SUR UN CAS DE DÉTERMINATION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE PAR LA CONNAISSANCE DE LA DÉRIVÉE APPROXIMATIVE

PAR

A. PACQUEMENT

(Laboratoire de Mathématiques)

RÉSUMÉ

Il a déjà été prouvé qu'une fonction numérique, ayant en chaque point d'un intervalle une dérivée approximative finie, est déterminée, à une constante additive près, par la connaissance de cette dérivée.

Il n'en va évidemment plus de même, si la dérivée approximative n'est connue que presque partout. La fonction initiale possède alors un large degré d'indétermination. Pour lever l'indétermination, il est nécessaire de faire sur cette fonction des hypothèses supplémentaires.

Le but de la présente Note est de montrer qu'une fonction est déterminée à une constante additive près par la dérivée approximative presque partout finie, si elle possède les deux propriétés : continuité approximative et absolue continuité généralisée. Ce résultat qui généralise un théorème classique sur les fonctions continues permet d'envisager une extension de la notion de primitive.

ABSTRACT

That the increment of a function is uniquely determined by an everywhere finite approximate derivate is a known fact. The condition for the approximate derivate to be determined everywhere cannot be replaced by the weaker condition « almost everywhere ».

In such a case the generating function would be largely undetermined. To preclude this difficulty, further hypotheses are required.

The aim of this paper is to show that the increment is determined by an almost everywhere finite approximate derivate, if the function has besides the two following properties : approximate continuity, and generalized absolute continuity in the wide sense.

This result generalizes a classical theorem in continuous functions and enables us to contemplate an extension of the concept of the indefinite integral.

0. — RAPPELS, DÉFINITION

Les fonctions étudiées seront des fonctions numériques définies dans un intervalle fermé, fini, $I = [a, b] \subset R$.

Si E est un sous-ensemble mesurable de I, on notera $|E| = \text{mes } E$, $E' = I - E$.

Nous appellerons F la fonction étudiée, f sa dérivée approximative. Si f n'est définie que presque partout (p.p.) sur I, nous prendrons $f = \varnothing$ hors de l'ensemble de définition.

Si δ_i est un intervalle $[\alpha_i, \beta_i]$, (resp.] $\alpha_i, \beta_i[$), nous écrirons : $F(\delta_i) = F(\beta_i) - F(\alpha_i)$.

De même pour $d_i = [a_i, b_i]$ ou $]a_i, b_i[$ nous écrirons $F(d_i) = F(b_i) - F(a_i)$.

Nous rappelons que F est dite :

0.1. — *Approximativement continue* (nous écrirons Ap.c) si elle est approximativement continue en tout point de I.

0.2. — *Approximativement continue en* x_0 ($x_0 \in I$), si l'ensemble suivant :

$$E(x_0, \varepsilon) = E\left\{x \in I, |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\right\}$$

a la densité un en x_0.

0.3. — Dans ce cas il existe un nombre λ_0, tel que pour tout segment $d_0 \ni x_0$ pour lequel

$|d_0| < \lambda_0$, l'ensemble $d_0 \cap E(x_0,\varepsilon)$ ait une densité relative supérieure à $1-\mu$ sur d_0. $(0 < \mu < \frac{1}{2})$. Ce segment peut avoir x_0 pour une de ses extrémités.

0.4. — *Approximativement dérivable en* x_0, si le rapport $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$ tend vers une limite finie $F'_{ap}(x_0) = f(x_0)$, lorsque $h \to 0$ en appartenant à un ensemble de valeurs de R, ayant la densité un en o.

0.5. — La différentiabilité approximative en x_0 entraîne évidemment la continuité approximative en ce point.

0.6. — Il existe alors un nombre $k_0 > 0$ tel que l'ensemble de valeur δ de h :

$$E(x_0, k) = E\left\{ x_0 + h ; 0 < h < k, \left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon \right\} ; k < k_0$$

ait une densité relative supérieure à $1-\varepsilon$ sur l'intervalle $[0, k]$.

0.7. — *Absolument continue* (A.C.) sur un ensemble E, si (δ_i) étant une famille de sous-intervalles non empiétants de I, dont les extrémités appartiennent à E, $\forall\varepsilon$, $\exists\, \eta$ tels que

$$\Sigma\, |\delta_i| < \eta \Rightarrow \Sigma\, |F(\delta_i)| < \varepsilon$$

0.8. — *N.B.* — Il est clair que si (δ_j) est une deuxième famille de sous-intervalles non empiétants de I, dont les extrémités appartiennent à E et tel que $\forall\delta_j$, $\exists\delta'_i$ tel que $\delta'_j \subset \delta_i$, on a pour ces intervalles les deux inégalités :

$$[\Sigma\, |\delta'_j| < \eta \text{ et } \Sigma\, |F(\delta'_j)| < \varepsilon]$$

0.9. — *Absolument continue généralisée* sur I au sens large (A.C.G.) si I est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles (E_i) sur lesquels F est A.C.

0.10. — Les fonctions Ap. C, resp. approximativement dérivables, resp. A.C.G. sur I forment des espaces vectoriels.

I. — LEMME

Nous allons maintenant prouver un lemme applicable aux fonctions A.C.G.

1.1. — F *étant A.C.G.*, N *un sous-ensemble de mesure nulle de* I, ε *et* η *deux nombres positifs donnés, il existe une suite d'intervalles fermés* (d_k) *tels que* :

$$N \subset \cup_k d_k,\ \Sigma\, |d_k| < \eta \text{ et } \Sigma\, |F(d_k)| < \varepsilon.$$

Démonstration. — Donnons-nous deux suites de nombres positifs décroissants (ε_ℓ), et (λ_ℓ) telles que $\Sigma_\ell(\varepsilon_\ell) = \varepsilon$ et $\Sigma_\ell(\lambda_\ell) = \eta$. F étant A.C. sur E_i, $\exists\eta_i < \lambda_i$, tels que pour toute suite d'intervalles fermés non empiétants (δ^i_j) dont les extrémités appartiennent à E_i, l'inégalité $[\Sigma\, |\delta^i_j| < \eta_i \Leftarrow \Sigma\, |F(\delta^i_j)| < \varepsilon_i$, [N étant de mesure nulle, ainsi que $N \cap E_i$, on peut couvrir $N \cap E_i$ avec une suite d'intervalles fermés (δ^i_j) d'extrémités appartenant à E_i vérifiant les inégalités ci-dessus. Comme $N = \bigcup_i (N \cap E_i)$, on aura $N \subset \bigcup_i \delta^i_j$ avec :

$$\Sigma_i \Sigma_j\, |\delta^i_j| < \Sigma\eta_i < \Sigma\lambda_j = \eta$$
$$\Sigma_i \Sigma_j\, |F(\delta^i_j)| < \Sigma\varepsilon_i = \varepsilon$$

En énumérant les (δ^i_j) avec une seule série d'indices k, on aura une suite d'intervalles fermés qu'on pourra noter (d_k), répondant aux conditions requises.

1.2. — *N.B.* Les (d_k) ne sont pas nécessairement non empiétants. [L'énoncé 1.1 n'est pas utilisable de plano, dans les applications. Nous lui apportons la précision suivante en accord avec 0.8.

1.2. — (δ'^i_j) *étant une deuxième famille d'intervalles fermés, tels que pour* i *fixé, les* (δ'^i_j) *soient non empiétants, leurs extrémités appartenant à* E_i, *et que* :

$$\forall\, \delta'^i_\ell,\ \exists\ \delta^i_j \text{ tel que } \delta'^i_\ell\,(\delta^i_j,$$
$$[\textit{on a } \sum_i \sum_\ell |\delta'^i_\ell| < \eta \textit{ et } \left|\sum_i \sum_\ell F(\delta'^i_\ell)\right| < \varepsilon$$

Enfin, il peut être utile de savoir qu'un $d_k \ni x_0$ peut avoir une longueur arbitrairement petite : on a l'énoncé suivant :

1.3. — (ε_n) *et* (η_n) *étant deux suites de nombres positifs tendant vers zéro, tels que* $\Sigma\varepsilon_n = \varepsilon$ $\Sigma\eta_n = \eta$, N *un sous-ensemble de mesure nulle de* I, *il existe une famille d'intervalles fermés* $(d_{k,n})$ *tels que pour* n *fixé* :

$$N \subset \bigcup_k d_{k,n}\ \Sigma\, |d_{k,n}| < \eta_n, \Sigma\, |F(d_{k,n})| < \varepsilon_n$$

Il suffit de reprendre la démonstration de l'énoncé 1.1, avec les modifications de notations suivantes. On écrira $\varepsilon_{i,n}$, au lieu de ε_i, respt $\eta_{i,n}$ au lieu de η_i, $\delta^i_{j,n}$ au lieu de $\delta^i{}_j{}'$, (k, n) au lieu de k. On a aussitôt la variante suivante :

1.4. — $(\delta^i_{\cdot,n})$ *étant une nouvelle famille d'intervalles fermés, tels que pour* i *et* n *fixés, les* $(\delta'^i_{\ell,n})$ *soient non empiétants, leurs extrémités appartenant à* E_i et *que* $\forall\, \delta'^i_n\, \exists_{,n}\, \delta^i_{j,n}$ tel que δ'^i_n

$$\Sigma_i \Sigma |\delta'^i_{\ell n} < \eta_n \text{ et } \Sigma_i \Sigma_\ell\, |F(\delta'^i_{\ell n})| < \varepsilon_n$$

C'est une conséquence immédiate de (0.8.).

Nous allons maintenant prouver la première assertion.

II. — PROPOSITION 1

Une fonction partout approximativement dérivable (0.4.) *est déterminée à une constante additive près par la connaissance de sa dérivée approximative.*

Démonstration. — Les fonctions approximativement dérivables formant un espace vectoriel (0.10), il suffit de montrer que $f \equiv 0 \Rightarrow F = Cte$. On se bornera à prouver que $F(b) = F(a)$.

F étant approximativement dérivable est aussi approximativement continue (0.4).

II.1. — *Méthode.* — Nous utiliserons la méthode des chaines d'intervalles de Lebesgue qui consiste à obtenir une valeur approchée de F, aux extrémités de segments consécutifs, en infinité dénombrable ; la numération des segments nécessite généralement l'emploi d'indices transfinis. Dans chaque segment, ou intervalle de la chaine, on s'efforcera d'avoir une approximation de F sur un ensemble de densité relative positive, constante. La construction des intervalles sera basée sur la remarque suivante :

II.2. — Si $x_o \in I - \{b\}$, nous ferons correspondre à x, le nombre k, défini en (0.6.), ayant choisi $k < k_o$; $x_o + h_o \in E(x_o, k)$ nous poserons $E(x_o, h_o) = E(x_o, k) \cap [x_o, x_o + h_o]$. On aura donc puisque $f(x_o) = 0$

$$|F(x) - F(x_o)| < \varepsilon\, |x - x_o| \quad \forall x \in E(x_o, h_o)$$

En outre la densité relative de $E(x_o, h_o)$ est supérieure à $1 - \varepsilon$ sur tout intervalle $[x_o, x_o + h]$, où $x_o + h \in E(x_o, h_o)$. Ces propriétés sont vraies en particulier si $h = h_o$.

II.3. — *Construction de la chaîne d'intervalles.* — Chaque point $x_o \in I - \{b\}$ étant origine d'un intervalle $[x_o, x_o + h_o]$, comme défini en II.2, on peut couvrir I avec une chaîne d'intervalles du type précisé. Au point $a = x_1$ on fait correspondre $x_2 = x_1 + h_1$, obtenu à partir de x_1 comme $x_o + h_o$ à partir de x_o et l'ensemble $E(x_1 . h_1)$ jouant dans $[x_1, x_1 + h_1]$ le même rôle que $E(x_o, h_o)$ dans $[x_o, x_o + h_o]$. On déterminera ainsi de proche en proche x_n, x_{n+1}, leur limite x_ω $x_{\omega s'+1}$ x_α, et b est atteint pour une valeur finie ou transfinie α_o de l'indice α. [Posant $E(x_n) = \bigcup_1^n E(x_i, h_i)$ (respt $E(x_\alpha) = \bigcup_{i=1}^{\alpha} E(x_i, h_i)$ et $E(x_\alpha^-) = \bigcup_{i<\alpha} E(x_i, h_i)$ pour α de seconde espèce.
On remarque (II.3) que la densité relative de $E(x_n)$, [resp. $E(x_\alpha)$, $E(x_\alpha^-)$] entre deux points de la chaîne est supérieure à $1 - \varepsilon$. Il en est de même entre x_1 et tout point de la chaîne d'abscisse supérieure.

II.4. — *Limite de l'accroissement de F.* — On vérifie par récurrence ordinaire que $\forall x \in E(x_n)$, on a $|F(x) - F(a)| < \varepsilon\, |x - a|$, et si x_k est une extrémité de la chaine $k < n$ que :

$$|F(x) - F(x_k)| < \varepsilon\, |x - x_k| \quad \forall x \in E(x_n)$$

En particulier, on a $|F(x_n) - F(a)| < \varepsilon\, (x_n - a)$. Soit x_ω le point limite des x_n ; quand $x_n \to x_\omega$, on ne peut passer à la limite dans l'inégalité précédente, F étant discontinue. Nous aurons recours à l'artifice suivant :

II. 4_1. — Soient (x_α), $\alpha \leqslant \alpha_o$ les abcisses des origines des intervalles de la chaîne ; soit $(\xi_i) \subset (x_\alpha)$ les abscisses des x_α qui sont de seconde espèce. Les (ξ_i) sont en infinité au plus dénombrable ; on peut faire correspondre à chacun d'eux un nombre λ_i ; tel que $\sum_i \lambda_i = \varepsilon$. Nous calculerons d'abord une limite de $F(x_\omega)$, puis de $F(x_\alpha)$, α étant un transfini quelconque.

II. 4_2. — *Limite de $F(x_\omega)$.* — On a $x_\omega \in (\xi_i)$, soit $x_\omega = \xi_r$. F étant Ap. C en x_ω (0.5), il existe un intervalle (0.3) $d_r = [\xi_r - l_r, \xi_r]$, dans lequel $|F(\xi_r) - F(x)| < \lambda_r$ si x appartient à l'ensemble $E(\xi_r, d_r) = E[\xi_r, \lambda_r] \cap d_r$ de densité un en ξ_r', et de densité relative supérieure à $1 - \mu$ sur tout sous-intervalle de d_r d'extrémité ξ_r.

Choisissons x_{n_o} tel que $|x_{n_o} - x_\omega| < \ell_r$. L'ensemble $\bigcup_p E(x_{n_o} + p\ h_{n_o + p})$ aura dans $[x_{n_o}, \xi_r]$ (resp. dans $[x_{n_o + p}\ \xi_r]$) une densité relative supérieure à $1 - \mu$. Si $\varepsilon + \mu < 1$, les deux ensembles :

$\bigcup_p E(x_{n_o + p}, h_{n_o + p})$ et $E(\xi_r, d_r) \cap [x_{n_o}, \xi_r]$ auront des points communs. Si ξ' appartient à leur intersection, on aura :

$$|F(\xi_r) - F(a)| \leqslant |F(\xi_r) - F(\xi'_r)| + |F(\xi'_r) - F(a)| \leqslant \lambda_r + \varepsilon\, (\xi'_r - a) < \lambda_r + \varepsilon\, (\xi_r - a)$$

ou encore $(x_\omega = \xi_r)$

$$|F(x_\omega) - F(a)| \leqslant \varepsilon\, (x_\omega - a) + \lambda_r$$

résultat indépendant du nombre μ.

II 4_3. — *Limite de $F(x_\alpha)$, $\alpha > \omega$.* — Nous introduirons la *définition suivante.* Nous appellerons *ensembles utilisés* les ensembles $E(x_\alpha, h_\alpha)$ $(\alpha < \alpha_o)$. Supposons maintenant qu'on ait obtenu un point x_α de la chaine $\alpha > \omega$ et qu'on ait prouvé l'inégalité générale :

$$|F(x) - F(x_\alpha)| < \varepsilon\, (x - x_{\alpha'}) + \sum_{(x_{\alpha'}, x)} \lambda_i$$

(sommation étendue aux $\xi_i \in (x_{\alpha'}, x)$)

où $\alpha' < \alpha$, x appartenant à un des ensembles utilisés, d'indice $\leqslant \alpha$. $x_{\alpha'} < x$; la réunion des ensembles utilisés entre $x_{\alpha'}$ et x a toujours une densité relative (entre $x_{\alpha'}$, et x) supérieure à $1 - \varepsilon$.

i. *Transfinis de première espèce.* — D'après la définition de $x_{\alpha+1} = x_\alpha + h_\alpha$, il est clair que les propriétés vérifiées pour l'indice α, s'étendent immédiatement à $\alpha + 1$.

ii. *Transfinis de deuxième espèce.* — Soit une suite croissante de transfinis $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ de limite β $(n \in N^*)$.

Prouvons que les propriétés acquises pour $\alpha = \alpha_n$, valent pour l'indice β. Appelons E_{α_p}, la réunion des ensembles utilisés entre x_{α_p} et $x_{\alpha_p + 1}$ sur cet intervalle $E_{\alpha p}$ a une densité relative supérieure à $1 - \varepsilon$, ainsi que sur $[x_{\alpha_p}, x]$ $x \in E_{\alpha_p}$.

On peut alors reprendre sur $[a, x_\beta]$ le raisonnement fait sur $[a, x_\omega]$ en substituant les x_{α_n} aux x_n, les ensembles E_{α_p} aux $E(x_n, h_n)$ et l'on aura prouvé l'inégalité :

$$|F(x_\beta) - F(a)| < \varepsilon (x_\beta - \alpha) + \Sigma_{(a, x_\beta)} \lambda_i.$$

Finalement pour le dernier point de la chaîne, b ; on aura obtenu :

$$|F(b) - F(a)| < \varepsilon (b - a) + \Sigma \lambda_i = \varepsilon (b - a + 1)$$

ε étant arbitraire, on a $F(b) = F(a)$. *C.Q.F.D.*

II. 4_4. — *Remarque.* — Le résultat obtenu est un cas particulier d'un énoncé plus général de M. Tolstoff dont nous n'avons pas la référence précise. [Si nous avons cru devoir insister sur la proposition I, c'est surtout en vue d'introduire une méthode qui nous conduira aux énoncés suivants. Notons que le succès de la méthode employée, tient à ce que la densité relative des ensembles utilisés, donc des $E\alpha_p$, supérieure à $1 - \varepsilon$ sur les intervalles ayant pour origine un point de la chaîne a une borne inférieure différente de zéro. Il n'est pas requis pour obtenir une limite de $F(x_\alpha)$ que cette densité soit « voisine » de un.

Une application un peu plus élaborée de la méthode précédente conduit à la proposition annoncée, lorsque la dérivée approximative n'est définie que p.p.

III. — PROPOSITION 2

Si F est A.C.G. et Ap. C, et possède presque partout une dérivée approximative finie f, F est déterminée à une constante additive près par la connaissance de f.

Démonstration. — Les fonctions A.C.G. et Ap. C, presque partout approximativement dérivables formant un espace vectoriel (0.10), il suffit de montrer que $f = 0 \Rightarrow F = \text{Cte}$, ou que $F(b) = F(a)$.

III. 1. — *Méthode.* — Nous utiliserons la méthode des chaines d'intervalles. Soit N l'ensemble des points où F ne possède pas une dérivée approximative définie ou finie, F étant A.C.G., il existe une famille d'ensembles $E_i \subset I$ ($i \in N$), tels que $\bigcup_i E_i = I$, sur lesquels F est A.C. Dans l'emploi de la méthode des chaînes d'intervalles, deux cas se présentent :

a. Si $x_0 \in I - \{b\}$, n'appartient pas à N, on peut lui faire correspondre un intervalle $[x_0, x_0 + h_0]$ et un ensemble $E(x_0, h_0)$ défini comme en II.2.

b. Si $x_0 \in N$, on a $x_0 \in E_i$ pour un indice i.

On aura recours aux intervalles $(\delta^i_{j\,n})$ définis en 1.3. ou plutôt à un intervalle $\delta'^i_{\ell n}$ inclus dans le précédent, d'origine x_0 et de même extrémité que $\delta^i_{j\,n}$.

Employant un seul indice pour énumérer les $(\delta^i_{j'n})$ et les $(\delta'^i_{l'n})$ tels que nous les avons définis, nous noterons ceux-ci respectivement d_s et d'_s. On aura donc $d_s = [a_s, b_s]$, $d'_s = [x_0, b_s]$. Il importera toutefois pour notre propos que $b_s \notin N$. A chaque b_s on fera correspondre un nombre positif β_s tel que $\sum_s \beta_s = \beta_0$. Alors F étant Ap. C en b_s, on peut lui faire correspondre c_s, tel que $c_s \in N$, $|b_s c_s| < |a_s b_s|$, $|F(c_s) - F(b_s)| < \beta_s$. Aussi à $x_0 \in N$, on fera correspondre un des c_s obtenus comme il vient d'être dit. En effet, les segments (δ^i_{jn}) ou (d_s) correspondant à x_0 sont en infinité au plus dénombrable.

Ainsi dans tous les cas, on fait correspondre à x_0 un intervalle non nul $[x_0, x_0+h_0]$, ou $[x_0, b_s]$ (resp. $[x_0, c_s]$) pour simplifier, nous écrirons $[x_0, c_{s_0}]$ dans tous les cas.

III. 2. — *Construction de la chaîne d'intervalles.* — Tout point $x_0 \in I - \{b\}$ étant origine d'un intervalle $[x_0, x_0 + h_0]$ ou $[x_c, c_{s_0}]$ défini en III. 1, on peut construire une chaîne de ces intervalles joignant a à b.

A chaque point $x_0 \in N$, et au nombre positif $\varepsilon < 1$, correspondra un ensemble $E(x_0, h_0)$ défini en II. 2. Mais il n'est pas évident que les ensembles notés $E(\alpha_p)$ en II. 4_3 gardent une densité relative sur $[x_{\alpha_p}, x_{\alpha_{p+1}}]$ bornée inférieurement par un nombre positif.

Il faudra apporter certaines précisions à la construction de la chaine. Nous étudierons successivement les premières étapes de cette construction, puis le procédé le plus général.

a. *Construction des premières suites partielles d'intervalles.*

On supposera $a \notin N$. Alors au point x_1 et au nombre positif $\varepsilon < 1$, on fait correspondre $x_2 = x_1 + h_1$, obtenu comme $x_0 + h_0$ à partir de x_0, et l'ensemble $E(x_1, h_1)$ (voir II. 3). On déterminera ainsi de proche en proche x_n, $E(x_n, h_n)$,... et x_ω limite des x_n.

Deux cas peuvent se présenter :

i. $x_\omega \notin N$, et on peut poursuivre la construction de la chaîne en déterminant $x_{\omega+1}$ à partir de x_ω, comme on l'a fait pour x_2 à partir de x_1.

ii. $x_\omega \in N$, on est ramené au cas examiné en III. 1. b. On fera correspondre à x_ω un intervalle $[x_\omega, c_{s_\omega}]$, obtenu à partir de x_ω comme $[x_0, c_{s_0}]$ l'a été à partir de x_0. On posera $x_{\omega+1} = c_{s_\omega}$.

Remarquons que conformément à la définition des segments (d_s) ou $\delta^i_{j'n}$ en 1.3., la longueur de $\delta^i_{j'n}$ peut être rendue arbitrairement petit puisque celle-ci est inférieure à η_n. Il en est de même à fortiori de $(\delta'^i_{j'n})$ et donc de $[x_\omega, x_{\omega+1}]$. On peut donc supposer que sur $[x_1, x_{\omega+1}]$ la densité relative de $E(x_{\omega+1}) = \bigcup_{i<\omega} E(x_i, h_i)$

est supérieure à $1 - \varepsilon$. Cette condition est valable dans le cas a) comme dans le cas b) Comme $x_{\omega+1} \notin N$ par construction on pourra passer de $x_{\omega+1}$ à $x_{2\omega+1}$, comme on est passé de x_1 à $x_{\omega+1}$, de façon à ce que la densité relative de $E(x_{2\omega+1}) = \bigcup_{i<2\omega} E(x_i, h_i)$ soit supérieure à $1-\varepsilon$, sur l'intervalle $[x_1, x_{2\omega+1}]$ et au moins égale à celle de $E(x_{\omega+1})$ sur $[x_1, x_{\omega+1}]$. On passe ainsi, $\forall n \in N$, de $x_{n\omega+1}$ à $x_{(n+1)\omega+1}$ quand $n \to \infty$, $x_{n\omega+1}$ a une limite x_{ω^2}.

Le cas $x_{\omega^2} \in N$ ne posant pas de difficulté particulière, on supposera $x_{\omega^2} \notin N$; la densité relative de $E(x_{\omega^2}) = \bigcup_{i<\omega} E(x_i, h_i)$ entre x_1 et x_{ω^2} est supérieure à $1 - \varepsilon$. On peut donc choisir x_{ω^2+1} à partir de x_{ω^2} (comme on l'a fait pour $x_{\omega+1}$ à partir de x_ω), assez voisin de x_{ω^2} pour que la densité relative de $E(x_{\omega^2})$ entre x_1 et x_{ω^2+1} soit encore supérieure à $1 - \varepsilon$.

b. *Construction des suites successives.* — Soit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ une suite de transfinis (qu'on peut supposer de deuxième espèce) définissant le transfini β. Supposons que les ensembles $E(x_{\alpha_1})$ (*cf.* II. 3) et E_{α_n} (*cf.* II. 4_2) aient respectivement sur $[x_1, x_{\alpha+1}]$, $[x_{\alpha_n+1}, x_{\alpha_{n+1}+2}]$, des densités relatives supérieures à $1 - \varepsilon$. Alors l'ensemble $E_\beta = E(x_\alpha) \bigcup_{n>1} E\alpha_n$) aura aussi sur $[x_1, x_\beta]$ une densité relative supérieure à $1 - \varepsilon$.

(Le fait que les densités relatives des $E\alpha_n$ puissent tendre en décroissant vers $1 - \varepsilon$, ne met pas en défaut cette conclusion qui est acquise si la densité relative de Ex_α est supérieure à $1 - \varepsilon$, celle des E_{α_n} $(n > 1)$ au moins égale à $1 - \varepsilon$). Dès lors on peut choisir $x_{\beta+1}$ de façon que la densité relative de E_β sur $[x_1, x_{\beta+1}]$ soit supérieure à $1 - \varepsilon$.

La construction de la chaîne peut donc être poursuivie jusqu'au point b.

III. 3. — *Calcul d'une limite de $F(x_\alpha)$.*

Il est clair que l'on a comme en II. 4, en $\forall x \in E(x_n)$: $k < n$

$$|F(x) - F(x_k)| < \varepsilon\,|x - x_n|$$

en particulier $F(x_n) - F(a) < \varepsilon(x_n - a)$.

Le fait que la densité relative des $E(x_n, h_n)$ entre x_n et x_{n+1} soit supérieure à $1 - \varepsilon$ (voir II. 4_2), permet d'obtenir quand on passe à l'indice ω l'inégalité $|F(x_\omega) - F(a)| < \varepsilon(x_\omega - a) + \lambda_r$ et à l'indice $\omega + 1$ l'inégalité (*cf.* III. 1. b).

$$|F(x_{\omega+1}) - F(a)| < \varepsilon(x_\omega - a) + \lambda_r + \beta_{s_\omega}$$

(β_{s_ω} étant la valeur de β_s, quand $s = s_\omega$).

Supposons maintenant qu'on ait affaire à la suite (α_n), $n \in N^*$ définissant le nombre β, et qu'on ait obtenu pour les α_n les inégalités :

$$|F(x) - F(x_{\alpha_p+1})| < \varepsilon(x - x_{\alpha_p+1}) + \sum_{(x_{\alpha_p+1}, x)} \lambda_i + \sum_{(x_{\alpha_p}+1,\, x)} \beta_s$$

où $x \in E_{\alpha_n}$, $\forall n \geq p$, les sommations étant étendues aux λ_i et β_s appartenant à $[x_{\alpha_p} + 1, x]$.

Sur $[x_{\alpha_n} + 1, x_{\alpha_{n+1}+1}]$, $E_{\alpha n}$ a une densité relative supérieure à $1 - \varepsilon$ ainsi que sur $[x_{\alpha_n} + 1, x]$, $x \in E_{\alpha_n}$.

On peut alors reprendre sur $[a, x_\beta]$, le raisonnement fait sur $[a, x_\omega]$ en substituant les x_{α_n+1} aux x_n, les $E\alpha_{n+1}$ aux $E(x_n, h_n)$, et l'on obtiendra l'inégalité :

$$|F(x_\beta) - F(a)| < \varepsilon(x_\beta - a) + \sum_{[a, x_\beta]} \lambda_i + \sum_{[a, x_\beta]} \beta_s$$

Finalement, pour $x_\beta = b$, il vient :

$$|F\,b) - F(a) < \varepsilon(b - a) + \sum_i \lambda_i + \sum_s \lambda_s = \varepsilon(b - a + 1) + \beta_0$$

ε et β_0 étant arbitraires, on a $F(b) = F(a)$. *C.Q.F.D.*

III. 4. — *Remarque.* — La réussite du procédé tient au fait déjà signalé en II. 4. Remarque, qu'on a pu maintenir la densité relative des E_{α_n} bornée inférieurement par un nombre positif $1 - \varepsilon$, même après avoir ajouté aux intervalles du type $[x_0, x_0 + h_0]$, les intervalles du type $[x_0, c_{s_0}]$. Ce point résulte de ce que l'on a pu :

— D'une part choisir l'intervalle $[x_0, c_{s_0}]$ assez petit (conséquence du lemme 1, donc de ce que F est A.C.G.) ;

— D'autre part du fait que $F(c_{s_0})$ était arbitrairement voisin de $F(b_{s_0})$ (III. 1. b) c_{s_0} n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel N (conséquence de l'approximative continuité de F).

IV. — APPLICATION A LA DÉFINITION DES FONCTIONS PRIMITIVES

On dit que F est une primitive de la fonction partout finie f si :

$$\forall\, x \in I \text{ on a } F'_x = f(x)$$

Le calcul de F à partir de f, dit calcul totalisant, a été imaginé par M. DENJOY, et a permis de calculer F à partir de dérivées autres que la dérivée générale, telles que les dérivées approximatives, les nombres dérivés supérieurs à droite, etc... D'où une extension de la notion de fonction primitive à laquelle s'est substituée celle de totale indéfinie.

Celle-ci comporte une définition constructive (permettant le calcul de la fonction F), et une définition descriptive, d'ailleurs équivalentes.

IV. 1. — *Définition descriptive des totales indéfinies.* [*F est dite « totale indéfinie » de* f *presque partout finie dans* I.

a. *Si* F *est continue et A.C.G.*

b. *Si* F *admet* f *pour dérivée approximative presque partout.*

On montre alors que F est déterminée à une constante additive près par la connaissance de f.

Par la suite divers auteurs, dont BURKILL, RIDDER et Mr KUBOTA en approfondissant la notion de totale indéfinie, ont pu obtenir des généralisations des conditions précédentes, en remplaçant la condition *a*) par *a'*) F est approximativement continue et (A.C.G.).

Rappelons qu'une fonction est dite (A.C.G.) si elle est A.C. sur les ensembles d'une famille dénombrable de fermés (E_i) tels que $\bigcup_i (E_i) = I$. Ici encore on montre que F est déterminée à une constante additive près par la connaissance de f.

Dans le cas envisagé par ces auteurs, la continuité de F n'est plus requise. On aboutit ainsi à une classe de primitives discontinues, mais dont les discontinuités forment un ensemble rare.

La proposition 2 nous permet d'introduire la :

IV. 2. — *Définition descriptive des totales indéfinies généralisées.*

F *sera dite « totale indéfinie généralisée » de* f, *presque partout finie* dans I si :

a. F *est approximativement continue et A.C.G.*

b. F *admet presque partout* f *pour dérivée approximative.*

F, on l'a vu, est déterminée à une constante additive près (prop. 2). On aboutit ainsi à une classe de primitives discontinues, plus large que la précédente, et dont l'ensemble des discontinuités peut être partout dense. Nous donnons pour terminer un dernier type d'intégrale indéfinie qui généralise les intégrales impropres de Cauchy.

Pour cela nous introduisons la catégorie de fonctions suivante :

V. — FONCTIONS SYMÉTRIQUEMENT APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

V. 1. — *Définition. — Une fonction* F *sera dite « symétriquement approximativement continue » si pour* $\forall x \in]a, b[$ *on a* $|F(x+h) - F(x-h)| < \varepsilon$ *pour un ensemble de valeurs de* h *de densité un en* $h = 0$

En outre on supposera F Ap. C en *a* et *b*.

On écrira alors que F est « S. ap. C ».

Il est clair que ces fonctions forment un espace vectoriel. On a l'énoncé suivant :

V. 2. — *Proposition* 3. — *Si une fonction* F *possède une dérivée approximative finie* f *en tous les points de* I *sauf au plus aux points d'un ensemble dénombrable* D *et si* F *est* S *ap.* C, F *est déterminée à une constante additive près sur* I – D *par la connaissance de* f.

Démonstration. — Il est clair que si deux fonctions possèdent les propriétés énoncées, il en est de même de leur différence.

Il suffit donc de prouver que si F est S.apC, et si $f = 0$ $\forall x \in I - D$, on a $F(b) = F(a)$.

Nous utiliserons la méthode des chaînes d'intervalles.

— Si $x_0 \notin D$, on fait correspondre à x_0 un point $x_0 + h_0$, et un ensemble $E(x_0, h_0)$ définis comme en II. 2. En effet, comme $f(x_0)$ est définie, F est approximativement continue en x_0. On supposera que $x_0 + h_0 \notin D$.

— Soient (ξ_i), $i \in N$ les points de D, à tout ξ_i on fait correspondre un nombre μ_i tel que $\sum_i \mu_i = \varepsilon$.

V. 3. — *Construction de la chaîne d'intervalles* :

Soit $x_1 = a$ (on suppose $a \notin D$) on lui fait correspondre l'ensemble $E(x_1, h_1)$, défini à partir de x_1 comme h_0 et $E(x_0, h_0)$ le sont à partir de x_0. On construit les intervalles de la chaine de proche en proche comme en II. 3, et on arrive à un premier point limite x_ω.

Si $x_\omega \notin D$, il n'y a aucune difficulté nouvelle, et on passe de x_ω à $x_{\omega+1}$ comme de x_1 à x_2.

Si $x_\omega \in D$, on procédera comme suit.

Soit t l'indice des (ξ_i) correspondant à x_ω. Alors il existe un ensemble E_t, de densité un en ξ_t, formé des points $\xi_t - h$ tels que l'on ait :

$$|F(\xi_t + h) - F(\xi_t - h)| < \mu_t$$

E_t et l'ensemble réunion des ensembles utilisés, $\bigcup_n E(x_n, h_n)$ ont une intersection non vide comprenant des points aussi voisins qu'on veut de ξ_t, et n'appartenant pas à D. Soit h_t une des valeurs de h correspondantes, on choisira h_t de façon à ce que $\bigcup_n E(x_n, h_n)$ ait sur $[a, \xi_t + h_t]$ une densité relative supérieure à $1 - \varepsilon$. On choisira évidemment $\xi_t + h_t \notin D$.

On a là une réédition du procédé utilisé pour la démonstration de la proposition 2 en III. 2. Le procédé de construction de la chaîne sera donc le même, à condition de substituer aux intervalles $[x_s, c_s]$ les intervalles $[\xi_t, \xi_t + h_t]$. Ainsi la construction de la chaîne pourra-t-elle être poursuivie jusqu'à ce que l'on ait atteint le point *b*.

V. 4. — *Calcul d'une limite de l'accroissement de* F :

$[a, b]$ ayant été couverte avec une chaîne dont les extrémités sont (x_α) $\alpha \leqslant \alpha_0$, on fera correspondre à chaque point x_α de 2[e] espèce de la chaîne un nombre λ_i, tel que $\Sigma \lambda_i = \varepsilon$.

L'accroissement de F peut se décomposer de la façon suivante :

— *Intervalles de type* $[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$, $x_\alpha \notin$ D : $|F(x_{\alpha+1}) - F(x_\alpha)| < \varepsilon (x_{\alpha+1} - x_\alpha)$

— *Intervalles de type* $[x_\alpha, x_{\alpha+1}]$, $x_\alpha \in$ D $|F(x_{\alpha+1}) - F(x_\alpha)| < \mu_t$

(t indice correspondant à x_α)

— *Passages à la limite aux points* x_α, α *de seconde espèce,* $\Sigma\, \lambda_r$.

Si on fait le total des trois types d'accroissements on trouve que, si $b \notin$ D :

$$|F(b) - F(a)| < \varepsilon (b - a) + \sum_t \mu_t + \sum_r \lambda_r = \varepsilon (b - a + 2)$$

Ici encore on a $F(b) = F(a)$. *C.Q.F.D.*

N.B. — Il est évident que F n'est pas déterminée aux points de D. Nous n'aborderons pas dans la présente Note le problème du calcul de F à partir de la donnée de f, dans le cas de l'une ou l'autre des 3 propositions ci-dessus.

Manuscrit reçu le 21 février 1969.

BIBLIOGRAPHIE

LEBESGUE (H). — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* — 2e édition. Gauthier - Villars (1928).

DENJOY (A). — *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse* Gauthier-Villars (1954).

DENJOY (A). — *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique.* Gauthier-Villars (1941-1949).

BURKILL (J.C.). — *The approximative continuous Perron Integral* Math. Zeitscrift. t. 34, p. 270-278 (1931).

RIDDER (J.). — *Ueber approximativ stetige Denjoy integralen* Fund. Math. t. 21, p. 1-10 (1933).

SAKS (S.). — *Theory of the Integral.* Sec. édition Hafner New York (1937).

KUBOTA (Y.). — *An Integral of the Denjoy-type.* Proc, Japan Academy. T. 40, p. 713-717 (1964).

ZAHORSKI (Z.). — *Thèse* — Fund. Math. T. 40, p. 1-53 (1950). (Citation de Tolstoff).