités de la forme $U\overset{+}{U}$ (où $+$ signifie le conjugué hermitique), les phases n'interviendront pas. Aussi, sans diminuer la généralité de nos résultats, pouvons-nous poser égaux à 0 les deux paramètres de phases.

$b(\vec{p}, r)$ $\left[\overset{+}{b}_{\vec{p},r}\right]$ et $d(\vec{p}, r)$ $\left[\overset{+}{d}(\vec{p}, r)\right]$ désignent respectivement les opérateurs d'annihilation [de création] d'un fermion et d'un antifermion d'impulsion $\vec{p}$ et d'hélicité r. La transformation formellement unitaire T s'écrit alors :

$$T = \exp 2i \left\{ \sum_{\vec{p}, r} (\theta_1 T_1 (\vec{p}, r) + \theta_2 T_2 (\vec{p}, r)) \right\}$$

où :

$$T_1 (\vec{p}, r) = \frac{1}{2} \left\{ \overset{+}{b}(\vec{p}, r)\, \overset{+}{d}(-\vec{p}, r) + d(-\vec{p}, r)\, b(\vec{p}, r) \right\}$$

$$T_2 (\vec{p}, r) = \frac{1}{2i} \left\{ \overset{+}{b}(\vec{p}, r)\, \overset{+}{d}(-\vec{p}, r) - d(-\vec{p}, r)\, b(\vec{p}, r) \right\}$$

θ_1 et θ_2 sont les deux paramètres réels (les « angles de rotation ») intéressants de la transformation, qui sont des fonctions de l'impulsion $\vec{p}$ et de l'hélicité r.

Les opérateurs de quasi-particules sont définis comme étant les transmués des opérateurs de particules par T :

$$\text{(I. 1)} \qquad \begin{aligned} \alpha(\vec{p}, r) &= T\, b(\vec{p}, r)\, T^{-1} \\ \beta(-\vec{p}, r) &= T\, d(-\vec{p}, r)\, T^{-1} \end{aligned}$$

T étant formellement unitaire, il est évident que les opérateurs de quasi-particules $\alpha(\vec{p}, r)$ $\beta(-\vec{p}, r)$ ainsi que leurs conjugués hermitiques vérifient les mêmes relations de commutation que les opérateurs de particules. Nous pouvons inverser la transformation (I. 1) et, après de calculs laborieux qui peuvent d'ailleurs être simplifiés en utilisant les fonctions génératrices nous obtenons

$$\text{(I. 2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} b(\vec{p}, r) &= \cos\theta\, \alpha(\vec{p}, r) \\ &\quad + i\, e^{i\varphi} \sin\theta\, \overset{+}{\beta}(-\vec{p}, r) \\ d(-\vec{p}, r) &= \cos\theta\, \beta(-\vec{p}, r) \\ &\quad - i e^{i\varphi} \sin\theta\, \overset{+}{\alpha}(\vec{p}, r) \end{aligned} \right.$$

où θ et φ (qui sont fonctions de $\vec{p}$ et de r) sont respectivement le module et la phase du nombre complexe $\theta_1 + i\theta_2$.

La transformation T induit dans l'espace des solutions de l'équation de DIRAC une transformation que nous allons maintenant étudier.

II. TRANSFORMATION INDUITE PAR T.

1. DÉVELOPPEMENT DE L'OPÉRATEUR DE CHAMP EN FONCTION DES OPÉRATEURS DE QUASI-PARTICULES

En théorie de seconde quantification, l'opérateur de champ $\psi(\vec{x})$ de fermion se développe dans le schéma de SCHRÖDINGER suivant la formule :

(II. 1. 1)

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\vec{p}, r} \left\{ u(\vec{p}, r)\, b(\vec{p}, r)\, e^{i\vec{p}\vec{x}} + v(\vec{p}, r)\, d^{+}(-\vec{p}, r)\, e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right\}$$

où :

$b(\vec{p}, r)$ est l'opérateur d'annihilation d'un fermion d'impulsion $\vec{p}$ et d'hélicité r.

$d^{+}(\vec{p}, r)$ est l'opérateur de création d'un anti-fermion d'impulsion $\vec{p}$ et d'hélicité r.

$u(\vec{p}, r)$ est solution de l'équation

$$(-\gamma^{\mu} p_{\mu} + m)\, u(\vec{p}, r) = 0$$

$v(\vec{p}, r)$ est solution de l'équation

$$(-\gamma^{\mu} p_{\mu} + m)\, v(\vec{p}, r) = 0$$

$\gamma^{\mu}\,[\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^0]$ sont les quatre matrices de DIRAC habituelles.

Les notations sont les mêmes que dans le livre de S. SCHWEBER [4].

p_{μ} est le quadri-vecteur impulsion-énergie

$$\left[\vec{p},\ p_0 = E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}\right].$$

Il est bien connu que $u(\vec{p}, r)$ et $v(\vec{p}, r)$ sont reliés par la conjugaison de charge C :

$$[v(\vec{p}, r)]_{\alpha} = C_{\alpha\beta}\, [u(\vec{p}, r)]_{\beta}$$

et sont normalisés :

(II.1.2)

$$u^{+}(\vec{p}, r)\, u(\vec{p}, s) = v^{+}(\vec{p}, r)\, v(\vec{p}, s) = \delta_{rs}$$

$$u^{+}(\vec{p}, r)\, v(-\vec{p}, s) = v^{+}(\vec{p}, r)\, u(-\vec{p}, s) = 0$$

(+ signifie l'hermitique conjugué)

v désigne le volume de la boîte de quantification.

Exprimons maintenant $\Psi(\vec{x})$ en fonction des opérateurs de quasi-particules en utilisant la formule (I. 2) :

(II. 1. 3)

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\overleftarrow{p}, r} \left\{ U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, \alpha(\vec{p}, r) + V(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, \beta^{+}(-\vec{p}, r) \right\}$$

où $U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)$ et $V(\theta, \varphi, \vec{p}, r)$ sont des combinaisons linéaires des solutions $u(\vec{p}, r)$ et $v(\vec{p}, r)$ de l'équation de DIRAC.

$$\text{(II. 1. 4)} \quad \begin{cases} U(\theta, \varphi, \vec{p}, r) = \cos\theta\, u(\vec{p}, r) \\ \quad + i e^{-i\varphi} \sin\theta\, v(-\vec{p}, r) \\ V(\theta, \varphi, \vec{p}, r) = i e^{-i\varphi} \sin\theta\, u(-\vec{p}, r) \\ \quad + \cos\theta\, v(\vec{p}, r) \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons dans la suite $U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)$ et $V(\theta, \varphi, \vec{p}\, r)$ par U et V tout simplement ; nous expliciterons seulement les variables θ, φ, $\vec{p}$, r lorsqu'elles jouent un rôle important. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de U et V.

2. PROPRIÉTÉS DE U ET V

Comme T est unitaire, U et V sont normés :

$$U^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, U(\theta, \varphi, \vec{p}, s) = V^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, V(\theta, \varphi, \vec{p}, s) = \delta_{rs}$$

$$U^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, V(\theta, \varphi, -\vec{p}, s) = V^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, s)\, U(\theta, \varphi, -\vec{p}, r) = 0$$

(Quand nous écrivons $V(\theta, \varphi, -\vec{p}, s)$, il ne faut pas oublier que θ et φ sont fonctions de P et de r).

Ces relations peuvent être vérifiées directement à partir de (II. 1. 4).

Pour chercher l'équation vérifiée par U et V, nous calculons les quantités.

$$UU^{+}\gamma^{0} \text{ et } VV^{+}\gamma^{0}$$

(nous ne faisons pas la sommation sur les indices répétés sauf indication contraire) :

$$\text{(II. 2. 1)} \quad \begin{cases} U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, U^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, \gamma^{0} = \\ \dfrac{1}{2E}\Big[\gamma_0 P^0 + \cos 2\theta\, (-\gamma.\vec{p} + m) \\ + \sin 2\theta \cos\varphi\, p_0 \gamma^5 \\ + i \sin 2\theta \sin\varphi \left\{ -i\varepsilon^r |p| \right. \\ \left. + m\gamma^5\gamma_0 \right\}\Big] \otimes \dfrac{(1 + \varepsilon^r \vec{\sigma}.\vec{n})}{2} \end{cases}$$

où $\varepsilon^r = \begin{cases} +1 \text{ pour } r = 1 \text{ (hélicité « up »)} \\ -1 \text{ pour } r = 2 \text{ (hélicité « down »)} \end{cases}$

$\vec{\sigma}\,\vec{n} = \dfrac{\overleftarrow{\sigma}.\,\vec{p}}{|\vec{p}|}$: σ sont les 3 matrices de Pauli

Le second facteur $\dfrac{(1 + \varepsilon^r \vec{\sigma}.\,\vec{n})}{2}$ montre que U est vecteur propre de l'hélicité.

Le produit ⊗ est défini dans l'appendice. Remarquons aussi que le premier facteur du second membre de (II.2.1) est la forme la plus générale d'opérateur commutant avec l'hélicité $\Sigma.\dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\left(\vec{\Sigma} = \left(\begin{array}{c|c} \vec{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma} \end{array}\right)\right)$; l'hélicité est en effet conservée par la transformation T.

3. Maintenant, nous allons montrer qu'en faisant des hypothèses simples sur les formes de θ et de φ (et uniquement sur les formes), nous pouvons satisfaire à la condition suivante :

(II. 3. 1) $$\sum_{r=1,2} U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\, U^{+}(\theta, \varphi, \vec{p}, r)\gamma^0 = \frac{1}{2\varepsilon}\left\{ \gamma^0 \varepsilon - \vec{\gamma}\,\vec{p} + (f + m) + g\gamma^5 \right\}$$

c.à.d. que $U(\theta, \varphi, \vec{p}, r)$ vérifie l'équation :

(II.3.2) $$(-\gamma^{\mu} P_{\mu} - g\gamma^5 + f + m)\, U(\theta, \varphi, \vec{p}, r) = 0$$

(II. 3. 3.) où P_{μ} est le quadri-vecteur $(\vec{p}, p_0 = \varepsilon)$

L'équation (II.3.1) est similaire à l'équation de Dirac. Evidemment, dans le cas où la transformation T se réduit à l'identité ($\theta = \varphi = 0$), elle redonne l'équation de Dirac ($f = g = 0$).

De même de l'équation (II.3.1), nous pouvons facilement déduire l'équation de Klein-Gordon :

(II.3.4) $$\left\{ P^{\mu} P_{\mu} - (f + m)^2 - g^2 \right\} U(\theta, \varphi, \vec{p}, r) = 0$$

Nous pouvons alors appeler « accroissement scalaire » de la masse le coefficient f dans (II.3.1) et « accroissement pseudo-scalaire » de la masse le coefficient g de la matrice pseudo-scalaire γ^5 dans (II.3.1). f et g proviennent tous deux de la transformation T et sont différents de 0 ($f \neq 0$ et $g = 0$, ou $f = 0$ et $g \neq 0$, ou $f \neq 0$ et $g \neq 0$) quand T ne se réduit pas à la transformation identique.

Nous concevons aisément qu'il puisse y avoir une infinité de possibilités pour obtenir la relation (II.3.1). Cependant, des hypothèses fort simples sur la dépendance en r des paramètres θ et φ de la transformation T permettent d'avoir les relations entre toutes les quantités définies dans (II.3.1) et dans le paragraphe (II.1) donc de satisfaire l'équation (II.3.1) ; elles sont d'ailleurs suggérées par la formule (II.2.1).

$$a \begin{cases} \theta(\vec{p}, r) = \theta(\vec{p}) \text{ est indépendant de } r. \\ \varphi(\vec{p}, r) = \varepsilon^r \varphi(\vec{p}) \text{ où } \varphi(\vec{p}) \text{ ne dépend pas de } r. \end{cases}$$

La sommation sur $r = 1,2$ dans (II.2.1) s'effectue aisément. $\theta(\vec{p})$ et $\varphi(\vec{p})$ sont définies alors sans aucune ambiguïté. Nous obtenons cependant une condition de compatibilité qui s'écrit :

(II.3.5) $$\varepsilon^2 = \vec{p}^2 + (f + m)^2 + g^2$$

L'équation (II.3.2) a donc une forme similaire à celle de Dirac, et $p_0 = \varepsilon$ est bien égal à $\sqrt{\vec{p}^2 + (f + m)^2 + g^2}$. L'équation (II.3.5) correspond à l'équation de Klein-Gordon.

Il est étonnant de remarquer que toutes les conditions trouvées dans le cas particulier envisagé sont exactement celles obtenues par H. Umezawa, Y. Takahashi, S. Kamefuchi dans la diagonalisation d'un hamiltonien H_F de type de Fermi (l'hamiltonien d'intéraction est alors une auto-intéraction de champ de fermion) [2]. Elles peuvent être aussi obtenues en cherchant l'état qui minimise la valeur moyenne de H_F. Ici, nous n'avons utilisé aucun modèle.

$$b \begin{cases} \theta(\vec{p}, r) = \varepsilon^r\, \theta(\vec{p}) \\ \varphi(\vec{p}, r) = \varphi(\vec{p}) \end{cases}$$

Nous obtenons encore une solution. La solution correspond à celle trouvée dans *a*. dans les cas où $g = 0$.

c. Si $\theta(\vec{p}, r)$ et $\varphi(\vec{p}, r)$ sont *tous les deux* indépendants de r, nous obtenons la solution trouvée dans le paragraphe *a* dans le cas où $f = 0$.

$$d \text{ Si} \begin{cases} \theta(\vec{p}, r) = \varepsilon^r\, B(\vec{p}) \\ \varphi(\vec{p}, r) = \lambda\, \varepsilon^r\, \varphi(\vec{p}) \text{ avec } \lambda = \pm 1, \end{cases}$$

nous n'obtenons que la solution triviale $f = 0$ et $g = 0$, la transformation T se réduisant alors à l'identité.

CONCLUSION

Ainsi, le développement de l'opérateur de champ de fermion en fonction des opérateurs de quasi-particules et des hypothèses *très simples* sur la forme des paramètres de la transformation de Bogoliubov nous ont conduit à envisager l'équation (II.3.1) qui est similaire à celle de DIRAC. De même, par analogie avec les projecteurs habituels :

$$\text{(c. 1)} \qquad p_{\pm} = \frac{\pm \sum_{\mu=0,3} \gamma^{\mu} p_{\mu} + m}{2\,m}$$

nous pouvons considérer les projecteurs suivants

$$\text{(c. 2)} \qquad p_{\pm} = \frac{\pm(\gamma^{\mu} p_{\mu} + g\gamma^{5}) + f + m}{2(f+m)}$$

Nous vérifions aisément que ce sont bien des projecteurs c'est-à-dire :

$$p_{+} + p_{-} = I$$

$$p_{\pm}^{2} = p_{\pm}$$

$$p_{+} p_{-} = p_{-} p_{\pm} = o$$

Maintenant, introduisons les quantités pentadimensionnelles :

$$\pi_{\rho} = \begin{cases} \pi_i = p_i & \text{pour } \rho = i = (1,2,3) \\ \pi_4 = \sqrt{p^2 + (f+m)^2 + g^2} & \text{pour } \rho = 4 \\ \pi_5 = g \end{cases}$$

$$\text{et } \Gamma^{\rho} = \begin{cases} \Gamma^{i} = \gamma^{i} & \text{pour } i = (1,2,3) \\ \Gamma^{4} = \gamma^{o} & \text{pour } \rho = 4 \\ \Gamma^{5} = \gamma^{5} & \text{pour } \rho = 5 \end{cases}$$

nous pouvons alors définir le produit pentadimensionnel :

$$\sum_{\rho=1}^{5} \Gamma^{\rho} \pi_{\rho} = \Gamma . \pi \, \gamma^{\mu} P_{\mu} + g \gamma^{5}$$

Le tenseur métrique est :

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -g^{44} = g^{55} = -1$$

Les projecteurs $p_{\pm}$ définis par la formule (c. 2) peuvent donc s'écrire :

$$\text{(c. 3)} \qquad p_{\pm} = \frac{\pm \Gamma . \pi + f + m}{2(f+m)}$$

ainsi que l'équation (II. 3. 2) :

$$\text{(c. 4)} \qquad \left\{ \Gamma . \pi + (f+m) \right\} U = 0$$

et (II. 3. 5) : $\pi^{\rho} \pi_{\rho} - (f+m)^2 = 0$

A première vue, ce que faisons semble n'être qu'une pure notation. Cependant, nous voudrions souligner que l'équation (c. 4) et les formules (c. 3) sont une généralisation de l'équation de DIRAC et des projecteurs habituels avec une dimension supplémentaire. Ainsi, en effectuant une transformation de BOGOLIUBOV T. qui dépend de deux paramètres arbitraires, nous avons été amené de façon naturelle à introduire une cinquième dimension en plus de l'espace-temps. Nous pouvons montrer que cette cinquième dimension (c.-à-d. g) intervient dès lors que nous considérons l'intéraction fermion-antifermion dans l'hamiltonien (nous avons en plus de l'hamiltonien libre habituel le terme g $\vec{\Psi}(x)\, \gamma_5\, \Psi(x)$. Vus les conditions et les moyens modestes utilisés, les conclusions auxquelles nous arrivons sont assez remarquables, à savoir l'introduction naturelle d'une cinquième dimension, sa liaison avec l'intéraction fermion-antifermion, sa connection avec la transformation de BOGOLIUBOV (représentations unitairement inéquivalentes), le rôle joué par la matrice pseudoscalaire γ_5 pour la cassure de la symétrie.

APPENDICE

Le produit $\otimes$ introduit dans la formule (II. 2.1) est défini comme suit :

$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \otimes C = \begin{pmatrix} AC \\ BC \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices 2×2

et C une matrice colonne à 2 lignes. Les produits AC et BC sont les produits habituels d'une matrice 2×2 par une matrice colonne à 2 lignes.

Le produit $\otimes$ d'une matrice (γ) 4×4 par une matrice (E) 2×2 est défini par :

$$(\gamma) \otimes (E) = (\gamma) . \begin{pmatrix} EO \\ OE \end{pmatrix}$$

où le produit . dans le second membre n'est autre que le produit habituel d'une matrice (γ) 4×4 par la matrice $\begin{pmatrix} EO \\ OE \end{pmatrix}$ 4×4. Si (γ) est décomposé en blocs de 4 matrices 2×2 :

$$\gamma = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline D & C \end{array}\right), \text{ on a : } (\gamma) \otimes (E) = \left(\begin{array}{c|c} AE & BE \\ \hline DE & CE \end{array}\right)$$

où les produits AE, BE, CE, DE sont les produits habituels.

L'emploi du produit $\otimes$ est très commode dès qu'on effectue des calculs concernant les spineurs solutions de l'équation de DIRAC. En effet, on peut donner une écriture condensée des spineurs $u(\vec{p}, r)$ et $v(\vec{p}, r)$:

$$\text{(A.1} \quad \begin{cases} u(\vec{p}, r) = N_{\vec{p}} \begin{bmatrix} I \\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m} \end{bmatrix} \otimes \times(\vec{p}, r) \\ v(\vec{p}, r) = -N_{\vec{p}} \begin{bmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m} \\ I \end{bmatrix} \otimes i \epsilon^{r} \times (p, r+1) \end{cases}$$

où $\times(\vec{p}, r) = a_{\vec{p}} \frac{1 + \epsilon^r \vec{\sigma}.\vec{n}}{2} \xi^{(r)}$

avec $\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$N_{\vec{p}} = \sqrt{\frac{E + m}{2E}}$$

avec la nomalisation $u^+ (\vec{p}, r)\, u(\vec{p}, s) = \delta_{rs}$

$a_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + n_3)}}$ et $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$\epsilon^r = \begin{cases} +1 \text{ pour } r = 1. \\ -1 \text{ pour } r = 2. \end{cases}$

Si on utilise donc (A. 1) et la définition du produit $\otimes$, on calcule facilement des quantités de la forme $u(\vec{p}, r)\ u^+(\vec{p}, r)$, $u(\vec{p}, r)\ v^+(-\vec{p}, r)$. Par exemple, on trouve que :

$$u(\vec{p}, r)\, u^+(\vec{p}, r) = \frac{1}{2E}\left\{ (\gamma^\mu p_\mu + m)\, \gamma^0 \right\} \otimes \frac{1}{2}(1 + \epsilon^r \vec{\sigma}.\vec{n})$$

La première parenthèse montre que $u(\vec{p}, r)$ (r = 1, 2) sont solutions de l'équation de DIRAC $(-\gamma^\mu p_\mu + m)\, u(\vec{p}, r) = 0$; la seconde, que ce sont des vecteurs propres de l'hélicité $\vec{\Sigma}.\vec{n}$.

BIBLIOGRAPHIE

1 N.-N. BOGOLIUBOV. — Soviet Phys. J.E.T.P., t. 34, pp. 41-51 (1958).

N.-N. BOGOLIUBOV, TOLMACHEV, D.-V. SHIRKOV. — A new method in the theory of supraconductivity (Consultants Bureau 1950).

2 H. UMEZAWA, Y. TAKAHASHI, S. KAMEFUCHI. — The mass levels and the broken symmetry in terms of inequivalent representations.
Ann. Phys. t. 26, pp. 336, (1964).

3 RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA, M. SIRUGUE, COLLIN, M. SIRUGUE. — Transformation généralisée de Bogoliubov et solutions de l'équation de Dirac. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 4458-4459, (1965).

RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA. — Transformation généralisée de Bogoliubov pour les bosons. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 5205-5207 (1965).

4 S.-S. SCHWEBER. — An introduction to relativistic quantum field theory (Harper and Row, New York) 1962, p. 82.