NOUVELLES PROPRIÉTÉS DES ESPACES A ÉCART DE FRÉCHET

PAR

R. FÉRON *

RÉSUMÉ

La vieille notion d'écart de Fréchet généralise celle de distance en ce sens que l'inégalité triangulaire n'est plus imposée. L'auteur utilise cette notion pour généraliser la conception moderne d'espace métrique et trouve ainsi des espaces dits F-topologiques, relativement simples et faciles à étudier qui sont beaucoup plus généraux que les espaces topologiques classiques. A tout espace F-topologique correspond d'ailleurs un espace topologique sous jacent beaucoup moins riche. Les notions d'adhérence, d'intérieur, d'ouvert, de fermé, de structure uniforme, de complétion, de continuité, d'uniforme continuité, d'espace vectoriel topologique etc... peuvent toutes se généraliser de plusieurs manières importantes.

ABSTRACT

The old notion of « écart de Fréchet » generalizes that of distance in the sense that triangular inequality is no longer necessarily imposed. The author uses this notion to generalize the modern concept of metric space and he thus finds so called F-topological spaces more or less simple and easy to study and which are much more general than the classical topological spaces. To each F-topological space corresponds in fact a subjacent topological space. The notions of closure, interior, open and closed sets, uniform structure, vectorial topological space may all be generalized in many interesting ways.

Dans de nombreux cas, notamment en théorie des distributions, on a affaire à des modes de convergence plus lâches que ceux rencontrés en topologie classique. On essaye alors en général de substituer à ces pseudotopologies une véritable topologie sur laquelle on a depuis longtemps des théorèmes. Il y a là certes un gros progrès Mais, pour notre part, nous croyons que l'étude des êtres mathématiques initialement donnés peut être intéressante en elle-même.

* Faculté des Sciences de Lyon.

§ *1.* ÉCART DE FRÉCHET

Etant donné un espace E, nous appellerons écart de Fréchet ou simplement F-écart (pour le distinguer de l'écart de Bourbaki) une application $\rho(x, y)$ de $E \times E$ dans $\overline{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

$E_1)$ $\rho(x, x) = 0$

$E_2)$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

de plus, on pourra toujours, en passant au besoin à l'espace quotient, supposer que l'axiome suivant est vérifié :

$E_3)$ $\rho(x, y) > 0$ si $x \neq y$

Exemples

1. Dans R^2 la quantité $\rho(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$;

2. Dans R^2 la quantité $\rho(x, y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ \text{si } x_1 = y_1 \text{ ou si } x_2 = y_2 \\ +\infty \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$

3. Dans R^3 la quantité $\rho(x, y) = \begin{cases} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + \\ |z_1 - z_2| \text{ si 2 des 3 quantités} \\ x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2 \\ \text{sont nulles, } +\infty \text{ dans le} \\ \text{cas contraire} \end{cases}$

Enfin dans l'espace des fonctions mesurables par rapport à une mesure on a intérêt à considérer les F écarts.

4. $\rho(f, g)$ = infimum de ε tel que :
$$\mu \left\{ |f - g| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant \varepsilon$$

5. $\rho(f, g) = \text{essup } (f - g)^2$ si ce supremum existe, $+\infty$ dans le cas contraire.

6. $\rho(f, g) = \int (f - g)^2 \, d\mu$ si $f, g \in L^2$

7. Nous introduirons ultérieurement des F-écarts moins élémentaires.

Dans les 3 premiers exemples l'axiome E_3 est automatiquement vérifié, dans les 3 derniers il ne l'est que si on considère comme identiques les fonctions telles que $\rho(f, g) = 0$.

Un F-écart définit sur E une structure qui généralise la notion de métrique et qui est, ni plus ni moins générale, que celle de topologie classique. Nous dirons que c'est une F-topologie.

Nous allons voir qu'étant donnée une F-topologie, on peut définir la plupart des êtres mathématiques qui interviennent, de 2 manières non équivalentes que nous distinguerons en employant où en n'employant pas la lettre F devant la dénomination classique. Nous appellerons *F-boule ouverte* ou plus simplement *boule* de centre a et de rayon ε et désignerons par $B_a(\varepsilon)$, l'ensemble des points x tel que $\rho(a, x) < \varepsilon$.

Evidemment les $B_a(\varepsilon)$ forment la base d'un filtre F_a dont les éléments V_a sont les ensembles qui contiennent un $B_a(\varepsilon)$. Nous les appellerons *F-voisinages de a.* Ils seront tels que $a \varepsilon V_a$ et

(V_1) $B \supset A$ et $A \in F_a \Longrightarrow B \in F_a$;

(V_2) $A \varepsilon F_a$ et $B \in F_a \Longrightarrow A \cap B \varepsilon F_a$;

(V_3) $\emptyset \notin F_a$.

Par contre l'axiome V_D des voisinages n'est pas vérifié.

En revanche, en raison de E_3, les F-voisinages vérifient l'axiome de séparation.

(V_4) Si $a \neq b$, $\exists$ V_a et V_b tels que $V_a \cap V_b = \emptyset$

Nous dirons que a est F-adhérent à A si $V_a \cap A \neq \emptyset$ quel que soit V_a F-voisinage de a- l'ensemble $\bar{A}$ des points F-adhérents à A est appelé F-adhérence de A.

On a nécessairement :

$A_1)$ $\bar{\emptyset} = \emptyset$

$A_2)$ $\bar{A} \supset A$

$A_3)$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

seule A_3 n'est pas évidente en effet :

$B_a(\varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Leftrightarrow B_a(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

ou $B_a(\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$

Mais on n'a plus $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

Ainsi, si dans l'exemple 2 de F-écart, A représente l'ensemble des points de coordonnées rationnelles de R^2, $\bar{A}$ représente l'ensemble des droites parallèles aux axes dont l'abscisse ou l'ordonnée sont de coordonnées rationnelles et $\bar{\bar{A}}$ représente R^2 tout entier.

De même, dans l'exemple (3), si A désigne les points de coordonnées rationnelles, $\bar{A}$ est formé par un réseau de droites parallèles aux axes, $\bar{\bar{A}}$ par un réseau de plans, $\bar{\bar{\bar{A}}}$ par R^3 tout entier.

Les ensembles tels que $A = \bar{A}$ seront appelés des *fermés.*

On voit donc que si les fermés sont nécessairement des F-adhérences, toute F-adhérence n'est pas nécessairement un fermé.

De même on appellera F-intérieur de A et on désignera par $\mathring{A}$ l'ensemble $\mathring{A} = C(\overline{CA})$. Evidemment comme $\overline{CA} \supset CA$ $\mathring{A} = C(\overline{CA}) \subset C(CA) = A$.

Tout ensemble contient son intérieur.

On a en général $\mathring{\mathring{A}} \neq \mathring{A}$, en effet si dans l'exemple 2 on appelle A l'ensemble des points dont une au moins des 2 coordonnées est irrationnelles, et si on pose $B = CA$ on voit que B représente les points de coordonnées rationnelles de l'exemple précédent, par conséquent, $\mathring{A} = C\bar{B}$ est formé des points du plan dont les 2 coordonnées sont irrationnelles et $\mathring{\mathring{A}} = C\,\bar{\bar{B}}$ est vide.

Nous appellerons *ouvert* un ensemble qui est égal à son intérieur donc tel que $A = \mathring{A}$.

Proposition 1

Les opérations d'adhérence et d'intérieur préservent l'ordre $A \supset B \Longrightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$ et $\mathring{A} \supset \mathring{B}$ en effet, $A = B \cup (A - B)$ donc d'après $A_3)$ $\bar{A} = \bar{B} \cup \overline{(A - B)} \supset \bar{B}$

d'autre part, $A \supset B \Longrightarrow CA \subset CB \Longrightarrow \overline{CA} \subset \overline{CB}$ $\Longrightarrow C\,\overline{CA} \supset C\,\overline{CB}$ ou $\mathring{A} \supset \mathring{B}$

Proposition 2

Si A est fermé dans la F-topologie T, son complémentaire $B = CA$ est ouvert et réciproquement.

En effet, si A est fermé $\mathring{B} = C\,\overline{CB} = C\bar{A} = CA = B$

Réciproquement si B est ouvert $C\bar{A} = C\,\overline{CB} = \mathring{B} = B$ donc $\bar{A} = CB = A$

Proposition 3

La famille G des ensembles adhérents à A est une grille. En effet, A adhérent à a $\Leftrightarrow \forall\, V_a \in F_a$ $V_a \cap A \neq \emptyset$. Elle est donc constituée par la grille $G(F_a)$ associée au filtre F_a.

On a donc :

$G_1)$ $\emptyset \notin F$;

$G_2)$ $A \in G$ et $B \supset A \Longrightarrow B \in G$;

$G_3)$ $A \in G$ et $B \notin G \Longrightarrow A - B \in G$.

Considérons maintenant la famille des ensembles fermés.

Proposition 4

Pour qu'un ensemble A soit fermé dans une F-topologie, il faut et il suffit que quel soit $a \notin A$, il existe un F voisinage V_a de a qui ne rencontre pas A.

En effet, si $A = \bar{A}$ quel que soit $a \notin A$, $a \notin \bar{A}$; donc il existe une boule $Ba(\varepsilon)$ qui ne rencontre pas A. Réciproquement, si quel que soit $a \notin A$, il existe un V_a ne rencontrant pas A, alors $\exists$ un $B_a(\varepsilon)$ ne rencontrant pas A et $a \notin \bar{A}$ donc $\bar{A} \subset A$, donc en vertu de A_3) $\bar{A} = A$.

Corollaire 1

Pour qu'un ensemble A soit ouvert, il faut et il suffit que tout point de A soit centre d'une boule toute entière contenue dans A.

En effet, A est ouvert $\Leftrightarrow$ CA est fermé $\Leftrightarrow a \in A \Longrightarrow \exists$ une boule de centre a ne rencontrant pas CA donc contenue dans A.

Nous serons évidemment amenés à appeler *voisinages* les ensembles qui contiennent un ouvert.

Proposition 5

Les ouverts et les fermés de la F-topologie T sont les ouverts et les fermés d'une véritable topologie $\tilde{T}$.

En vertu de la proposition 2, il nous suffira de démontrer que si H désigne la famille des fermés de E on a :

F_1) $\emptyset \in H$ et $E \in H$

F_2) $A_i \in H \Longrightarrow \bigcup_{1=i}^{n} A_i \in H$

F_3) $A_i \in H \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in H$

En effet F_1 est une conséquence de A_1.

F_2. Si a n'appartient à aucun des A_i en nombre fini il existe des boules $B_a(\varepsilon_i)$ telles que $B_a(\varepsilon_i) \cap A_i = \emptyset$. Posons $\varepsilon = \inf \varepsilon_i$, alors $\varepsilon > 0$ et $B_a(\varepsilon) \cap \left(\bigcup_{1=i}^{n} A_i\right) = \emptyset$

donc $a \notin \overline{\bigcup_{L=i}^{n} A}$ donc $\overline{\bigcup_{L=i}^{n} A_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A$

d'autre part $\overline{\bigcup_{1}^{n} A_i} \supset \bigcup_{1}^{n} A_i$ en vertu de la proposition (1), on a donc égalité.

F_3. Si A_i ($i \in I$) désigne une famille quelconque d'ensembles fermés et si $a \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ alors $\exists$ un i tel que $a \notin A_{i_0}$. Donc $a \notin \bar{A}_{i_0}$ mais $A_{i_0} \supset \bigcap A_i$ donc en vertu de la proposition 1 $\bar{A}_{i_0} = A_{i_0} \supset \overline{\bigcap A_i}$ donc $a \notin \overline{\bigcap A_i}$ et $\bigcap A_i = \overline{\bigcap A_i}$.

La famille H vérifie donc les axiomes classiques des fermés.

On peut donc associer à la F-topologie T, la véritable topologie $\tilde{T}$ dont les ensembles de H sont les fermés. Nous appellerons $\tilde{T}$ topologie associée à la F-topologie T.

Proposition 6

T_1 et T_2 désignant des F-topologies ou des topologies, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Quel que soit a tout voisinage de a dans T_2 est voisinage de a dans T_1 ;
2. Quel que soit a $F_{T_1}(a) \supset F_{T_2}(a)$
3. Quel que soit a $G_{T_1}(a) \subset G_{T_2}(a)$
4. Quel que soit A $\bar{A}_{T_1} \subset \bar{A}_{T_2}$
5. Quel que soit A $\mathring{A}_{T_1} \supset \mathring{A}_{T_2}$

Nous dirons que T_1 est *plus fine* que T_2 si elle vérifie une quelconque des propriétés 1. à 5.

En effet 1. $\Longrightarrow$ 2. évident :

2. Implique 3. car $A \in G_{T_1}(a) \Longrightarrow V_{T_1} \cap A \neq \emptyset$ $\forall V_{T_1} \Longrightarrow V_{T_2} \cap A \neq \emptyset \quad \forall V_{T_2} \Longrightarrow A \in G_{T_2}$

3. $\Longrightarrow$ 4 car $a \in \bar{A}_{T_1} \Longrightarrow A \in G_{T_1}(a) \Longrightarrow A \in G_{T_2}(a)$ $\Longrightarrow a \in \bar{A}_{T_2}$

4) $\Longrightarrow$ 1 car si $\bar{A}_{T_2} \supset \bar{A}_{T_1}$ et si $a \in A_{T_1}$ alors $a \in \bar{A}_{T_2}$ et $G_{T_1}(a) \subset G_{T_2}(a)$ donc $V_{T_2}(a)$ est un voisinage de a pour T_1

4 $\Leftrightarrow$ 5 car $\overline{CA}_{T_1} \subset \overline{CA}_{T_2} \Leftrightarrow C(\overline{CA}_{T_1}) \supset C(\overline{CA}_{T_2})$ $\Leftrightarrow \mathring{A}_{T_1} \supset \mathring{A}_{T_2}$

Proposition 7

La topologie $\tilde{T}$ associée à la F-topologie T est la plus fine des topologies qui sont moins fines que T.

Evidemment l'ensemble des topologies T_i qui sont moins fines que T n'est pas vide, puisqu'il contient la topologie grossière et l'intersection T^* des T_i est évidemment la plus fine de ces topologies. Soit A un fermé de T^*. Comme T^* est moins fine que T d'après la proposition σ, $\bar{A}_T \subset \bar{A}_{T_*} = A$ donc $\bar{A}_T = A$ et A est un fermé de la F-topologie T donc aussi de $\tilde{T}$. $\tilde{T}$ est donc plus fine que T^*, donc $\tilde{T} = T^*$

Nous appellerons *adhérence* de A et désignerons par ad A le plus petit fermé contenant A. De même, nous appellerons *intérieur* de A et désignerons par int A le plus grand ouvert contenu dans A.

Proposition 8

On a $\bar{A} \subset$ ad A et $\mathring{A} \supset$ int A

En effet ad A $= \bar{A}_{\tilde{T}}$ int A $= \mathring{A}_{\tilde{T}}$, la proposition 8 résulte alors de la proposition 7 et du fait que $\tilde{T}$ est moins fine que T.

§ 2. — *Structure F-uniforme et structure uniforme :*

Considérons la famille Z des ensembles W_ε des points x, y de $E \times E$ tels que $(x, y) \in W_\varepsilon \Leftrightarrow \rho(x, y) < \varepsilon$. Il est clair que Z est une base de filtre sur $E \times E$ — le filtre R associé à Z sera formé des ensembles U de $E \times E$ tels que $U \in R$ si $\exists\, \varepsilon$ tel que $U \supset W_\varepsilon$.

On dira que le filtre R définit la *F-structure uniforme* associée à l'écart ρ et on appellera *F-entourages* les éléments de R. Une telle structure vérifie les axiomes.

U_1. Tout ensemble de R contient la diagonale $\triangle$;

U_2. Si $U \in R$, $U^{-1} \in R$

de plus elle vérifie aussi l'*axiome de séparation* ;

U_3. L'intersection des ensembles de R est la diagonale $\triangle$, en effet si (a, b) est un point qui n'appartient pas à $\triangle$ on a $a \neq b$, donc $\rho(a, b) = \varepsilon > 0$ dès lors $W\varepsilon \in R$ et ne contient pas (a, b). Evidemment cette F-structure uniforme suffit à définir la F-topologie de E, les F-voisinages V_a étant formés des points x tels que $(a, x) \in U$

Etant données 2 structures uniformes ou F uniformes R et R′, nous dirons évidemment que R est *plus fine* que R′, si le filtre R est plus fin que le filtre R′. Nous sommes ainsi amenés à appeler *structure uniforme associée* à la structure F-uniforme R, la plus fine $\hat{R}$ des structures uniformes qui sont moins fines que R. A cette structure uniforme est associée une topologie $\hat{T}$ qui est évidemment moins fine que la F-topologie T, donc aussi moins fine que la topologie $\tilde{T}$ associée à T.

E muni de la topologie T, apparaît donc comme un espace F-uniforme, d'autre part si on munit $E \times E$ d'une structure uniforme (ou F-uniforme) R′ à laquelle est associée une topologie (rep F-topologie) T′, on dira encore que T′ est un *espace uniforme* (resp F-*uniforme*) et que T′ est *moins fin* que T si R′ est moins fin que R.

$\hat{T}$ apparaît donc comme le plus fin des espaces uniformes qui soient moins fin que T. Sur T et T′ on définira encore des *F-filtres* (resp. des filtres) *de Cauchy* ainsi que des *F-suites* resp. des suites de Cauchy, et on dira qu'un filtre *F-converge* vers x s'il est plus fin que le filtre des F-voisinages de x.

Un espace sera dit F complet si tout F-filtre de Cauchy F-converge, F′-complet si toute F-suite de Cauchy F-converge; *complet* ou complet pour T si tout filtre de Cauchy de $\hat{T}$ F-converge, T′-*complet* si tout filtre de Cauchy de l'espace uniforme T′ F-converge.

Proposition 9

Si T′ est un espace uniforme moins fin que T on a les implications :

a. E T′-complet $\Longrightarrow$ E complet $\Longrightarrow$ E F-complet $\Longrightarrow$ E F′-complet ;

b. E T′-complet $\Longrightarrow$ E complet $\Longrightarrow$ E complet pour $\hat{T}$;

a. En effet si T′ est uniforme et moins fin que T, il est nécessairement moins fin que $\hat{T}$. Donc tout filtre de Cauchy dans $\hat{T}$ est aussi filtre de Cauchy dans T. De plus, tout F-filtre de Cauchy G sur T est aussi un filtre de Cauchy sur $\hat{T}$. Donc si tous les filtres de Cauchy sur $\hat{T}$ F-convergent, a fortiori les F-filtres de Cauchy. De plus, une suite de x_n F-convergera certainement vers un point x si on est assuré que le filtre G dont une base est formée par les $G_n \{ x_n, x_{n+1} \dots \}$ F-converge vers x.

b. En effet le filtre des F-voisinages de T est plus fin que le filtre des voisinages de $\hat{T}$.

Evidemment dans un espace F-uniforme les suites de Cauchy (et à fortiori les filtres de Cauchy) ne sont pas les seules suites (resp. Filtres) susceptibles de F-converger.

Nous dirons qu'un F-écart $\rho(x,y)$ est *régulier* si $\forall\varepsilon\ \exists\eta$ tel que $\rho(x, y) < \eta$ et $\rho(y, z) < \eta \Longrightarrow \rho(x, z) < \varepsilon$. Evidemment toute distance est un F-écart régulier mais les exemples 4, 5, 6. qui tous définissent des F-écarts réguliers montrent que la réciproque n'est pas vraie. La définition du F-écart régulier montre que la base de structure F-uniforme Z est telle que $W\eta \circ W\eta \subset W_\varepsilon$. La F-structure uniforme qu'on en déduit est donc une structure uniforme. Donc $E^* = \hat{E}^*$ et la F-topologie T coïncide avec les topologies $\tilde{T}$ et $\hat{T}$. On peut donc appliquer les théorèmes classiques à de tels espaces.

En particulier si $\rho(f_n, f)$ tend vers O on voit que si ρ est défini par (4) f_n converge en mesure vers f, si ρ est défini par (5) f_n converge presque uniformément vers f si ρ est défini par (6) f_n converge en moyenne quadratique vers f comme pour ces espaces $T = \hat{T}$ il sera nécessaire pour que f_n converge en mesure ou en moyenne quadratique ou presque uniformément vers f que f_n soit une F-suite de Cauchy (relativement au F-écart correspondant) par ailleurs les théorèmes de Riez-Weyl et de Fisher-Riez deviennent :

Proposition 10

Les espaces (4), (5) et (6) sont F′-complets.

Applications continues, F-continues, F-uniformément continues :

Considérons maintenant une application f d'un espace F-topologique E dans un espace F-topologique G et soient ρ_E, ρ_G les F-écarts correspondants. Il y a encore ici 2 généralisations possibles de la notion classique d'application continue usuelle qui toutes deux nous seront utiles. Chacune de ces notions peut se définir de plusieurs manières équivalentes comme le montrent les propositions 10 et 11.

Proposition 11

Etant données 2 espaces F-topologiques E et G et une application f de E dans G, les propriétés suivantes de l'application f sont équivalentes :

F C) $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \eta$ tel que $\rho_F\ (a, x) < \eta \Longrightarrow \rho_G\ [f(a), f(x)] < \varepsilon$;

FC′) Quel que soit le F-voisinage V f(a) de f(a) dans G, il existe un F-voisinage W_a dans E tel que f $(W_a) \subset V_{f(a)}$;

FC″) L'image réciproque du filtre des voisinages de f(a) est un filtre moins fin que celui des voisinages de a ;

FC‴) Quel que soit A tel que $a \in \bar{A}$, $f(a) \in \overline{f(A)}$.

Une application qui vérifie l'une quelconque des propriétés FC, FC′, FC″, FC‴ sera dite F-continue au point a, une application F-continue en tout point de E sera dite F-continue.

FC $\Longrightarrow$ FC′ car, étant donné $V_{f(a)}$, il existe une boule de rayon $\varepsilon > 0$ $B_{f(a)}\ (\varepsilon)$ contenue dans $V_{f(a)}$. Dès lors, d'après FC la boule de E définie par $B_a\ (\eta)$ est un W_a répondant à la question.

FC′ $\Longrightarrow$ FC car $\forall V_{f(a)} = B_{f(a)}\ (\varepsilon)\ \exists\ B_a\ (\eta) \subset W_a$ plus fin que FC′ $\Leftrightarrow$ FC″ résident

FC′ $\Longrightarrow$ FC″ car $\forall$ V f(a) soit W tel que f (W) $\subset$ V si $a \in \bar{A}$ $W \cap A \neq \varnothing$ quel que soit W voisinage *de a* donc à fortiori $V \cap f(A) \neq \varnothing$ puisque $f(W \cap A) \subset f(W) \cap f(A) \subset V \cap f(A)$ donc $f(a) \in \overline{f(A)}$

FC‴ $\Longrightarrow$ FC″ en effet $\forall$ $V_{f(a)}$ si $\forall$ $A \in G_E(a)$, $f(A) \in G_G\ f(a)$ alors $V_n\ f(A) \neq \Longrightarrow f^{-1}\ (V) \cap A \neq \varnothing$ pour tout A ; donc f^{-1} (V) est un élément du filtre associé à la grille G (a).

Proposition 12

Etant donnée une application f d'un espace F-topologique E dans un espace F-topologique G les propriétés suivantes sont équivalentes :

C) L'image réciproque de toute adhérence est un fermé ;

C′) L'image réciproque de tout intérieur est un ouvert une application f qui vérifie une des propriétés C ou C′ sera dite *continue.*

En effet, $f^{-1}(\overline{CA})$ fermé $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathring{A}) = f^{-1}(C\overline{CA})$ ouvert.

Proposition 13

Dans le cas particulier où G est topologique, une application f de l'espace F-topologique E dans G est continue si et seulement si la condition suivante est vérifiée.

C″) Quels que soient a et $V_{f(a)}$, $\exists\ W_a \in F_T$ tel que f (W) $\subset$ V ;

C′ $\Longrightarrow$ C″ car $\forall\ V_{f(a)}$ il existe un ouvert O f (a) $\subset$ V f(a) qui contient f(a) et est contenu dans V f(a). Dès lors f^{-1} (O f(a) est un W_a qui répond à la question ;

C″ $\Longrightarrow$ C Car si F est fermé de G :
$a \notin f^{-1}(F) \Longrightarrow f(a) \notin F \Longrightarrow F(a) \notin F \Longrightarrow \exists\ V fa$ tel que $V f(a) \cap F = \varnothing \Longrightarrow \exists\ Wa \in F_T$
tel que $Wa \cap f^{-1}(F) = \varnothing \Longrightarrow f^{-1}(F)$ est fermé.

Proposition 14

Etant donnée une application f d'un espace F-topologique E dans un espace F-topologique G, les conditions suivantes sont équivalentes :

PC) L'image réciproque de tout fermé de G est un fermé de E ;

PC′) L'image réciproque de tout ouvert de G est un ouvert de E ;

Une application vérifiant une quelconque des propriétés PC ou PC′ sera dite *presque continue.*

Evidente d'après la proposition 2.

Evidemment toute application continue est presque continue. Réciproquement si G est topologique toute application presque continue est continue. Il y a alors identité entre les 2 notions.

Proposition 15

Toute application continue de l'espace F-topologique E dans G est F-continue.

En effet, $f^{-1}\ \overline{f(A)}$ est un fermé contenant A donc $\bar{A}$. Donc $a \in \bar{A} \Longrightarrow f(a) \in \overline{f}(A)$. Une application f d'un espace F-topologique E dans un espace F-topologique G sera dite *F-uniformément continue si* $\forall_\varepsilon\ \exists\ \eta$ tel que $\rho_E\ (x, y) < \eta \Longrightarrow \rho_G\ [f(x), f(y)] < \varepsilon$ ou ce qui revient au même si R_E et R_G désignant les F-structures uniformes de E et G on a $f^{-1}\ (R_G)$ moins fin que R_E, l'application f sera dite au contraire *uniformément continue* si

$\forall\ \varepsilon, \exists\ W \in \hat{R}_E$ tel que $x, y \in W \Longrightarrow \rho\left[f(x), f(y)\right] < \varepsilon$.

Proposition 16

a. Toute application uniformément continue est F-uniformément continue.

b. Toute application F-uniformément continue est F-continue ;

c. Si G est un espace uniforme toute application uniformément continue est continue.

En effet :

a. Si $f^{\cdot}(R_G)$ est moins fin que $\hat{R}_E$, il sera à fortiori moins fin que R_E ;

b. Est évident en vertu de FC ;

c. Si G est un espace uniforme alors $\hat{T}_G = \tilde{T}_G = T_G$. Alors si F est un fermé de G et si $a \notin f^{-1}(F)$, alors $f(a) \notin F \Longrightarrow f(a) \notin \bar{F}$, dès lors il existe un voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$ tel que $V_{f(a)}$ soit composé des points y tels que $|f(a), y)| \in U_G$. Soit donc W de $\hat{R}_E$ tel que $f(W) \subset U_G$, l'ensemble V_a des x tels que $(a, x) \in W$ fait partie $\hat{F}_a$ donc à fortiori des $\tilde{F}_a$ de E et est évidemment tel que $W \cap f^{-1}(F) = \varnothing$ donc $f^{-1}(F)$ est fermé dans $\tilde{T}$ donc est un fermé de T.

Espace produit :

Etant donnés 2 espaces F-topologiques E_1 et E_2 nous pouvons définir une V-topologie sur l'espace produit $E = E_1 \times E_2$ par $\rho[(a_1, a_2), (x_1, x_2)] = \sup[\rho_{E1}(a_1, x_1), \rho_{E2}(a_2, x_2)]$

Nous désignerons cette F-topologie par $T_1 \times T_2$ et l'appellerons F-topologie produit.

Plus généralement étant donnée une famille E_i d'espaces F-topologique on peut définir une F-topologie sur ΠE_i par $\rho_E(a, x) = \sup \rho(a_i, x_i)$. Evidemment $a_1 \in \bar{A}\, a_2 \in \bar{A}_2 \Leftrightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A_1 \times E_2$ tels que $\rho(a_1, x_1) < \varepsilon$, $\rho(a_2, x_2) < \varepsilon$ donc $\overline{A_1 \times A_2} = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$

Proposition 17

L'application $p(x_1, x_2) \to x_1$ de $E_1 \times E_2$ muni de la F-topologie $T_1 \times T_2$ dans E_1 muni de la F-topologie T_1 est F-uniformément continue, presque continue et F-continue. Elle est continue dans le cas particulier où T_1 est une topologie ; en effet $\rho(x, a) < \varepsilon \Longrightarrow \rho(x_1, a_1) < \varepsilon$ ce qui entraîne la F-uniforme continuité donc la F-continuité.

De plus soit H un fermé de E_1. $p^{-1}(H) = H \times E_2$ dès lors si $(a, b) \notin H \times E_2$ $\exists\, B_a$ tel que $B_a \cap H = \varnothing$ donc $(B_a \times E_2) \cap (H \times E_2) = \varnothing$, donc $p^{-1}(F)$ est un fermé ce qui entraîne la presque continuité de f. Si maintenant E est topologique toute adhérence dans E est un fermé dont l'image réciproque est un fermé. On a donc continuité.

Proposition 18

Etant donnée une application $f(x_1, x_2)$ de $E_1 \times E_2$ dans un espace prétopologique G, si $(x_1, x_2) \to f(x_1, x_2)$ est continue (resp F-continue, presque continue) alors l'application φ de E_2 dans G $x_2 \to f(a_1, x_2)$ est continue (resp. F-continue presque continue).

En effet, si f est continue et si B est une adhérence dans G $f^{-1}(B)$ est fermée dans $E_1 \times E_2$ et si a, b n'appartient pas à $f^{-1}(B)$ il n'appartient *pas* à $\overline{f^{-1}(B)}$, de plus $b \notin \varphi^{-1}(B) \Longrightarrow (a, b) \notin f^{-1}(B) \Longrightarrow (a, b) \notin \overline{f^{-1}(B)} \Longrightarrow b \notin \varphi^{-1}(B)$, donc φ est continue.

Dans le cas où f est presque continue, on peut faire la même démonstration en prenant pour B un fermé de G.

Enfin si $\rho_{E1}(a_1, x_1) < \eta\ \rho_{E2}(a_2, x_2) < \eta \Longrightarrow \rho[f(a_1, a_2), f(x_1, x_2)] < \varepsilon$ évidemment $\rho_{E2}(a_2, x_2) < \eta \Longrightarrow \rho(f(a_1, a_2), f(a_1, x_2)] < \varepsilon$, ce qui est la F-continuité de φ.

Espaces vectoriels F-topologiques

Nous pouvons évidemment généraliser de plusieurs manières la notion d'espace vectoriel topologique suivant que nous prenons une définition plus ou moins lâche de la continuité. Comme toujours les définitions très lâches nous donnent peu de théorèmes, mais un vaste champ d'applications ; les définitions très restrictives donnent beaucoup de propriétés, mais ces dernières risquent de ne s'appliquer pratiquement qu'aux seuls espaces vectoriels topologiques classiques.

Définition : Etant donnés un corps topologique K et un ensemble E, muni d'une F-topologie T et d'une structure d'espace vectoriel à gauche sur K, nous considérerons les applications.

$EVT_1)$ $(x, y) \to x + y$;

$EVT_2)$ $(\lambda, x) \to \lambda x$

de $E \times E$ et $K \times E$ munis de la F-topologie produit dans E muni de la F-topologie T et nous dirons que :

E est un espace vectoriel *fortement F-topologique* si EVT_1 et EVT_2 sont continues ;

E est un *espace vectoriel F-topologique* si EVT_1 et EVT_2 sont à la fois F-continues et faiblement continues ;

E est un *espace vectoriel F'-topologique* si EVT_1 et EVT_2 sont faiblement continues.

Evidemment E espace vectoriel fortement F-topologique $\Longrightarrow$ E espace vectoriel F-topologique $\Longrightarrow$ E espace vectoriel F'-topologique.

Proposition 19

Si E est un espace F'-topologique (resp. F-topologique, fortement F-topologique) il est un espace vectoriel topologique pour la topologie T.

En effet, si on munit E de la topologie $\hat{T}$, les applications EVT_1 et EVT_2 sont continues. On voit facilement que les exemples de F-écart 2 et 3 font de R^2 et R^3 des espaces vectoriels F'-topologiques qui ne sont pas F-topologiques. La topologie $\tilde{T}$ est alors la topologie classique de R^2 ou de R^3.

Dans la suite nous supposerons *toujours que K est le corps des réels ou des complexes* et nous nous bornerons à étudier les propriétés des espaces vectoriels F-topologiques. Les voisinages dans de tels espaces étant voisinages pour la topologie $\tilde{T}$ ont évidemment les propriétés classiques. Mais il est remarquable de constater que la plupart de leurs propriétés s'étendent aussi aux F-voisinages.

Proposition 20

Les filtres des F-voisinages se déduisent par translation les uns des autres.

En effet, de EVT_1 et de la proposition 18 résulte qu'en particulier l'application $x \to a + x$ doit être F-continue. Donc $\forall\ V_a$, il existe un F-voisinage V_o tel que $a + V_o \subset V_a$ de même $\forall\ V_o\ \exists\ V_a$ tel que $-a + V_a \subset V_o$.

De 20 résultats évidemment que la grille G (a) des ensembles adhérents à a se réduit de G (o) par translation. On voit donc que comme pour les voisinages il nous suffit d'étudier les F-voisinages de l'origine.

Proposition 21

Le filtre F des F-voisinages de l'origine est tel que :

FV_1) Tout $V \in F$ est absorbant ;

FV_2) Si $V \in F\ \lambda\ V \in F$;

FV_3) Si $V \in F\ \exists\ W \in F$ tel que $W + W \subset V$.

Il suffit de faire le raisonnement classique en remarquant que les applications $\lambda \to \lambda x_o$, $x \to \lambda_o x$, $(x, y) \to x + y$ sont F-continues aux points $\lambda = 0$, $x = 0$ $(x, y) = 0{,}0$.

Les ensembles absorbés par tout F-voisinage seront dits *F-bornés*. Evidemment les voisinages étant aussi des F-voisinages tout ensemble F-borné est borné.

Proposition 22

La famille B des ensembles F-bornés est un recouvrement héréditaire de E stable par homothétie et par somme vectorielle finie.

En effet FV_1 montre que tout point x est borné. B est donc un recouvrement de E, évidemment si λ V couvre B_1 et si $B_2 \subset B_1$ λV couvre B_2. B est donc héréditaire. EV_3 prouve la stabilité par homothétie. De plus étant donnés 2 bornés A et B et $\forall\ V\ \exists\ W \in F$ tel que $W + W \subset V$ et que $\lambda W \supset A$ $\lambda W \supset B$ donc $\lambda V \supset A + B$ ce qui prouve la stabilité par réunion finie.

Exemples :

1. Considérons un espace localement convexe E et la famille $p_i(x)$ des semi-normes qui définissent sa topologie, évidemment $\rho(x, y) = \sup p_i(x - y)$ définit sur E une F-topologie. Si Z est la base de voisinages de 0 définie par les $p_i(x)$, alors une base de F-voisinages F est donnée par les intersections quelconques de $W_i \in Z$, c'est dire que si T_1 désigne la F-topologie initiale donnée sur E et si T est la F-topologie trouvée on aura toujours T_1 moins fine que $\tilde{T}$ et moins fine que T. Ces 3-F-topologies étant identiques si la topologie initiale est définie par un nombre fini de semi-normes.

2. Si D désigne l'ensemble des fonctions $\varphi(x)$ indéfiniment dérivables à support compact et si on désigne par m (K) la mesure de Lebesgue de K et si on appelle K_p le support de $D^p\varphi(x)$ alors : $\rho\left[\varphi(x), \psi(x)\right] = \sup_p \left\{ \sup_x \left|D^p(\varphi(x) - \psi(x)\right| + m(K_p) \right\}$ définit évidemment un F-écart.

La F-topologie T qu'on en déduit est certainement plus fine que la véritable topologie T* qu'on associe généralement à l'espace en effet si on considère une suite de fonctions φ_n dont le support est situé dans un compact variable K_n, alors il peut se faire que $\rho(\varphi_n, 0) \to 0$ (dans T, $\varphi_n \to 0$) bien que φ ne tende pas vers 0 dans T*. Cela sera notamment le cas si $\varphi_n(x) = \psi_n(x + n)$ où $\psi_n(x)$ tend vers 0 dans T*.

Manuscrit reçu en avril 1968.

BIBLIOGRAPHIE

CHOQUET (G.) 1. Ann. Fac. Sc. Grenoble t. 22, pp. 58-111 (1948)
2. C.R. Ac. Sc. t. 224, pp. 171-172 (1947).

FÉRON (R.) 1. C.R. Ac. Sc. t. 426, pp. 278-280 (1966).
2. 91e Congrès Soc. Savantes t. 2, pp. 15-27 (1966).

FRÉCHET (M.) Espaces abstraits Gauthier Villars.