L'INFINI MATHÉMATIQUE ET LA QUALITÉ

PAR

Gérard VASSAILS

(Laboratoire de Physique)

RÉSUMÉ

Les catégories de qualité et de quantité sont réintroduites, explicitement et systématiquement, dans les sciences exactes. Leur connexion est élucidée en physique puis en mathématiques, par le traitement de problèmes précis. Le concept de l'infini mathématique est ensuite élaboré, le concept complet et concret unissant les deux infinis, le potentiel et l'actuel ou transfini, ce second n'étant autre que la limite. Deux contradictions dialectiques structurent le concept : celle du fini et du non-fini, celle du changement quantitatif et du changement qualitatif. L'infini potentiel n'autorise que des successions interminables de changements quantitatifs, tandis que le transfini promeut un changement de qualité. Enfin, il est traité de la concrétisation physique du concept : celui-ci constitue une connaissance rationnelle de l'objet physique, qui comme telle s'identifie à sa connaissance empirique et en même temps la contredit, l'expérience rejetant tout infini purement potentiel.

Ce travail critique la manière habituelle dont les sciences exactes s'exposent et s'enseignent, leur mode de penser étroitement analytique et abstrait leur logique aristotélicienne, par trop simpliste, la prédominance qu'elles octroient au génie opératoire sur le concept, à l'imagination calculatrice sur la raison.

ABSTRACT

The categories of quality and quantity are explicitly and systematically reintroduced in exact sciences. Their connection is elucidated in physics and in mathematics too, by the treatment of some precise problems. The concept of mathematical infinite is then worked out, the concrete and complete concept linking the two infinites, the potential and the actual or transfinite, the latter which is but the limit. Two dialectical contradictions settle the structure of concept : that of finite and non-finite, that of quantitative change and qualitative change. Potential infinite admits but endless successions of quantitative changes, whereas transfinite promotes a change of quality. At last, the physical concretisation of concept is dealt with : this one constitutes a rational knowledge of the physical object which as such identifies itself to its empiric knowledge and contradicts it as well, while experience rejects every infinite purely potential.

This work criticizes the usual method how exact sciences expose and teach, their way of thinking which is narrowly analytical and abstract, their aristotelian logics, too simplistic, the predominance they grant to operative intellect about concept, to calculative imagination about reason.

QUALITÉ ET QUANTITÉ

Actuellement le mot « qualité » est presqu'inusité dans les sciences mathématiques et physiques, hormis quelques expressions consacrées telles que loi qualitative et loi quantitative (de l'électrolyse, des courants électriques induits) en physique, analyse qualitative et analyse quantitative en chimie, intégration qualitative des équations différentielles et plus rarement nombres qualifiés (susceptibles d'être positifs ou négatifs) en mathématiques. Cette désuétude prend certainement sa source dans la vive réaction de la science des temps modernes contre la scholastique, sa physique qualitative, ses qualités occultes, mais c'est au cours de notre siècle qu'elle est devenue complète (P. DUHEM ne statuait-il pas encore sur les qualités premières de la matière ?)

En vérité, si le mot a été banni du discours scientifique usuel, la catégorie logique fondamentale que traditionnellement il désigne n'y est pas toujours cachée. Ce sont alors d'autres vocables qui l'expriment, et d'abord « propriété ». Descartes ne considérait-il pas déjà « qualité » et « propriété » comme synonymes dans la plupart des cas ? [I] je ne pense pourtant pas qu'il faille se rallier à son point de vue. Outre cet inconvénient linguistique que de « propriété » on ne peut dériver d'adjectifs, verbe, adverbe correspondant à « qualitatif », « qualifié », « qualifier », « qualitativement » je vois à lui faire exprimer une catégorie un obstacle théorique. La propriété est, stricto sensu, ce qui est propre : ainsi, ce qui est commun à tous les éléments d'un ensemble mathématique est propre à l'ensemble et non à l'élément, tandis que ce qui distingue un élément de tous les autres est propre à cet élément. Or ce qui est propre n'est pas nécessairement une qualité : parmi les « propriétés physiques » d'une espèce chimique par exemple, figurent en bonne place les nombres mesurant ses masses volumiques, ses températures de fusion et d'ébullition, etc. De même en microphysique les propriétés quantitatives des corpuscules, telles que les valeurs numériques de la charge électrique et de l'inertie, sont-elles fort importantes. Le mot « classe », très usité en logique et en mathématiques, appelle des objections analogues. Ainsi, dans la théorie mathématique de la mesure des grandeurs, des objets appartenant à une même classe d'équivalence (par exemple des objets pesants) sont quantitativement identiques (leurs masses gravitationnelles sont égales). Le mot « espèce » parfois recouvre aussi la qualité, comme dans « espèce chimique » ou dans la traditionnelle expression « grandeurs de même espèce ».

Ne serait-ce que pour l'unité et la clarté de la pensée scientifique, je tiendrais le mot « qualité », qui a ses lettres de noblesse depuis la philosophie et la science grecques, pour une donnée sûre du langage et de la culture, qu'aucune raison n'autorise à bannir du vocabulaire de la science d'aujourd'hui, et je penserais qu'il faut au contraire le restaurer dans sa fonction logique traditionnelle.

Classiquement, en ontologie la qualité détermine, précise un être : être, puis être *vivant*, puis être vivant *vertébré* ; ou encore nombre, puis nombre *entier*, puis nombre entier *pair*, par exemple. En logique, la qualité figure dans le jugement comme prédicat d'un sujet : « cette solution est acide ». Mais encore une fois toute détermination d'un être, tout prédicat d'un sujet n'est pas qualitatif : la température est de 25°C (prédicat quantitatif) Pierre est à Paris (prédicat local). Je propose donc la définition suivante de la qualité : une précision d'un être (un prédicat) susceptible de plus ou de moins, d'augmentation et de diminution qui demeure identique à travers ses différences ou changements quantitatifs. Ainsi la qualité est indissolublement liée à son opposée traditionnelle la quantité et c'est en vérité ce couple ou dipôle qualité-quantité qui, indivis, se trouve posé par postulat, avec ses deux pôles se définissant (comme le font l'identité et la différence par exemple) l'un par l'autre.

Point n'est besoin que le dénombrement ou la mesure soient possibles pour qu'un prédicat soit qualité. On dit d'un homme qu'il est moins malhonnête qu'un autre, d'un paysage qu'il est plus riant, d'un rouge qu'il est plus foncé et ces expressions peuvent recevoir un contenu tout à fait valable dans la langue courante ou littéraire. Cependant, concentrant ma réflexion sur les sciences exactes, il va de soi que c'est de la qualité dont la quantité est exprimable à l'aide de nombres que je traiterai exclusivement.

Le postulat du dipôle permet d'ores et déjà de répondre à la question de savoir si (comme le soutenait KANT) qualité et relation sont des catégories distinctes ou si la seconde peut se ramener à la première. Elle le peut si et si seulement elle demeure identique à travers les différences quantitatives que présentent les deux termes qu'elle unit. Soit la relation « Paul est le père de x » où x désigne soit l'un quelconque des six enfants de Paul, soit une liste quelconque de 2, ou 3... ou 5 de ses enfants, soit la liste des six ; cette relation de paternité est indifférente au nombre cardinal de l'ensemble x d'enfants et par conséquent elle est une qualité. En mathématiques, la plupart des relations sont des qualités et par excellence les fonctions de variables réelles : dans $y = f(x)$ où x et y sont de telles variables, la fonction f, à savoir la loi (nécessaire comme toute loi) qui détermine un nombre y par un nombre x, demeure identique à elle-même à travers les différences quantitatives qui peuvent présenter x et y. La différence entre deux fonctions f et g est qualitative, elle est altérité et de même celle de leurs graphes lorsqu'elles en admettent.

Précisons maintenant le contenu de la catégorie « quantité ». A la qualité G est inhérent un ensemble Q_G de quanta q_G (inhérence exprimée pratiquement en physique à l'aide du nom de l'unité : 3,46 ampères désigne un quantum de la qualité « intensité d'un courant électrique »). De q_G à q'_G le changement quantitatif n'altère pas la qualité G (on agrandit un champ de blé, il reste champ de blé, on le transforme en pré et c'est la qualité qui change dit HEGEL). L'ensemble Q_G est totalement ordonné par la relation asymétrique $q'_G > q_G$ que nous révèle directement, expérimentalement, la mesure ou le dénombrement et il admet aussi une relation d'équivalence $q_G = q'_G$ de telle sorte que deux quanta q_G et q'_G soient nécessairement liés par une et une seule des trois relations $q'_G > q_G$, $q'_G = q_G$ et $q_G > q'_G$. Enfin, l'ensemble Q_G se conforme à une loi interne d'addition : si $q'_G > q_G$, alors $\exists\, q''_G$, $q_G + q''_G = q'_G$; l'addition exprime, sur le plan formel, le principe du passage d'un quanta à un autre, de l'augmentation et de la diminution, du changement quantitatif. Tel est, sans aller plus avant dans la théorie de la mesure des grandeurs, l'essentiel du contenu de la catégorie de quantité, englobant la grandeur physique et la quantité mathématique.

Or la relation d'ordre $>$ est une qualité : ne peut-on en effet changer indéfiniment et q_G et q'_G tout en la maintenant ? La loi d'addition aussi en est une et l'opposition entre augmentation et diminution est qualitative. De même donc que la quantité fait partie intégrante du concept de la qualité, de même celle-ci du concept de la quantité, qu'elle structure. Ainsi les deux pôles du couple s'interpénètrent, ne peuvent jamais se séparer absolument comme le démontrera constamment la suite de cette étude.

Or ceci est inconcevable au niveau de la pensée analytique ou entendement qui est celui du discours par lequel s'exposent et s'enseignent généralement les sciences exactes, leurs protocoles d'expérimentation comme leurs théories plus ou moins mathématisées. L'entendement, qui opère par abstraction, n'est mû en effet que par la logique de la non contradiction, laquelle s'arrête à l'exclusion réciproque des termes d'une opposition, à leur extériorité. Non que cette exclusion soit fausse : la qualité ne change pas lorsque sa quantité change, la distinction entre l'une et l'autre se ramène à l'affirmation et à la négation d'un même terme, coordonnées effectivement par une exclusion réciproque vraie. Mais la pénétration ou inclusion mutuelle n'est pas moins vraie, qui se traduit formellement par l'implication réciproque : si dans l'être il y a qualité, alors il y a quantité ; réciproquement, s'il y a quantité, alors il y a qualité, non seulement parce que le quantum est inhérent à une qualité concrète mais parce que, même pure, même mathématique, la quantité en elle-même est structurée par des qualités-relations. Or exclusion et implication réciproques sont entre elles contradictoires. En les affirmant toutes deux vraies, le raisonnement procède donc bien d'une logique dialectique et non classique, héraclitéenne et non aristotélicienne.

Explorer l'objet plus loin, plus profondément que le discours analytique abstrait ne le fait, cela nécessite ce changement du registre de la pensée, de la logique, le dépassement de l'entendement par la pensée synthétique, tenue par HEGEL pour la raison véritable. Mais, dira-t-on, pourquoi cette exploration ? Parce que, répondrai-je d'abord, le discours abstrait laisse dans l'ombre un part que je crois essentielle de la vérité, la part de la qualité, du concept, de la contradiction, en hypertrophiant celle de l'algorithme, de la quantité, du non contradictoire ; cela revient à dire que ce discours « exact » révèlera à la raison dialectique son envers inexact et par là s'ouvrira au progrès au lieu de s'enfermer sur lui-même et de se dogmatiser. Ma seconde réponse sera la suivante. En morcelant le réel par sections extérieures les unes aux autres, la pensée analytique a du même coup divisé, séparé les hommes parce qu'elle a rendu ses discours ésotériques. Non seulement les scientifiques et les non scientifiques, mais les spécialistes des diverses disciplines, même voisines, ne se comprennent plus entre eux, ne peuvent plus guère communiquer, au moins au niveau des travaux de recherche. Et, hélas, beaucoup se complaisent à cet hermétisme qui bien souvent n'est que pédanterie. L'unité de la pensée scientifique se trouve ainsi brisée en mille morceaux au moment où les grandes œuvres, telle la conquête de l'espace, exigent la coopération de nombreuses disciplines et commencent à démontrer la nécessité de son rétablissement. Du même coup, les sciences exactes se sont exclues de la culture, au point que ce mot ne signifie en fait pour tout le monde aujourd'hui que littérature, beaux-arts et déjà moins philosophie ou sciences humaines. Dans un texte qui m'a beaucoup frappé, A. LICHNÉROVICZ [IV] décrivant la situation de la physique actuelle, dit que l'expérimentateur essaie d'imaginer le monde atomique mais ne peut parvenir ainsi qu'à des représentations erronnées, ce que j'accorde volontiers, l'atome étant à jamais inaccessible à la perception directe ; seul le théoricien, en construisant un système mathématique « plus ou moins ésotérique », affirme-t-il, « a raison ». Que ce brillant spécialiste des sciences exactes ne songe même pas qu'outre la représentation sensible et l'algorithme il puisse exister une autre pensée, une autre raison, qu'il dédaigne vingt-cinq siècles de pensée conceptuelle me paraît et tout à fait significatif et assez effrayant dans la mesure où se manifeste là une tendance de nos sociétés industrielles vers l'ésotérisme scientifique et l'inculture. Je suis en effet convaincu que ce sont elles qui ont nourri jusqu'ici cette hypertrophie de l'analyse abstraite. Notamment, tout le monde voit combien, par la médiation de la technique, les sciences exactes pénètrent de plus en plus tous les domaines de la vie moderne. Mais peu nombreux sont ceux qui aperçoivent la réciproque (dialectique) : la pénétration de ces sciences par la technique, leur tension plus ou moins consciente vers l'efficience, la rentabilité (y compris celle de l'enseignement) et le formalisme qui font d'elles aujourd'hui plus une technique qu'une pensée et de leur pédagogie plus un apprentissage dogmatique de savoirs et de savoir-faire qu'une éducation de la raison, c'est à dire de l'esprit critique. Elles tendent en effet à donner la prédominance aux opérations, instrumentales au laboratoire, mathématiques au bureau du théoricien, or la preuve que l'intellect opératoire n'est pas une pensée accomplie, c'est qu'une part importante de son travail peut être confiée à une machine.

Je crois que la réunification et la reculturation de la pensée scientifique ne peuvent se faire autrement que par la dialectique des concepts, par l'assimilation critique de l'héritage philosophique, par la fécondation mutuelle des vieilles catégories et des modernes découvertes. Il va sans dire que la présente étude ne saurait apporter qu'une bien modeste pierre au vaste édifice ainsi projeté.

LES QUALITÉS PHYSIQUES

Lors du nombrement d'une collection, toutes les unités sont rendues qualitativement identiques par l'abstraction, acte propre à l'entendement. Pour prendre un exemple extrême, la collection d'objets les plus hétéroclites mise en vente à la mort de Monsieur X a pu être numérotée et par conséquent dénombrée, la qualité commune à toutes ses pièces se réduisant à l'appartenance au défunt. De même, le physicien peut nombrer les molécules d'un mélange gazeux formé de plusieurs espèces chimiques différentes, l'abstraction refoulant dans l'ombre ces différences de qualité chimique, les « oubliant ». Bien que la physique expérimentale ait accompli en parvenant à dénombrer les corpuscules microphysiques un progrès décisif, c'est cependant la mesure, méthode essentielle de quantification du monde physique, qui sera seule étudiée ici.

C'est par l'opération pratique de mesure que de la qualité physique s'extrait, s'exprime et se précise la quantité qui lui est inhérente : les grandeurs physiques sont des qualités-quantités, des qualités quantifiées. Traditionnellement, on dit que deux grandeurs ne peuvent être comparées selon la relation d'ordre $\geqslant$ ni additionnées que si elles sont « de même espèce » : ici le mot « espèce » ne signifie pas autre chose que la qualité. Une pression peut augmenter ou diminuer sans cesser d'être une pression, tandis qu'entre pression et température la différence est qualitative, les lettres p, T signifiant sous la plume du physicien cette dissemblance de qualité, cette hétérogénéité, que ma précédente notation traduirait par q_p, q_T, et des expressions comme $T > p$ ou $p + T$ étant des non-sens à cause de leur hétérogénéité.

Notons d'abord, la remarque n'est pas nouvelle, que toute mesure procède d'une théorie de l'objet physique traité et qu'elle met en œuvre un appareillage, un instrument conçu et réalisé sur la base de cette théorie. Un exemple simple en est fourni par le voltmètre : la théorie des courants électriques, l'électrocinétique, est construite sur le principe d'OHM-KIRCHHOFF et celui de la conservation de la charge électrique ; le voltmètre est une application, à la mesure des potentiels, de cette théorie. Soit dit en passant, ceci infirme aussi bien la conception positiviste, si tenace de nos jours encore dans les sciences physiques, que le réalisme naïf dont procédait la physique mécaniste et qui n'a sans doute pas encore complètement disparu. Tandis que la théorie exprime le quantum q_G de la qualité physique par un nombre réel x, la mesure pratique ne peut jamais déterminer qu'un intervalle ouvert $]r_1, r_2[$ où r_1 est le plus grand des nombres rationnels certainement trop petits pour exprimer le quantum recherché, tout au moins le plus grand que la sensibilité de l'instrument permette d'apprécier ; où mutatis mutandis, r_2 est le plus petit des rationnels certainement trop grands. Et la mesure est d'autant plus précise que la différence $r_2 - r_1$ est plus petite. Ainsi toute mesure pratique s'avère impuissante à exprimer le quantum de la qualité physique par un nombre exact, ce qui signifie que cet x « réel », physiquement, n'existe pas, est irréel et donc finalement inexact. La mesure ne peut cerner le quantum que négativement, définir ce qu'il n'est pas (il n'est ni $\leqslant r_1$ ni $\geqslant r_2$). Belle vérification de l'assertion de Spinoza «toute détermination est négation» et du rôle fondamental de la négation dans la connaissance scientifique, si méconnu par la pensée « positive » (la frontière de la Suisse n'est-elle pas aussi et peut-être surtout celle de la non-Suisse ?) La théorie mathématique de la mesure des grandeurs et par conséquent les théories physiques, fondées sur elle, se trouvent dès lors en contradiction permanente avec la mesure pratique, avec l'expérience. La théorie repose en effet sur les classes d'équivalence, c'est à dire sur l'égalité rigoureuse de deux quanta. Or la seule donnée exacte de la mesure pratique est l'inégalité ; l'expérimentateur ne conclut à l'égalité que lorsqu'il ne lui est possible d'affirmer avec son appareillage ni $q'_G > q_G$ ni $q_G > q'_G$, et cette égalité n'est jamais qu'approximative. De là découle que la théorie attribue au quantum mesuré un nombre exact, tandis que la pratique le révèle inexistant. Ainsi, en y regardant de près, on découvre que la négation et la contradiction sont au cœur de la physique « positive » bien qu'elle s'en défende avec la dernière énergie. Nous, physiciens, nous sommes trop accoutumés à ne voir entre théorie et expérience que la petite discordance quantitative qu'est l'approximation, alors qu'il s'agit bel et bien d'une contradiction de principe.

Par elle, une borne infranchissable se trouve plantée devant l'adéquation de la pensée analytique, mue par la logique classique, et dont la mathématique est à chaque époque la suprême floraison, au monde physique, et cette borne refoule du même coup la toute-puissance du principe de non contradiction. En effet, le physicien expérimentateur, faisant entrer de force la pratique dans le cadre théorique — pour simplifier les calculs, la technique — donne pour résultat de sa mesure non l'intervalle $]r_1, r_2[$ mais un rationnel intermédiaire r unique, accompagné d'une approximation chiffrée. Par exemple, s'agissant de la masse m d'un corpuscule, il énoncera $m = 1{,}67$ unités au $\frac{1}{100}$ près. Prenons donc ce discours au mot. J'ai montré dans un précédent travail [XII] qu'il permet, dans une logique formalisée à valeurs continues, d'attribuer à la proposition $m = 1{,}67$ un degré de vérité 0,99 et à la proposition $m \neq 1{,}67$ un degré de vérité 0,01. Il en résulte que la conjonction de ces deux propositions contradictoires (ou contradiction formelle) a pour valeur de vérité $0{,}99 \times 0{,}01 \simeq 0{,}01$; elle n'est donc pas fausse. C'est que le nombre réel x que la théorie attribue au quantum de la qualité physique est le produit d'une analyse abstraite poussée à l'extrême : ne serait-il pas en effet le résultat d'une mesure de précision infinie ? Et que toutes les fois que l'analyse abstraite menée jusqu'au degré requis par le principe de non contradiction s'avère impossible, le principe perd aussitôt sa légitimité. L'intervalle $]r_1, r_2[$ représente sans conteste le réduit que la nature physique défend victorieusement contre la pénétration de l'entendement pur et de sa logique par trop simpliste.

On le sait, la mesure d'une qualité-quantité G consiste en une comparaison de son quantum q_G avec un quantum q^1_G, terme de comparaison commun à tous les $q_G \in Q_G$, appelé unité et dont le choix résulte d'une convention sociale. Le nombre des unités (étalons) fixées directement par la convention (et dont le quantum est arbitraire au regard des lois physiques) on le réduit au minimum indispensable. Les autres unités (dites dérivées) sont déduites des étalons par produits et quotients. Par exemple, la vitesse v étant définie par $v = \frac{l}{t}$ (l longueur du parcours et t sa durée) l'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile qui parcourt une unité de longueur pendant une unité de temps. Il résulte de cette systématique qu'alors que l'addition n'est légale qu'entre quanta de qualité identique et que la somme reste elle aussi de même qualité, la multiplication et la division de deux quanta qualitativement distincts sont licites et engendrent un quantum de qualité nouvelle, elles déterminent un changement à la fois qualitatif et quantitatif : ainsi longueur et durée engendrent-elles par division la vitesse. La multiplication de deux quanta de même qualité produit aussi un quantum qualitativement nouveau, celle de deux longueurs par exemple un quantum d'aire. Mais leur division au contraire abolit la qualité physique et crée un nombre pur ou abstrait appelé rapport. Le rapport est un cas particulier de quotient qui s'oppose au cas général par cette abolition de la qualité au lieu de l'émergence d'une qualité nouvelle. On dit usuellement que la mesure consiste à déterminer le rapport du quantum q_G à l'unité $q\frac{1}{G}$: s'il en était littéralement ainsi, le résultat de la mesure serait un nombre abstrait : En vérité ce résultat (souligné ci-dessous) n'est pas ce rapport lui-même mais son numérateur :

$$\frac{8{,}53 \text{ mètre}}{1 \text{ mètre}} = 8{,}53 \Leftrightarrow 8{,}53 \times 1 \text{ mètre} = \mathit{8{,}53\ mètres}$$

Il apparaît plutôt comme le produit de l'unité, physiquement qualifiée, par un nombre pur. Mais ce qu'il est extrêmement important de souligner, c'est que le nombre pur, c'est-à-dire la quantité mathématique, amputée de toute qualification physique, se trouve incluse dans la quantité physique, et cela dès la naissance de celle-ci, au sein de l'opération mentale même que requiert la mesure, de sorte qu'on peut affirmer d'une intelligence incapable d'abstraire le nombre pur qu'elle ne pourrait pas non plus mesurer. Là encore, et à cause de l'implication réciproque de ses pôles, précisée plus loin, la contradiction entre quantité (physiquement) qualifiée et quantité déqualifiée ne peut être conçue par l'entendement pur mais relève de la raison dialectique.

Si les étalons changent (quantitativement mais non qualitativement) la méthode des équations aux dimensions permet de calculer le nombre nouveau qui va exprimer le même quantum. Ainsi, l'étalon de longueur devenant L fois plus grand et celui de temps T fois, l'unité de vitesse devient $V = \frac{L}{T}$ fois plus grande et cette équation est l'équation aux dimensions d'une vitesse. Un quantum de vitesse mesuré par le nombre pur v avec l'ancienne unité sera avec la nouvelle mesuré par le nombre abstrait $v' = \frac{v}{V}$ (ce qui justifie la distinction entre le quantum physique et le nombre). L'équation aux dimensions peut créer une identité qualitative artificielle, purement formelle (appelée homogénéité) en ce sens que deux grandeurs physiques ayant même équation aux dimensions peuvent s'additionner et que leur quotient est un nombre pur. Artificielle parce qu'elle prend sa source dans les conventions d'établissement du système d'unités et que par conséquent elle ne signifie pas nécessairement l'identité de la qualité physique [XIII]. Un cas de grande importance est celui de l'inertie et de la masse gravitationnelle ou pesante. L'inertie est définie en mécanique, classique aussi bien qu'einsteinienne, par le postulat cinétique suivant : quelle que soit la qualité de l'interaction (gravitationnelle, électrique, nucléaire) deux points matériels durablement au repos par rapport à un référentiel approprié (dit d'inertie) se communiquent mutuellement des accélérations simultanées, dirigées selon la droite qui les joint, de sens opposés et de modules inversement proportionnels à leurs respectives inerties. Quant à la masse pesante, elle est définie par le postulat dynamique suivant, propre, lui, à l'intéraction de gravitation : la force scalaire de cette intéraction est proportionnelle au produit des masses respectives des points matériels précédents, sous les mêmes conditions. L'expérience, sur la base de ces deux postulats, révèle alors que le rapport des inerties de deux corps est égal au rapport de leurs masses, égalité approchée comme toujours, mais extraordinairement précise ($0{,}5.10^{-8}$). D'après leurs définitions, inertie et masse sont tout aussi différentes qualitativement qu'inertie et charge électrique par exemple et c'est pourquoi leur proportionnalité exprime une loi de la nature physique, loi essentielle, sur laquelle se fonde la théorie einsteinienne de la gravitation. Or il se trouve que dans les systèmes d'unités en usage on a adopté comme étalon d'inertie l'inertie d'un certain corps conventionnellement choisi et comme étalon de masse la masse de ce même corps ; qu'en outre on a donné à ces deux unités le même nom. Le résultat c'est que dans le formalisme physique usuel non seulement inertie et masse ont même équation aux dimensions mais que, proportionnelles, elles sont toujours chez un même corps mesurées par le même nombre ; en somme, ces deux grandeurs sont purement et simplement confondues, en qualité et quantité, dans une seule. Que deviennent dès lors et leur altérité et la loi fondamentale de leur proportionnalité ? Elles se sont volatilisées. Le formalisme y gagne une simplification d'écriture — économie, rentabilité — mais au prix d'un irrespect grave de la vérité physique. Prenons un exemple : un pendule simple pesant, de longueur l, inertie i, masse m, oscille dans un champ de gravitation uniforme d'intensité g avec une pulsation ω. Compte tenu de l'hétérogénéité de i et de m, la loi dynamique des oscillations devrait s'écrire :

$$\omega^2 = \frac{mg}{il} = \mu\frac{g}{l}$$

au lieu de l'usuelle écriture $\omega^2 = \frac{g}{l}$; μ, constante universelle, serait le quotient (qualifié, non le rapport) de la masse d'un corps quelconque par son inertie. Le choix actuel des étalons entraîne $\mu = 1$ où 1 est un nombre pur et fait disparaître la qualité-quantité μ des formules, qui demeurent ainsi quantitativement exactes mais deviennent qualitativement fausses. On saisit ici sur le vif cette préoccupation exclusive de la quantité, alors que la catégorie supérieure est la qualité, cette prédominance du calcul, de l'opération sur le concept, qui marquent le discours habituel des sciences exactes.

Toujours au sujet des équations aux dimensions, il n'est pas sans intérêt de réexaminer la traditionnelle opposition entre grandeurs intensives et grandeurs extensives, que la thermodynamique continue toujours d'ailleurs de prendre en considération. Une qualité-quantité G est intensive si la soustraction fait émerger une qualité nouvelle γ, $q'_G - q_G = q''_\gamma$ et la grandeur γ, qui n'a plus cette propriété, est alors extensive (d'où il résulte immédiatement que toute différence et donc toute différentielle est extensive, que la grandeur différenciée le soit ou non). C'est ainsi qu'en appelant niveau d'un lieu sa distance au centre de la terre, la différence de niveau n'est plus un niveau, celui-ci est une intensité, la dénivellation une extensité. De même, la date ou l'heure sont intensives mais la durée extensive. On le voit, c'est l'origine, le zéro qui détermine l'opposition. C'est pourquoi la température, dont le zéro est fixé par la nature, est une grandeur par excellence intensive, la différence de deux températures ou échauffement n'étant plus une température. Au contraire, la différence de deux échauffements demeurant un échauffement par suite de l'homogénéité de l'addition, $(T_1 - T_2) - (T_3 - T_4) = (T_1 - T_3) + (T_4 - T_2)$ cette grandeur est extensive. C'est elle qui détermine la perception thermique : un corps étant en contact avec notre peau, si la température de l'un est supérieure à celle de l'autre nous éprouvons la sensation de chaud et dans le cas inverse celle de froid, ce qui concrétise bien l'altérité entre échauffement et température. L'opposition est, encore une fois, dialectique, contradictoire. Exclusion réciproque de ses pôles : ou bien la soustraction engendre une qualité nouvelle, ou bien non. Inclusion ou implication mutuelle : la notion d'échauffement contient (dans sa définition) celle de température ; celle-ci implique à son tour l'échauffement puisque la soustraction est inhérente au concept de la quantité. Conversion réciproque : lorsque l'échauffement d'un corps part du zéro absolu, il s'identifie avec la température ; lorsqu'on adopte comme zéro (artificiel) la glace fondante, ce qui dans l'échelle absolue était un échauffement partant de la glace fondante devient une température et la température absolue un échauffement. Alors que l'entendement cloisonne et cristallise les notions opposées, la raison dialectique rétablit leur interpénétration et leur fluidité réelles. L'algorithme physique cependant ne peut pas prendre en charge la nuance qualitative entre une intensité et une extensité parce que ce serait rompre l'homogénéité de l'addition : $q'_G - q_G = q''_\gamma \rightarrow q_G + q''_\gamma = q'_G$. Aux grandeurs G et γ il affecte donc la même équation aux dimensions et le même nom d'unité, bref la même qualité. On ne saurait lui en faire reproche mais le discours non mathématique, lui, peut et donc doit préciser la nuance, notamment en thermodynamique.

En regard du flux mouvant, d'une infinie complexité des processus physico-chimiques, les qualités physiques que la pensée analytique en extrait, comme le chimiste l'eau pure de l'eau de mer, sont abstraites. Abstraction nullement arbitraire ni même purement idéale puisqu'elle se fonde sur l'expérimentation, que les appareils de mesure notamment, chacun propre à une qualité-quantité, constituent des analyseurs matériels outillant et vérifiant le travail de l'entendement. Abstraction vraie donc — mais jusqu'au réduit de l'approximation seulement, donc aussi en partie fausse. Parmi ces qualités l'une des plus générales est l'énergie. L'analyse oppose d'abord le système physique, ensemble fini de corps ou corpuscules comprenant toutes leurs actions réciproques, à sa négation, le milieu extérieur. Elle postule ensuite que dans le cours des transformations du système, il est possible de définir des états successifs (qui sont des régimes de mouvement plutôt que des moments d'immobilité) deux états successifs définissant complètement un changement. Trois autres postulats, relatifs à l'additivité, la conservation et l'équation aux dimensions, achèvent de définir ladite énergie. Quelle que soit leur diversité qualitative — changements mécaniques, thermiques, chimiques, électriques, nucléaires, macroscopiques comme microphysiques — presque tous les changements matériels sont doués de cette qualité, l'énergie, et de ce fait peuvent être comparés quantitativement par la relation d'ordre $\geqslant$, additionnés et mesurés. La notion d'énergie représente une conquête primordiale de la pensée physique : grâce à elle on peut mesurer avec une même unité l'élévation d'un fardeau, l'échauffement d'un logis, une explosion nucléaire ou la digestion d'un aliment. Quand on considère ainsi l'énergie comme qualité-quantité commune aux changements, leurs altérités sont abolies « oubliées » par l'abstraction et il s'agit alors de l'énergie pure, abstraite, que je désignerai par e. Mais il n'en va pas de même pour une fonction-énergie E_j dont la variable est un état qualifié j du système. En premier lieu, la qualité physique des variables n'est pas la même selon celle de l'état, pour l'état mécanique et l'état chimique par exemple. En second lieu, la fonction. qualité-relation qui détermine l'énergie E_j à partir de ces variables, est elle aussi autre. Ainsi une fonction-énergie $E_c(v) = \frac{1}{2} i v^2$ qualifiée de cinétique est appliquée en mécanique classique à la vitesse, à « l'état de vitesse » v dans la translation d'un solide d'inertie i, l'énergie d'un changement de vitesse (v_1, v_2) valant $E_c(v_2) - E_c(v_1)$. Mais une autre fonction-énergie $E_\theta(T) = CT$ qualifiée de thermique est appliquée à la température T d'un gaz (raréfié) de capacité calorifique C. L'épithète (cinétique, thermique) qui dans le langage courant de la physique suit le substantif « énergie » exprime la qualité de l'énergie-fonction, qui n'est autre concrètement que celle du changement auquel ladite fonction se rapporte. Cette épithète exprime donc une qualité de qualité, une qualité seconde. Mais avec la fonction-énergie totale E du système (proportionnelle selon la loi d'Einstein-Langevin à son inertie) la déqualification, l'énergie pure apparaissent derechef, cette fonction laissant en effet ouvertes toutes les possibilités qualitatives de changement du système sans s'attacher à aucune en particulier. Elle se présente dans l'algorithme comme la somme des énergies-fonctions qualifiées : or, ceci est en contradiction avec l'homogénéité de l'addition, ce pilier structural de la quantité. La contradiction est résolue en donnant à l'énergie une équation aux dimensions unique et une seule dénomination à son unité de mesure, indépendantes de la qualité seconde, sans empêcher toutefois celle-ci de se manifester comme il a été dit plus haut : par la qualité physique des variables d'état et par la qualité mathématique de la fonction qui leur est appliquée. Ce qui est critiquable dans le discours analytique usuel, ce n'est donc pas cette heureuse solution mais que le problème soit passé généralement sous silence.

La physique d'ARISTOTE propose une célèbre classification quaternaire des mouvements (où le sens de ce mot transcende la mécanique) : 1. mouvement local ou changement de lieu (objet de la mécanique) ; 2. augmentation – diminution (changement quantitatif) ; 3. altération ; 4. génération – corruption, les deux dernières classes se confondant pour nous modernes dans le changement qualitatif. Celui-ci, qui consiste à la fois dans l'abolition d'une qualité et l'émergence d'une qualité nouvelle, ne saurait pour un physico-chimiste recéler je ne sais quel mystère, car il se manifeste partout dans la matière inanimée. Lorsque la trajectoire d'un électron, d'abord rectiligne, s'incurve entre les armatures d'un condensateur, il se produit un changement mécanique qualitatif : le passage de la droite à la courbe, du mouvement libre de toute action dynamique au mouvement influencé par celle des armatures du condensateur. La transformation d'un liquide pur en vapeur, en gaz est un changement thermique qualitatif, tandis que le simple échauffement du liquide accompagné de dilatation, au contraire, est un changement thermique quantitatif. Par excellence, les métamorphoses chimiques ou nucléaires sont qualitatives : qu'un mélange gazeux d'oxygène et d'hydrogène se convertisse en vapeur d'eau et les espèces (qualités) chimiques qui le constituent disparaissent tandis qu'une nouvelle est créée. L'expression consacrée « transformation de l'énergie » n'évoque pas autre chose que le changement qualitatif : précisons-en le contenu. En mélangeant par exemple deux solutions diluées de HCl et de NaOH, il s'accomplit deux changements synchrones et deux seulement, l'un chimique, la combinaison ionique $H^+ + OH^- \rightarrow H_2O$, l'autre thermique, l'échauffement du mélange avec dilatation. En tant que qualité commune à toute espèce de changement, chez ces deux l'énergie pure e est identique en qualité comme en quantité (pourvu qu'ils ne s'accompagnent d'aucune modification du milieu extérieur, ce qui est supposé ici) et c'est en cette identité que réside la conservation. Cependant, dans l'algorithme, l'énergie pure du changement chimique s'exprime par un nombre négatif, celle du changement thermique par un nombre positif ; cette opposition, physiquement, signifie que l'un est exo-énergétique, l'autre endo-énergétique et elle se ramène à celle de la diminution et de l'augmentation, de la perte et du gain, la diminution affectant la fonction-énergie chimique E_k du système, l'augmentation sa fonction-énergie thermique E_θ, la première ayant perdu un quantum e_k, la seconde gagné un quantum équivalent e_θ dans le même temps. De sorte qu'en définitive le même quantum e d'énergie pure a perdu la qualité seconde chimique k pour acquérir la qualité seconde thermique θ : voilà en quoi consiste exactement le changement qualitatif, la transformation de l'énergie. En revanche, la fonction-énergie totale du système est demeurée inchangée, qualitativement et quantitativement, et c'est là un autre aspect de la conservation. Tel est me semble-t-il le contenu essentiel du concept de l'énergie (en laissant de côté l'énergie échangée avec le milieu extérieur). Or, les exposés académiques insistent sur la conservation, donc sur la quantité : le principe énergétique fondamental n'y est-il pas nommé « principe de conservation de l'énergie » ? Quant aux précisions qualitatives du concept, aux oppositions (dialectiques donc contradictoires) qui le structurent — énergie grandeur et énergie fonction, énergie pure et énergies qualifiées, conservation quantitative et transformation qualitative — elles sont absentes, ou à peine effleurées.

Ces quelques réflexions sur les qualités physiques, très loin d'épuiser le sujet, sont suffisantes cependant comme préparation à l'étude de la qualité mathématique et de l'infini.

LES QUALITÉS MATHÉMATIQUES

Si la grandeur physique est abstraite au regard de l'objet physique, elle est concrète par rapport à la quantité mathématique, produit d'une abstraction seconde qui rejette la gangue des qualités physiques pour en tirer le nombre pur appelé si légitimement nombre abstrait. L'opposition entre celui-ci et le nombre concret qui exprime la quantité physique est dialectique. Exclusion réciproque : au niveau du formalisme, de l'entendement, ou bien un nombre est suivi d'un nom d'unité physique et il est concret, ou bien non et il est pur. Inclusion réciproque : j'ai montré que la mesure pratique n'élabore le nombre concret que par la nécessaire médiation du nombre abstrait, celui-ci compose donc le concept de celui-là ; réciproquement, lui-même étant extrait de l'ensemble des quantités concrètes, elles entrent de ce fait dans son propre concept, du moins au niveau de la raison synthétique, mue par ce principe fondamental de ne jamais oublier sa propre genèse, de l'assumer au contraire à tout moment ; j'ai affirmé qu'une intelligence incapable de s'élever jusqu'au nombre pur ne saurait mesurer (comme il en est de ces peuples qui emploient des vocables différents pour dire trois arbres, trois bœufs, etc...) mais inversement, des hommes qui n'effectueraient jamais des mesures pratiques de qualités-quantités diverses (physiques, économiques, etc...) n'accèderaient jamais au nombre pur ; quantité mathématique et quantité non mathématique s'impliquent donc bien mutuellement. Conversion réciproque enfin : la division d'un nombre concret par l'unité physique le transforme en nombre pur et la multiplication de celui-ci par celle-là effectue le changement inverse.

Une fois éliminée la qualité physique, la quantité se trouve-t-elle dégagée vraiment à l'état pur, le dipôle est-il enfin désuni ? Il n'en est rien : comme dans les fragments de l'aimant brisé, il se reforme toujours. Le monde des nombres abstraits offre en effet une riche floraison de qualités nouvelles — mathématiques. En s'en tenant au nombre né plus ou moins médiatement de la mesure ou du comptage, que d'épithètes — entier, pair, impair, premier, rationnel, irrationnel, réel, algébrique, transcendant, positif, négatif — expriment ses précisions qualitatives. La parité par exemple dans la suite indéfinie 2, 4, 6, 8... est bien qualité, puisqu'à travers les différences quantitatives des termes successifs elle se maintient identique chez tous. HEGEL [III] souligne qu'un nombre rationnel (tel $\frac{1}{2}$) en tant que quotient commun à une infinité de divisions ($\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ ...) dont dividendes et diviseurs diffèrent quantitativement est une qualité-relation, tout en étant aussi une quantité (il peut notamment exprimer un quantum physique) de sorte que cet être mathématique si simple unit en lui qualité et quantité, renferme le dipôle tout entier. Cette métempsycose de la qualité, renaissant sous la forme mathématique après sa disparition sous la forme physique, ne doit pas étonner : au cœur même de la catégorie de quantité niche, ai-je montré, la qualité ; en extrayant de la grandeur physique la quantité, on emporte donc avec celle-ci la qualité qui lui est inhérente et qui n'est autre que la qualité mathématique.

Loin de moi la pensée de mésestimer la méthode axiomatique, aventure logique audacieuse dont l'œuvre imposante demeurera sous une forme ou une autre. Mais la vérité exige de reconnaître que — et là sont sa limite et sa faiblesse — son discours jusqu'ici ne dépasse pas le niveau de l'entendement ; bien au contraire, il s'y verrouille alors que les mathématiques anciennes, analytiquement moins rigoureuses, restaient plus ouvertes. Après les coups de boutoir de GÖDEL (principalement) des limites et des faiblesses, cachées dans les postulats, dans la métamathématique, ont été mises à jour comme on sait par nombre de logico-mathématiciens — à leur façon, qui demeure analytique. J'en essaierai quant à moi une autre : la dialectique, en me bornant comme pour la physique au dipôle qualité-quantité et seulement à quelques thèmes de réflexion.

Les quatre premiers postulats de PEANO veulent fonder un ordre de succession, dit naturel, des nombres entiers. Mais — c'est l'objection de RUSSELL et je l'estime irréfutable — ces principes définissent seulement un type d'ordre, celui de n'importe quelle suite « bien ordonnée » (dont un terme et un seul est dépourvu de prédécesseur) sans répétition d'aucun terme et indéfinie (dont tout terme a un successeur) par exemple, la suite $\frac{\sqrt{1}}{2^2}, \frac{\sqrt{2}}{3^2}, \frac{\sqrt{3}}{4^2}$ ... Ce type d'ordre est bien celui de la suite naturelle des entiers mais il ne lui appartient pas en propre. En tout cas, rien de quantitatif jusqu'ici : l'ordre est une qualité-relation. La quantité ne se construit qu'après, avec les postulats qui définissent l'addition et desquels se déduit la relation d'ordre quantitatif $>$. Alors seulement le nombre entier se trouve constitué comme tel, avec ses deux pôles, le qualitatif ou ordinal et le quantitatif ou cardinal. Or, il apparaît, à ce moment, que l'ordre naturel n'était autre que l'ordre des quantités croissantes, que la suite naturelle forme une progression arithmétique, où chaque terme est engendré par l'addition d'une unité à son prédécesseur. Pour la raison dialectique, ordination et cardination doivent s'interpénétrer inséparablement : mais n'est-ce pas ce que démontre (entre ses lignes) la reconstruction de PEANO ? Le postulat principal de l'addition dit en effet que si $m + n = p$, alors l'addition à m du successeur de n a pour résultat le successeur de p. La cardination renferme donc dans son concept l'ordination naturelle, et réciproquement, celle-ci se fait par la relation $>$ qui est foncièrement quantitative, cardinale et c'est pour cela que séparée par PEANO de la cardination, l'ordination se rétrécit en un type d'ordre général, abstrait, qui n'est pas propre à la suite naturelle des entiers. Même interpénétration, du reste, chez les nombres transfinis où plusieurs théorèmes constitutifs de la cardination exigent, pour être complètement démontrés, le postulat du choix et même le théorème du bon ordre et où deux ensembles de même type d'ordre ont à fortiori même cardinal. Cependant, la suite naturelle des entiers est utilisée à représenter l'ordre de toute autre suite de même type, à numéroter ses termes, même si le prédécesseur y majore le successeur, même si ces termes sont des objets matériels disparates entre lesquels la comparaison quantitative n'a pas de sens. Et c'est en devenant ainsi numéro que l'entier exerce sa fonction ordinale, celle d'un opérateur d'ordination, mais cela, encore une fois, dans les suites autres que la sienne propre. Le discours spécialisé énonce alors que dans cette dernière l'opérateur d'ordination est l'entier lui-même : pour moi, il dit là une tautologie et, au niveau de la pensée, une tautologie est une forme vide de tout contenu. C'est dans l'algorithme tout au plus qu'elle peut, comme pour le signe « égale » dans $x = x$, marquer la limite extrême, asymptotique de l'emploi légal d'un symbole d'équivalence, mais alors que $x = y^2$ exprime une relation, $x = x$ s'avère un néant sémantique.

Du cardinal et de l'ordinal, quel est le caractère dominant ? Les entiers faisant partie des nombres réels, qui ne sont pas des opérateurs d'ordination, j'opterais déjà, sans quitter la mathématique courante en faveur de la cardination : entier ou non, le nombre est l'expression la plus raffinée de la quantité et là réside son essence. Ce qu'on pourrait formuler aussi en disant que si les grandeurs physiques sont de qualités quantifiées, les nombres purs sont des quantités qualifiées, notamment les entiers des quantités discrètes, discontinues ou quotités et les nombres réels des quantités continues. Cette option, le dénombrement et la mesure pratiques, qui ont pour fin l'extraction et l'expression de la quantité physique, la confirment et la garantissent, car une mathématique s'élevant jusqu'à la pensée synthétique de son objet et de soi ne peut pas ne pas englober les racines qu'elle plonge au sein de l'expérience, de la vie, de l'histoire et sans lesquelles elle n'aurait jamais existé. C'est parce qu'il sectionne ses racines vitales que l'entendement analytique encourt constamment la menace de se perdre dans la spéculation.

L'arithmétique usuelle présente la suite naturelle $\{0, 1, 2, 3...\}$ comme l'ensemble (bien ordonné) des nombres entiers ; notamment, elle considère zéro et un comme des éléments homogènes aux autres. Certes, elle reconnaît à zéro comme à un des propriétés distinctives, mais après tout à 100 ou 1437 aussi, je veux dire qu'elle accorde à la qualité propre à l'ensemble, celle de nombre entier, la précellence. Et pourtant, le zéro ne s'oppose-t-il par radicalement à tous les autres éléments en ce que les uns expriment des quantités et l'autre l'abolition, l'anéantissement de ladite quantité ? Et du même coup, s'agissant d'une grandeur physique, l'anéantissement de la qualité elle-même ? L'intensité d'un courant électrique nulle, cela veut dire en effet, qu'il n'y a pas de courant du tout. Dans la numération décimale un zéro au rang des centaines signifie l'absence de centaines ; le changement quantitatif (et aussi bien le changement de qualité mathématique) que promeut l'addition, zéro l'abolit : $n + 0 = n$; dans la multiplication, il joue comme opérateur d'anéantissement de toute quantité $n : n \times 0 = 0$. Une opposition aussi fondamentale, le discours spécialisé la tait, la recouvre pudiquement sous l'appellation (fade, feutrée, châtrée) d'« élément neutre de l'addition » donnée au zéro. Pourquoi ? A mon sens, parce que toute opposition renferme une contradiction potentielle que précisément la pensée dialectique peut à tout instant rendre actuelle et déployer au grand jour, d'où sans doute le péril dont l'entendement se sent menacé et qui le fait se réfugier dans le cocon du génie opératoire. En effet, si l'essence du nombre consiste dans la quantité alors le zéro n'en est pas un, lui qui symbolise le non-être de la quantité, son néant. Et pourtant il en est un, il s'identifie aussi aux nombres. En quoi ? En ce qu'il entre comme eux et avec eux dans la ronde des opérations et d'abord dans les deux fondamentales, l'addition et la multiplication, se pliant à leurs règles ; il y joue un rôle singulier certes, mais il y entre. Ce sont ces deux opérations qui concretisént l'identité de la quantité et de la non-quantité — inconcevable pour l'entendement mais familière à la dialectique — qui constituent donc la qualité propre à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3...\}$ sa structure générale, et en définitive la vérité de l'arithmétique courante. Mais la vérité suprême, c'est cette contradiction héraclitéenne «zéro est et n'est pas un nombre» qui la dit : comme toute pensée vivante, la pensée mathématique — mais par-delà, au-dessus de l'algorithme — se rallie à la raison dialectique [VI]. L'erreur de l'arithmétique usuelle, c'est d'octroyer au seul pôle positif de la contradiction le droit de citer alors que c'est le négatif l'essentiel, que le zéro signifie par excellence la non-quantité et secondairement seulement s'identifie aux nombres par et dans les opérations. Je le disais bien : à niveler les oppositions, l'entendement finit par se cantonner dans l'intellect opératoire, cette pseudo-pensée.

Le symbole $\varnothing$ appelle des jugements analogue. Sa dénomination d'ensemble vide apparaît, posée au sein de la pensée analytique pure, comme contradictoire, absurde (et c'est pourquoi j'emploierai plutôt le mot « vacuum »). Par-dessus tout, le vacuum signifie le non-être de l'ensemble ; $A \cap B = \varnothing$ veut dire qu'il n'est pas d'ensemble-intersection de A et B. Mais de même que le non-être d'un homme, son cadavre, conserve une identité avec lui (l'anatomie) de même le vacuum, comme néant non de n'importe quoi mais d'un ensemble, demeure identique à celui-ci et cette (mince) identité consiste dans la participation au jeu opératoire.

Le concept du zéro contient d'ailleurs d'autres contradictions. En qualifiant de stricts les nombres rationnels appartenant à l'intervalle [0,1] posons $r + r' = r''$; si r et r'' sont des rationnels stricts, alors r' l'est aussi et cette addition est homogène quant à la qualité «rationnel strict» Appliquée à $r + O = r$, cette homogénéité entraîne que zéro est un nombre rationnel. Si i et i' sont des racines $\frac{1}{n}$ irrationnelles du genre r et si $i + x = i'$, alors x est un nombre irrationnel; appliquée à $i + 0 = i$ cette homogénéité conduit à la conclusion que zéro est un nombre irrationnel. De sorte qu'en tant que nombre, le voilà à la fois entier et non entier, rationnel et irrationnel, et encore algébrique et transcendant, réel et imaginaire : son concept se tisse de contradictions vraies.

Il en est de même du 1. Lui aussi s'oppose à tous les entiers (autres que zéro) en ce qu'il signifie l'unité et eux la pluralité. L'unité se distingue de l'unique : dans le système solaire le soleil est unique et ne saurait se nombrer, tandis que parmi les planètes la terre est une unité. Donc l'unité n'a de sens que dans une pluralité et celle-ci que comme collection d'unités : l'opposition est éminemment dialectique. Or cette antique contradiction, qui nous vient de la philosophie grecque, demeure bien vivante dans la mathématique moderne pour peu qu'on sache l'y dénicher. Seul en effet le un n'est pas le cardinal d'une collection ; seul il transforme par addition un entier en son successeur ; seul il anéantit le changement quantitatif (et aussi qualitatif) que normalement engendrent la multiplication et la division : $n \times 1 = n$, $n : 1 = n$; seul il est facteur premier de tous les entiers, zéro compris. Voici une autre contradiction vraie, enclose dans son concept : comme entier, il est unité mais comme nombre rationnel il peut aussi signifier une multiplicité : 1 millimètre = 1000 microns, $1 = 0{,}1 \times 10$. En voici encore une. Reprenons les rationnels stricts de l'intervalle $[0,1]$. Chacun est défini par une expression fractionnaire mais certains seulement peuvent recevoir une expression basale, c'est-à-dire reposant sur une base de numération et comportant un nombre fini de chiffres. Ainsi $\frac{3}{4}$ peut s'écrire aussi 0,75 en base 10 : je le dirai basal ; $\frac{2}{3}$ au contraire est non basal dans le système décimal mais basal lorsque la numération prend pour base 6 : alors en effet $\frac{2}{3} = 0{,}4$. Pour qu'un rationnel soit basal, il faut et il suffit que le dénominateur de son expression fractionnaire ne contienne pas de facteur premier autre que ceux de la base. Selon ces définitions, $\frac{0}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} = 1$ sont basaux dans tous les systèmes de numération et ceci concorde en particulier avec le fait que 1 est facteur premier de n'importe quelle base. D'un autre côté, tout rationnel non basal est la limite d'une suite infinie de rationnels basaux ; pour une classe de rationnels non basaux, appelés périodiques, les termes successifs de la suite s'engendrent par la répétition d'un même groupe de n chiffres appelé période et que je désignerai par p. Par exemple en base 10, $\frac{2}{3}$ est la limite de la suite 0,6 — 0,66 — 0,666 — ... où $p = 6$ et $n = 1$ et $\frac{38}{111}$ la limite de la suite 0,342 — 0,342342 — 0,342342342 — ... où $p = 342$ et $n = 3$. L'expression fractionnaire f du rationnel non-basal périodique se déduit alors de p, de n et de la base b par la relation

$$f = \frac{p}{b^n - 1} \qquad (1)$$

Or, si p est le chiffre b–1, on a alors $n = 1$ et (1) conduit à $f = \frac{1}{1} = 1$, quelle que soit b. Par exemple, 1 = limite 0,999... en base 10 et 1 = limite 0,555... en base 6. De ce que cette relation (1) est propre aux rationnels non-basaux périodiques, qu'elle n'a aucun sens pour les basaux, il résulte donc que 1 fait partie intégrante et ce dans tout système de numération, des nombres non basaux, alors qu'il est aussi bien basal dans tout système : telle est la contradiction vraie annoncée. Comme le zéro, le 1 ne s'identifie avec les autres nombres entiers que par son obéissance aux règles opératoires ; essentiellement, il s'oppose à eux. La notion d'ensemble ne contenant qu'un seul élément tombe d'ailleurs sous la même critique.

Le signe = dont j'ai déjà noté l'aspect tautologique mérite aussi réflexion. On lit dans les traités que deux nombres (réels par exemple) doivent être unis par une et une seule des trois relations d'ordre $x_1 > x_2$, $x_1 = x_2$, $x_2 > x_1$. Or, dans l'ensemble des nombres réels, chacun ne figure qu'à un seul exemplaire, il est donc impossible d'en trouver deux égaux, de sorte que la proposition $x_1 = x_2$, où les indices 1 et 2 différencient les deux nombres, est contradictoire, et cette fois-ci la contradiction est fausse dans ce contexte ensembliste où seule la tautologie $x = x$ est licite — mais vide. Où réside donc la vérité de $x_1 = x_2$? D'abord dans la mesure pratique : x_1 et x_2 sont les expressions (idéales) de deux quanta d'une même qualité physique, mais prédicable à deux objets distincts, ou à un même objet mais à des heures différentes. Ensuite, dans la mathématique, en ce que l'un au moins des deux membres de l'égalité doit formuler une opération, plus généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, c'est-à-dire une qualité-relation. Ainsi, $x^2 + 3x + 1 = y$ signifie que l'opération ou fonction figurant au premier membre a pour résultat le nombre y, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ signifie que les deux opérations ou fonctions $f(a, b)$ et $g(a, b)$ qualitativement différentes qui forment les deux membres ont pour résultat *le même* nombre (et non deux nombres égaux). Où l'égalité se réduit encore à une tautologie, c'est lorsqu'on résume en une seule lettre, et on le fait souvent en mathématiques pour alléger l'écriture, une expression compliquée, comme dans cette phrase : « posons $u = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$ ». Mais il n'en va pas de même en physique lorsqu'on pose la définition de la vitesse $v = \frac{l}{t}$ parce que la lettre v devient signifiante d'une qualité physique nouvelle. Ni non plus en mathématiques lorsque l'un des membres exprime un général et l'autre une détermination particulière de ce général, par exemple dans $x = 4$ ou $f(x) = \cos x$, parce qu'alors les deux membres s'opposent comme particulier et général. Bref, l'égalité quantitative ne peut être pensée, comprise dans ses très diverses acceptions hors de sa connexion avec la qualité : elle exige d'abord, sous peine de sombrer dans la tautologie, l'altérité de ses deux membres. Mais d'un autre côté il faut aussi qu'ils appartiennent à une même qualité. En physique, ils doivent exprimer deux quanta d'une même grandeur ou tout au moins avoir même équation aux dimensions. En mathématiques, un entier ne peut égaler un non entier, un rationnel un irrationnel, un nombre réel un nombre imaginaire, un scalaire un vecteur, un ordinal entier un ordinal transfini, etc... De sorte que finalement l'égalité quantitative non tautologique doit répondre à l'exigence contradictoire d'homogénéité et d'hétérogénéité. On cherchera en vain ces précisions conceptuelles dans les traités académiques : on y apprend seulement à opérer avec le signe $=$, on y étudie bien sa syntaxe, mais non sa sémantique.

Addition et multiplication de deux nombres réels sont deux fonctions de deux variables, donc deux qualités relationnelles, mais privilégiées en tant que structurantes pour l'ensemble des réels, que cellules-mères d'innombrables autres fonctions. Il importe, au passage, de souligner qu'elles structurent aussi la mesure pratique car ce n'est là nullement une rencontre de hasard. Je retiendrai ici le fait qu'elles déterminent quatre fonctions fondamentales d'une seule variable x qui sont, a désignant une constante,

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$ f fonction linéaire, $f(x) = ax$

$f(x_1\, x_2) = f(x_1) . f(x_2) \Leftrightarrow$ f fonction potentielle, $f(x) = x^a$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) . f(x_2) \Leftrightarrow$ f fonction exponantielle $f(x) = a^x$

$f(x_1\, x_2) = f(x_1) + f(x_2) \Leftrightarrow$ f fonction logarithmique, $f(x) = \mathrm{Log}x$.

Les deux premières appartiennent à la classe des fonctions algébriques, les deux dernières à la classe des fonctions transcendantes. Ces épithètes adjointes au substantif « fonction » sont des prédicats d'une qualité-relation : eux-mêmes sont-ils des qualités ? Oui, puisque définis par des relations (fonctionnelles) mais cette manière de voir se confirmera et précisera au cours de l'étude de l'infini.

Je terminerai ce chapitre par l'opposition des nombres positifs et négatifs. Pour en asseoir la théorie sur ses fondements vrais, c'est à la source, à la mesure pratique que tout d'abord je remonterai. On objectera que l'invention des nombres négatifs surgit en Europe au sein de l'algorithme même ? Certes, mais leur application aux grandeurs concrètes fut presqu'immédiate ; mais longtemps auparavant ils avaient été conçus par les arithméticiens indiens pour exprimer le passif en comptabilité, et le savoir de l'Inde, les Arabes l'avaient transmis aux Européens. En réalité, le lien entre mesure pratique et théorie des nombres n'est nullement fortuit mais nécessaire, organique : ne relève de la contingence historique que le bout, mathématique ou non, par lequel une découverte a commencé. Le nombrement d'une collection d'objets concrets, moutons ou molécules, la mesure pratique d'une qualité concrète simple G telle qu'une longueur, un volume (dans un espace non orienté) une masse, une durée, etc... produisent un nombre dit naturel, entier pour la collection, réel pour la mesure (idéale) de la qualité. Le réel naturel, que je désignerai par $|x|$, n'est ni positif ni négatif, ces qualités mathématiques lui sont étrangères, aussi me garderai-je de l'identifier au nombre positif. De l'opposition positivité-négativité la racine concrète se trouve dans les qualités physiques G qui présentent nécessairement l'une ou bien l'autre de deux qualités secondes α et β. Exemples : G est la latitude d'un point-variable M de la terre, α signifie que M se situe au nord de l'équateur, β qu'il se situe au sud ; G est la charge électrique d'un corps ou corpuscule, α et β désignent les qualités opposées de l'électricité que (désireux d'éviter les mots « positive » et « négative ») j'appellerai protonique et antiprotonique ; G est le volume d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs, α et β expriment les deux seules orientations possibles du trièdre que forment ces vecteurs ; G est la force scalaire d'une intéraction dynamique, α représente l'attraction et β la répulsion ; etc... La mesure pratique ne peut évidemment porter que sur l'une ou bien l'autre des qualités composées $G\alpha$ et $G\beta$ puisque G isolée n'existe pas physiquement. Pourtant, dans le nombre concret donné pour résultat, seule la qualité G est signifiée par un nom d'unité : on n'exprime pas une charge protonique en coulombs et une charge opposée en anticoulombs mais l'une et l'autre en coulombs, une répulsion en newtons et une attraction en antinewtons mais l'une et l'autre en newtons. Traitées comme physiquement mineures, les qualités secondes α, β se voient (comme celles de l'énergie) refuser le droit à un nom d'unité qui les signifierait en propre, mais c'est alors la mathématique qui les prend en charge. Au nombre abstrait qui compose le résultat de la mesure, on attribue l'une ou bien l'autre des qualités mathématiques p (positif) et n (négatif) le choix entre la signification de α par p et β par n ou de α par n et β par p étant d'ailleurs parfaitement arbitraire. De sorte que par exemple les nombres abstraits positifs $|x|_p$ suivis du nom de l'unité de G exprimeront les quanta qG_α tandis que les négatifs $|x|_n$ suivis du même nom exprimeront les quanta qG_β. Quant aux réels naturels $|x|$ suivis toujours du même nom, ils exprimeront évidemment les quanta qG, qui sont abstraits par rapport aux qG_α et qG_β seuls existants physiquement. Les symboles p et n se manifestent donc comme des *qualificateurs* mathématiques des nombres naturels $|x|$ laissant inchangée la quantité que ces derniers représentent. Et l'on voit que positif et négatif constituent une opposition qualitative abstraite, la pensée analytique ayant relégué dans l'ombre de l'oubli la diversité physique extrême des dipôles ($G\alpha$, $G\beta$) pour ne retenir que l'opposition à l'état pur. Dans la méthode usuelle de construction mathématique des nombres qualifiés, qui se fonde sur l'isomorphisme avec les couples de nombres naturels (elle opère avec les entiers mais le pourrait tout aussi bien avec les réels naturels) cette opposition abstraite s'exprime par celle des ordres opposés, le couple (k, l) étant l'opposé du couple (l, k).

Autre qualificateur, l'opérateur d'opposition, que je désignerai par une astérisque et qui transforme un nombre qualifié x en son opposé x^*. Sans préciser ici comment la théorie des couples les justifie, je retiendrai seulement la commutativité de l'addition des nombres qualifiés et la relation fondamentale

$$x + x^* = 0 \qquad (2)$$

où le zéro est celui des nombres naturels. On déduit immédiatement de (2) que $x = y \Leftrightarrow x^* = y^*$; de (2) et de la commutativité, que $x^{**} = x$, que $x - y = x + y^*$ (soustraire un nombre qualifié équivaut à additionner son opposé) et que $(x + y)^* = x^* + y^*$. De cette dernière relation, il s'ensuit que si n désigne un entier naturel, $(nx)^* = n\, x^*$, expression généralisée au cas où n est remplacé par un réel naturel λ. Conclusion, l'opérateur d'opposition est linéaire. Dès lors, l'opposé de $|x|_p$ ne peut que revêtir la forme $\lambda|x|_n$ et réciproquement l'opposé de $|x|_n$ la forme $\lambda\, |x|_p$ et il s'ensuit, conformément à (2) et à la commutativité,

$$|x|_p + \lambda|x|_n = |x_n| + \lambda|x|_p \Longrightarrow \lambda|x|_p + \lambda^2|x|_n = |x|_n + \lambda|x|_p$$

d'où nécessairement $\lambda = 1$. Ainsi, l'opposé de $|x|_p$ est $|x|_n$ et réciproquement : le changement qualitatif de x à x^* n'est accompagné d'aucun changement quantitatif, l'opérateur d'opposition agit bien comme un pur qualificateur.

Sur les fondements ainsi posés, la vérité des règles du calcul sur les nombres qualifiés apparaît me semble-t-il en toute clarté. Si i désigne l'un des qualificateurs p ou n indifféremment, on doit avoir

$$|x|_i + |y|_i = (|x| + |y|)_i$$

ceci simplement en vertu de l'homogénéité de l'addition car il n'est que de concrétiser la qualité i pour se rendre à l'évidence :

$$|x|_{G\alpha} + |y|_{G\alpha} = (|x| + |y|)_{G\alpha}$$

$|x|$ anticoulombs $+$ $|y|$ anticoulombs $= (|x| + |y|)$ anticoulombs

Un nom d'unité physique n'est-il pas en effet un qualificateur (non mathématique) du nombre naturel et le qualificateur mathématique p ou n son substitut abstrait ? De même,

$$|x|_i - |y|_i = (|x| - |y|)_i$$

à condition que $|x| > |y|$. Mais si $|y| > |x|$, on écrira en désignant par j le qualificateur opposé à celui que représente i :

$$|x|_i - |y|_i = |x|_i + |y|_j = |y|_j - |x|_j = (|y| - |x|)_j$$

Quant à l'addition (soustraction) hétérogène, elle se ramène à la soustraction (addition) homogène du fait que

$$|x|_i + |y|_j = |x|_i - |y|_i$$

Enfin, la multiplication de deux nombres concrets faisant émerger comme je l'ai montré une qualité concrète nouvelle, celle de deux nombres abstraits qualifiés, qui sont concrets par rapport aux nombres naturels, doit en faire autant. Or à priori quatre cas se présentent : $p \times p$, $n \times n$, $p \times n$ et $n \times p$ qu'il faut réduire à deux pour que le produit appartienne lui-même à l'ensemble des nombres qualifiés, et la seule façon de le faire consiste à opposer les produits de deux facteurs homogènes $|x|_i \,.\, |y|_i$ à ceux de deux facteurs hétérogènes $|x|_i \,.\, |y|_j$. La qualité des premiers étant désignée par r et celle des seconds par s, reste à identifier r à p et s à n ou bien r à n et s à p : c'est la première de ces options que l'algorithme a prise, mais il n'est pas sans importance de se rendre compte que sur la seconde aussi une algèbre cohérente peut se bâtir.

Qu'en est-il de l'ordre quantitatif des nombres qualifiés ? Leur quantité s'exprimant exclusivement par le nombre naturel, il faut que

$$|x|_i > |y|_i \Leftrightarrow |x| > |y|$$

exactement comme

$$|x| \text{ mètres} > |y| \text{ mètres} \Leftrightarrow |x| > |y|$$

En particulier, on doit avoir $|x|_n > |y|_n \Leftrightarrow |x| > |y|$. Mais n'en va-t-il pas ainsi concrètement ? Pour le physicien, la charge électrique (négative) de l'ion So_4^{--} n'est-elle pas deux fois plus grande que celle de l'ion Cl^-, le premier n'est-il pas plus fortement électrisé que le second ? Qu'on effectue d'ailleurs le rapport de ces charges : u désignant l'unité, on trouve $\frac{-2u}{-1u} = 2$ où 2 est un nombre naturel et non un nombre positif, tout comme il en serait dans $\frac{2 \textit{ anticoulombs}}{1 \textit{ anticoulomb}} = 2$. De même, pour tout le monde, une dette de deux millions n'est-elle pas double d'une d'un million ? Le contenu de l'usuelle relation $-1 > -2$ demande donc à être élucidé. En vérité, il est purement ordinal et non quantitatif. L'algèbre ordinaire établit en effet un ordre total sur l'ensemble des nombres qualifiés par une relation que je noterai $\succ$ et qui est définie ainsi :

$$|x|_i \succ |y|_i \Leftrightarrow |x|_i - |y|_i = |z|_p$$

Chez les nombres positifs, l'ordre $\succ$ coïncide avec l'ordre quantitatif $>$ mais chez les négatifs il coïncide avec l'ordre quantitatif opposé $<$. En vérité -1 est *après* -2 selon l'ordre $\succ$ mais non plus grand que -2, tandis que $+2$ est à la fois après $+1$ et supérieur à $+1$.

Concluons : l'algorithme en usage identifie le nombre naturel avec le nombre positif, l'opérateur d'opposition avec le signe de la soustraction, ce dernier avec le qualificateur n, l'ordre $\succ$ fondé sur la positivité de la différence avec l'ordre quantitatif $>$. Bref, il distord, il démantèle la structure de l'opposition numérique, brisant notamment la symétrie parfaite des opposés par le privilège accordé aux nombres positifs (tout en introduisant d'ailleurs subrepticement un avatar du nombre réel naturel sous la forme de la valeur absolue du nombre qualifié, distincte du nombre positif).

Pourquoi cela ? La réponse est toujours la même : simplification (considérable) de l'algorithme, économie des symboles et souci exclusif de l'efficience opératoire : tout rustique et taillé à la hache qu'il soit, l'algorithme usuel calcule juste, qu'importe dès lors à la plupart des mathématiciens s'il induit à penser faux ?

A mon sens, la structure du concept de l'opposition qualitative peut se représenter par le schéma quadrupolaire suivant :

Unitif
Positif Négatif
Neutre

En voici une concrétisation physique, relative par exemple à un corps macroscopique électrisé :

Electrisé
charge électrique G

Electrisé protonique (α) Electrisé antiprotonique (β)
charge $G\alpha$, positive charge $G\beta$, négative

Electrisé neutre
charge G *totale* nulle

$$q_{G\alpha} + q_{G\beta} = 0$$

L'unitif G est abstrait par rapport aux opposés $G\alpha$ et $G\beta$ qui seuls existent physiquement et s'opposent donc concrètement l'un comme la négation de l'autre. Le corps électrisé neutre est plus concret, puisqu'il unit en lui les deux qualités opposées $G\alpha$ et $G\beta$. Mais son essence s'exprime dans l'équation $q_{G\alpha} + q_{G\beta} = 0$ où la nullité de la somme signifie et l'anéantissement de la quantité totale de charge et celui des qualités, non seulement des secondes α et β mais aussi de la qualité G elle-même. Le neutre possède donc les deux qualités $G\alpha$ et $G\beta$ mais, contradictoirement, *au total*, il en possède ni $G\alpha$ ni $G\beta$, ni par conséquent G elle-même. Par ce dernier trait, le neutre s'oppose comme non G à l'unitif G, opposition abstraite cette fois-ci parce que c'est la pensée analytique qui isole G ainsi que la propriété totale ou globale. En bref, dans le quadrupôle le positif et le négatif s'opposent concrètement tandis que l'unitif et le neutre s'opposent abstraitement. On comprend aussi pourquoi le zéro dans $q_{G\alpha} + q_{G\beta} = 0$ doit être celui des nombres naturels : c'est G qui s'y anéantit et elle se mesure, je l'ai dit, par un nombre naturel.

Ainsi se fonde la structure de l'opposition numérique dont le schéma s'écrit

Nombre naturel $|x|$
Nombre positif $|x|_p$ Nombre négatif $|x|_n$
Zéro

$$|x|_p + |x|_n = 0$$

Son neutre est le zéro (et par ce mot « neutre » le vocabulaire mathématique courant touche cette fois mais non délibérément une vérité profonde). Les nombres qualifiés s'y révèlent bien concrets par rapport au nombre naturel. Une nouvelle contradiction vraie, fondamentale, s'y découvre : zéro, en tant que nombre naturel, n'est ni positif ni négatif mais il est aussi bien à la fois positif et négatif comme l'établisseent, sur la base de l'homogénéité de l'addition, les relations $|x|_p + 0 = |x|_p$ et $|x|_n + 0 = |x|_n$.

Plus encore que celui du zéro, le concept de l'infini mathématique est contradictoire : le seul fait que pas seulement depuis CANTOR mais depuis l'antiquité grecque il ait divisé les esprits en deux écoles, l'une niant et l'autre affirmant l'infini actuel, manifeste déjà ce contredit. Mais au regard de la pensée synthétique chacune des deux écoles, comme dans les dialogues de PLATON, a raison et chacune aussi bien a tort, ce que je me propose de démontrer.

L'INFINI MATHÉMATIQUE ET LE CHANGEMENT QUALITATIF

La science grecque, voir par exemple la *Physique* d'ARISTOTE [II] tira déjà au clair les deux pôles opposés du concept de l'infini : le premier appelé l'infini potentiel, négatif, relatif ou encore l'indéfini, le second l'infini actuel, affirmatif, absolu ou encore le transfini. Le sens immédiat du mot « infini » consiste dans la pure et simple négation du fini ; selon l'acception du préfixe latin « in » il signifie le non-fini, ce qui n'a point de borne, de terme, aussi bien adopterais-je volontiers le synonyme « interminé » et plus justement « interminable ». Considérons en effet le plus simple modèle de ce non-fini mathématique, la suite naturelle des nombres entiers. La loi du passage de n à son successeur n^+, qui se formule $n + 1 = n^+$, ne renferme aucun principe de finitude, elle demeure applicable au suivant du suivant et ainsi de suite, si grand que soit un entier son successeur pouvant par elle encore être engendré, de telle sorte que « mettre un terme » à la suite se heurte à une impossibilité logique et que cette suite non seulement s'avère interminée mais bien interminable. La négation simple et immédiate du fini, l'interminable, tel est le contenu du pôle négatif ou potentiel dans le concept de l'infini, exprimé par le symbole ∞ et seul admis par les finitistes.

Quel est le contenu du pôle affirmatif ou actuel ? Il consiste et ne saurait consister que dans la limite, au sens mathématique de ce mot. Ainsi, en numération décimale, la suite bien ordonnée $u_1 = 0{,}6$; $u_2 = 0{,}66$; $u_3 = 0{,}666$ etc... dont le terme de rang n s'écrit $u_n = 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + 6.10^{-3}... + 6.10^{-n}$ est interminable comme la suite des entiers qui la numérote. Mais pourtant elle « converge » ou « tend » vers une limite, elle a ou admet une limite : le nombre $l = \frac{2}{3}$. CAUCHY a précisé finement, dans le cadre de la pensée analytique, la signification de ce langage : d'une part, si grand que soit le numéro n, le terme u_n ne parviendra jamais à égaler l, l'égalité $u_n = l$ est impossible ; mais d'autre part, si je me donne un nombre réel positif ε aussi petit que je veux, je trouverai toujours un entier N tel que si $n > N$ alors $|l - u_n| < \varepsilon$. Plus brièvement, la différence $|l - u_n|$ peut, en choisissant n suffisamment grand, devenir aussi petite que je veux mais jamais rigoureusement nulle. La limite, voilà donc l'infini actuel, le transfini. Tandis qu'au pôle potentiel se précise seulement ce que l'infini n'est pas, à l'actuel s'affirme et se détermine ce qu'il est. « Cette pensée (de l'ordinal transfini) sans qu'on le nomme, écrit Arnaud DENJOY [XI] domine toute l'analyse mathématique : les suites convergentes et la limite de telles suites ». Formons en effet l'ensemble composé d'une suite et de sa limite $\{u_1, u_2, u_3 \dots u_n \dots l\}$ ensemble que, m'inspirant d'une terminologie de LEIBNIZ, je qualifierai d'*homogone*. Qu'est-ce que le premier ordinal transfini ω ? Pas autre chose, répondrai-je avec Arnaud DENJOY, que le numéro attribué à la limite l dans l'ensemble homogone. Et le premier cardinal transfini aleph-zéro ? Le cardinal de cet ensemble. Quant à la suite des ordinaux transfinis d'ordre 1, sa signification concrète se montre clairement dans une suite d'ensembles homogones disjoints. Par exemple, l'ordinal de l'ensemble

$$\left\{ 0{,}3 \ ; \ 0{,}33 \ ; \ 0{,}333 \dots \frac{1}{3} \ ; \ 0{,}6 \ ; \ 0{,}66 \ ; \ 0{,}666 \dots \frac{2}{3} \right\}$$

à savoir le numéro de l'élément final $\frac{2}{3}$ est $\omega.2$. A noter déjà l'étrangeté de l'ensemble homogone : il possède, tout en étant infini, un premier et un dernier élément mais sans pour cela être ni dense ni continu, ce qui contredit la théorie usuelle, cantorienne des ensembles.

L'ensemble homogone réunit les deux pôles de l'infini : le négatif (la suite) et l'affirmatif (la limite). Or, la limite est finie, la différence $|l - u_1|$ aussi, de telle sorte que l'interminable déploiement de la suite, si elle est monotone (ou bien croissante ou bien décroissante) se circonscrit dans l'intervalle fini $[u_1, l]$ et ne franchit jamais, si grand soit n, la borne l : l'infini potentiel, le non-fini se trouve ainsi enclos dans l'espace numérique fini $[u_1, l]$. Tandis que l'infini potentiel nie toute borne, l'actuel, le transfini l réaffirme donc la borne, il achève de constituer comme le dit si bien Arnaud DENJOY « l'infini borné », l'interminable terminé. Et si, opinait HEGEL, l'infini potentiel est la négation du fini, l'actuel en est « la négation de la négation », le retour à la finitude. On le voit, une contradiction fondamentale traverse et stucture l'être et le concept de l'infini mathématique : celle du fini et du non-fini. Le non-fini, ai-je montré, se trouve enfermé dans le fini, mais celui-ci à son tour le non-fini l'englobe : la suite en effet ne se compose que d'éléments u_n finis, seule leur succession demeure interminablement ouverte mais la loi même de la succession reçoit encore une expression finie λ de la forme $u_n = f(n)$ ou de la forme récurrentielle $u_{n+1} = f(u_n)$; je désignerai par « fini s » ce fini u_n, λ : si évidente apparaît cette inclusion $\infty \supset$ fini s que les partisans exclusifs de l'infini potentiel se nomment finitistes. Elle fait le pendant de l'inclusion $\infty \subset$ fini l, « fini l » désignant l'intervalle $[u_1, l]$ ou aussi bien $[u_n, l]$, n quelconque. Au plan logique et non plus ontologique, fini et non fini composent d'abord deux exclusions réciproques vraies :

1° Fini $s \mathrm{w} \infty$ (ou bien je parle de u_n et de λ ou bien de l'infinité de la succession) ;

2° $\infty \mathrm{w}$ fini l (ou bien la suite interminable ou bien sa limite) ;

L'entendement et sa logique aristotélicienne s'arrêtent là, mais non la raison dialectique, qui posera quatre implications vraies au sein d'un ensemble homogone :

3° $\infty \Rightarrow$ fini s (poser une suite interminable implique des termes successifs u_n et une loi de récurrence λ) ;

4° Fini $l \Rightarrow \infty$ (prononcer « limite » c'est parler implicitement d'un infini potentiel, *cf* la définition de CAUCHY) ;

5° Fini $s \Rightarrow \infty$ (la loi λ ne contenant aucune raison d'arrêter la succession, celle-ci est interminable) ;

6° $\infty \Rightarrow$ fini l (cette dernière implication vraie appartient en propre comme la 4e au concept achevé, bipolaire de l'infini mathématique, celui des suites, intégrales etc... *convergentes*)

Au total donc deux exclusions réciproques vraies et deux implications mutuelles vraies :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fini } s \ \mathrm{w} \ \infty \\ \text{Fini } s \Leftrightarrow \infty \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \infty \ \mathrm{w} \text{ fini } l \\ \infty \Leftrightarrow \text{fini } l \end{array} \right.$$

et donc deux contradictions vraies lient le fini et le non-fini réduites, au degré le plus général des catégories, à une seule : fini w non-fini, fini $\Leftrightarrow$ non-fini. A remarquer aussi la loi de succession λ, finie par sa forme et non-finie par son contenu.

L'infini potentiel enclos dans le fini, qui notamment constitue l'essence du continu (la division interminable d'un segment de droite par exemple en parties disjointes) SPINOZA, cité par HEGEL, l'appelait « l'infini de la raison » : juste parole, puisque seul il peut s'élever à la dignité du concept. Tandis que l'infini des suites divergentes, telle la suite des entiers, il le tenait pour « l'infini de l'imagination » ce qui apparaît aussi judicieux si l'on considère que l'intellect opératoire se montre capable d'accéder à l'infini potentiel et qu'il procède par représentations imaginatives dans l'espace mental autant que par raisonnement (les champions célèbres du calcul mental ne furent-ils pas des êtres non seulement incultes mais ignares en mathématiques ?). Or, la plupart des ouvrages qui exposent la théorie des nombres transfinis [VII, VIII, IX, X] présentent à l'instar de Cantor l'ordinal ω comme celui de la suite naturelle des nombres entiers *considérée comme une totalité en quelque sorte achevée* et aleph-zéro comme le cardinal de cette totalité. Divergente, interminable, n'admettant aucune limite, procédant d'une infinité purement potentielle, négative, comment cette suite pourrait-elle constituer une totalité achevée et sur quoi serait-elle en mesure d'asseoir la notion du transfini ? Sur rien à mon avis qu'un vague fantasme de l'imagination, une envolée dans la spéculation tout à fait caractéristique de l'entendement lorsqu'il oublie ses fondements concrets, lesquels ne peuvent ici être assurés que par les « infinis bornés » dont le prototype est l'ensemble homogone qui, lui, constitue effectivement une totalité achevée. Là se vérifie du reste cette idée avancée plus haut que sa fonction ordinale, l'entier ne l'exerce réellement, concrètement que dans les suites *autres* que la sienne propre mais ayant même type d'ordre : si une de ces suites autres est convergente, alors tout naturellement ω vient numéroter la limite, tandis que si elle est divergente, ω devient une forme vide. L'ectoplasme cantorien du transfini, les finitistes ont donc parfaitement raison de le récuser, et je souscrirai sur ce point sans réserve à cette assertion du finitiste POINCARÉ : « En réduisant la pensée mathématique à une forme vide, il est certain qu'on la mutile ». Mais les finitistes ont tort absolument de jeter le bébé avec l'eau du bain, le vrai transfini, la limite, avec le faux. Tout compte fait, les deux écoles commettent la même erreur : niveler et effacer l'opposition essentielle entre suites, séries, intégrales convergentes d'une part, divergentes de l'autre, les finitistes niant et les infinitistes cantoriens affirmant la réalité du transfini chez les convergentes comme chez les divergentes, indifféremment. Alors que seules, encore une fois, les convergentes réalisent le concept complet et concret de l'infini mathématique et, pour cette raison, se révèlent seules aptes à formuler des lois physiques. On trouve dans la littérature des expressions comme par exemple :

$$\text{Limite}_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

qui sont des non-sens, le symbole ∞ signifiant précisément l'absence, la négation de toute limite, de tout transfini. Une autre étrangeté, dans laquelle donna POINCARÉ et qui fait encore couler beaucoup d'encre finitiste, consiste dans la naïve croyance qu'on peut éviter les contradictions de l'infini en se limitant strictement à des notions exprimables par un nombre fini de mots, de symboles, d'opérations mathématiques ou logiques. C'est là confondre signifiant et signifié, syntaxe et sémantique, ou plus exactement supprimer le contenu pour n'opérer que sur des formes vides. Des expressions comme suite interminable, ensemble homogone, loi de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ un mot comme « continu », un symbole comme ∞ , voilà autant de formes finies qui n'en recèlent pas moins toute la problématique de l'infini, potentiel et actuel. Il en va de même, comme beaucoup l'ont souligné, de tout mot du langage, (« triangle » ou « renonculacée » par exemple) exprimant un général et ouvrant de ce fait une infinité de particuliers et de singuliers possibles. Bien plus : le mot fini lui-même avec la notion qu'il signifie n'existerait pas si l'esprit humain n'avait conçu aussi le non-fini, de même que l'expression « électricité positive » si l'électricité négative nous était demeurée inconnue, comme l montre par exemple l'avènement des mots négaton et position, survenu après seulement que l'électron positif fût en 1933 découvert.

Cependant, à l'étude ci-dessus du concept de l'infini mathématique, il manque un complément essentiel : la qualité. Revenons en effet à l'impossible égalité $u_n = l$. L'égalité quantitative, ai-je établi, doit répondre à la double exigence d'homogénéité et d'hétérogénéité, mais seule la première pose une condition « sine qua non » car la seconde, si elle n'est pas satisfaite, laisse encore la possibilité purement formelle de la tautologie. Or $u_n = l$ est impossible même formellement. Donc, entre les éléments d'une suite convergente, les limités u_n d'une part, et leur limite l d'autre part, il existe une différence de qualité. C'est ce que déjà suggère l'écriture : commune à tous les u_n, la lettre u symbolise cette qualité mathématique propre à l'ensemble que constitue la suite interminable et qui, dans le contexte de l'homogone, s'oppose à la qualité mathématique du transfini l. La qualité u peut consister concrètement dans la fonction f exprimant la commune loi d'engendrement des u_n, par exemple $u_n = f(n)$. Ainsi, infini potentiel et actuel polarisent non seulement l'opposition catégorique du non-fini et du fini mais aussi une opposition qualitative. Et le passage de l'un à l'autre, le passage de la suite interminable à sa limite constitue un changement, mathématique qualitatif, tandis que le passage d'un terme à l'autre de la suite, qui laisse inaltérée la qualité u, n'est en regard de celle-ci qu'un changement quantitatif. Hegel avait déjà dégagé cette loi structurale : l'infini actuel énonçait-il, « c'est le retour du quantum à la qualité... il n'est en fait, pas autre chose que la qualité ». D'après le contexte, il entend bien par là que la suite interminable ne permet dans son sein que des changements quantitatifs et c'est pourquoi il l'appelle infinité quantitative, tandis que le transfini promeut un changement qualitatif. De la sorte, le pôle négatif du concept nie et le fini et le changement de la qualité u, laquelle se répète indéfiniment, tandis que le pôle affirmatif, négation de cette double négation, fait retour à la fois au fini et au changement qualitatif. Par un mouvement contraire, le pôle négatif affirme la qualité u et le pôle affirmatif la nie, au profit de la qualité l qui y vient à émergence, à quoi il convient d'ajouter que u est une qualité générale puisque commune à tous les u_n et non-u une qualité particulière et même singulière dans l'homogone puisqu'appartenant seulement à la limite. Au total, deux contradictions fondamentales structurent le concept : fini et non-fini, changement quantitatif et changement qualitatif.

On comprend dès lors pourquoi l'homogone n'est pas un ensemble au sens de CANTOR : à cause de cette hétérogénéité entre la limite et la suite, qui fait qu'à l'homogone en tant que totalité peuvent être prédicables contradictoirement les qualités u et non-u, par exemple basal et non-basal ou rationnel et irrationnel ; la suite u_n seule répond à l'exigence cantorienne d'homogénéité. En revanche l'extériorité de l'ordinal ω par rapport à la suite des entiers, sur laquelle CANTOR insiste tant, et qui ne signifie pas autre chose que la différence qualitative entre ordinal entier et ordinal transfini, reçoit dans l'ensemble homogone le contenu concret qui manque à la spéculation cantorienne : ladite différence qualitative n'est autre en définitive que celle qui oppose limite et limités.

Cette loi du changement qualitatif par passage de l'infini potentiel au transfini, aucune suite convergente ne la transgresse : je me bornerai à mentionner quelques exemples. Dans la suite $u_n = 6.10^{-1} + 6.10^{-2} + \ldots + 6.10^{-n}$ tous les u_n sont (en numération décimale) des rationnels basaux, la limite $\frac{2}{3}$ est un rationnel non basal. Soient deux suites j_n et k_n d'entiers définies ainsi : $j_1 = 3$ et $k_1 = 2$ $j_n = j_{n-1} + 2k_{n-1}$; $k_n = j_{n-1} + k_{n-1}$; alors la suite $u_n = \frac{j_n}{k_n}$ a pour limite $\sqrt{2}$: tous les u_n sont des rationnels tandis que $\sqrt{2}$ est un irrationnel. A l'inverse, la suite $u_n = \sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif quelconque (par exemple $a = 10$) et où $n = 2, 3, 4\ldots$ ladite suite tend vers 1 ; tous les u_n sont irrationnels mais la limite 1 est rationnelle. La suite $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ dont tous les termes sont rationnels et donc algébriques converge vers le nombre d'EULER e qui est un nombre transcendant. Des suites numériques, passons aux suites de fonctions de variable réelle. La suite $\varphi_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}$ où $x \in]0,1]$ admet la limite $f(x) = \frac{1}{x}$; toutes les φ_n sont des quotients d'un polynôme du premier degré par un du second ; la limite f est le quotient d'un polynôme de degré zéro par un du premier degré : la différence entre les qualités-relations φ et f est patente. De même, la suite $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge $\forall\, x$ vers $f(x) = e^x$; toutes les φ_n sont des polynômes et donc des fonctions algébriques, la limite f est une fonction transcendante. Autre type de fonction limite : soit par exemple $\varphi(x) = ax\,(1 - e^{-x})$ où $a > 0$ est une constante et $x > 0$; soit $f(x) = ax$; la différence $f - \varphi = axe^{-x}$ peut, en choisissant x assez grande, être rendue aussi petite qu'on le veut sans jamais cependant être nulle : c'est dire que f est limite de φ lorsque x croît indéfiniment ; or φ est transcendante alors que sa limite est algébrique ; ceci confirme d'ailleurs que les épithètes « algébrique » et « transcendante » traduisent bien des qualités. La géométrie fournit aussi de nombreuses vérifications. Je citerai d'abord la méthode d'exhaustion trouvée par Archimède. Soit par exemple une circonférence et la suite interminable des polygones inscrits de 2^n côtés, $n = 2, 3, 4\ldots$; la limite de cette suite est la circonférence elle-même et l'opposition de qualités entre infini potentiel et transfini consiste dans celle de la ligne brisée et de la ligne courbe, c'est à dire en définitive de la droite et de la courbe. Autre cas simple mais fort instructif : soit D une droite fixe, A un point fixe hors de D, $\triangle$ une droite variable passant par A et sécante à D qu'elle coupe en M sauf lorsqu'elle est perpendiculaire à D auquel cas l'intersection sera désignée par O (figure).

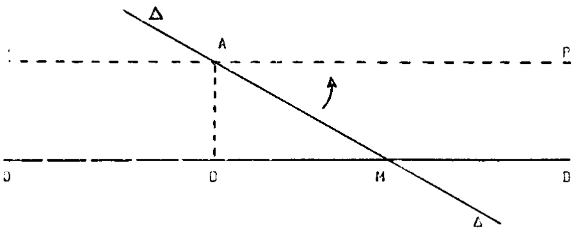

Fig. 1

J'appelle éloignement (de M par rapport à O) le segment OM, mesuré par un nombre réel x homogène à une longueur mais positif lorsque M est à droite de O et négatif lorsque M est à gauche. Quand $\triangle$ sur la figure tourne dans le sens direct, l'éloignement, positif, croît indéfiniment et sans admettre de limite : purement potentielle, son infinité se signifie usuellement par $+\infty$. Mais la sécante $\triangle$, elle, tend alors vers une limite : la parallèle P à D. Si maintenant M se situe à gauche de O et $\triangle$ tourne dans le sens rétrograde, l'éloignement, négatif, croît de même indéfiniment (selon l'ordre quantitatif précisé plus haut pour les nombres négatifs) sans converger vers une limite et cet infini potentiel s'exprime par $-\infty$. Quant à la sécante $\triangle$, elle tend vers la même limite P. Ainsi, dans ce cas il n'y a pas de transfini algébrique, de transfini pour l'éloignement x, mais un transfini géométrique s'affirme : la parallèle à D, infini actuel venant borner l'infini potentiel que constituent les sécantes $\triangle$. Et le changement qualitatif consiste précisément dans le passage de la droite sécante à la droite parallèle ou non-sécante. Le non-fini, là encore un fini le renferme : finie demeure la distance de P à D et l'angle α de la perpendiculaire AO avec $\triangle$ appartient à l'intervalle fini $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, le transfini géométrique P s'avère commun aux sécantes « à droite » (OM positif) et aux sécantes à gauche, donc aux deux non-fini opposés $+\infty$ et $-\infty$ Il s'ensuit qu'une sécante à droite faisant avec P un angle β aussi petit qu'on le veut pourra, par une rotation directe 2β, franchir la parallèle et se convertir du même coup négatif très grand. Autrement dit, le transfini P se manifeste comme frontière qualitative entre la droite et la gauche, la positivité et la négativité, identique en cela au zéro, celui des éloignements (le point O) comme celui des angles α (la perpendiculaire AO). Mais, tandis que pour tendre vers zéro la quantité $[x]$ doit indéfiniment diminuer, pour la convergence vers le transfini P elle doit indéfiniment augmenter. Nous touchons là l'unité de l'infiniment grand et de l'infiniment petit, précisée plus bas. C'est que la conversion qualitative du positif au négatif ou vice-versa ne peut se produire par le simple passage d'une suite numérique à sa limite : si tous les u_n sont positifs (ou négatifs) la limite ne peut être que positive (ou négative) ou bien alors nulle, et cela tient à ce que la positivité et la négativité sont les qualités les plus concrètes des nombres réels. Mais le zéro, en tant que transfini (ce qui sera montré plus loin) peut former la limite commune à deux suites l'une positive l'autre négative et jouer le rôle de frontière entre les deux qualités : le changement qualitatif s'effectue alors par franchissement de cette frontière transfinie. Seul à jouer ce rôle en algèbre, il trouve en géométrie, plus concrète, son pair : le transfini commun aux infiniment grands $+\infty$ et $-\infty$. Celui-ci recèle alors la contradiction vraie caractérisant toute frontière qualitative et que nous avons déjà enregistrée pour le zéro : il est tout aussi légitime de lui attribuer les deux qualités à la fois que de ne lui en attribuer aucune. Au lieu des droites $\triangle$ ou P on peut en effet considérer les demi-droites d'origine A, distinguer la demi-parallèle droite de la gauche et le transfini P apparaîtra alors comme droit et gauche à la fois, tandis qu'en opérant avec les droites entières il apparaissait ci-dessus comme ni droit ni gauche. Conformément au « principe de continuité » de PONCELET, D et sa parallèle P auraient (comme D et sa sécante $\triangle$) un point commun appelé point à l'infini. Je pense qu'il s'agit là d'une intuition de transfini mais tout aussi spéculative et fantomatique que celle de CANTOR : en vérité, D et P n'ont pas de point commun et le contenu concret du transfini géométrique en question, tel qu'il se révèle notamment en géométrie perspective, c'est bien celui que j'ai essayé de préciser.

Conséquence des théorèmes classiques sur les suites convergentes, un ensemble homogone, que je noterai désormais $\{u_n \dots l\}$ en détermine un autre par opposition, l'homogone $\{u_n \dots l\}^* = \{u_n^* \dots {}^*l\}$; deux ensembles homogones $\{u_n \dots l\}$ et $\{u'_n \dots l'\}$ engendrent un troisième par addition :

$$\{u_n \dots l\} + \{u'_n \dots l'\} = \{u_n + u'_n \dots l + l'\}$$

ou aussi par division, mais à condition que $l' \neq 0$:

$$\frac{\{u_n \dots l\}}{\{u'_n \dots l'\}} = \left\{ \frac{u_n}{u'_n} \dots \frac{l}{l'} \right\}$$

Lorsque $l = l' = 0$, $\frac{l}{l'}$ prend la forme $\frac{0}{0}$ qui par soi n'a pas de sens mais l'homogone-quotient peut encore exister, avec un transfini λ qui est la limite des quotients v_n « effectués », et non pas seulement posés, $v_n = \frac{u_n}{u'_n}$. Deux ensembles homogones peuvent, de manière analogue, être aussi multipliés l'un par l'autre. De l'opposition et de l'addition, il résulte que toute suite numérique convergente u_n de limite l en engendre immédiatement une autre $u'_n = u_n - l$ de limite zéro : voilà qui octroie au zéro son statut de transfini et reconfirme, en vertu de la loi du changement qualitatif, son opposition à tous les autres nombres réels. Au stade de la pensée analytique, l'infiniment petit se définit précisément comme étant la suite convergente de limite nulle, donc l'homogone de type général $\{u_n \dots 0\}$ Mais au stade la pensée synthétique, le contenu du concept de l'infiniment petit consiste dans l'ensemble de tous les homogones du type précédent, ensemble d'ailleurs indénombrable et doué de la puissance du continu. J'utiliserai l'expression « homogone infiniment petit » et la représentation $\{U_n \dots 0\}$ étant bien entendu que U_n symbolise non pas une suite particulière déterminée, mais *n'importe quelle* suite convergeant vers zéro ou mieux, concrètement, l'ensemble de toutes les suites de ce type. Là, le concept de l'infini mathématique se déploie dans toute son ampleur, avec son pôle actuel, son transfini unique, le zéro, et son pôle potentiel qui renferme au contraire toutes les suites numériques « possibles et imaginables ». Le non-fini s'y trouve bien enclos dans le fini : au sein d'un intervalle $[a, 0]$, $a \geqslant U_1$ où cet $|a| \ll 1$ peut être choisi aussi petit qu'on le voudra, s'égrène non seulement une suite interminable particulière $u_1, u_2 \dots u_n \dots$ mais l'infinité indénombrable de telles infinités. Ainsi l'infiniment petit englobe-t-il l'infiniment grand et qui plus est l'infiniment grand de cardinal transfini le plus élevé, celui du continu. Et réciproquement, l'infiniment grand contient l'infiniment petit puisqu'un intervalle $[b, x]$ où b est fixé et x aussi grand qu'on le veut, peut se subdiviser en intervalles adjacents $[x_i, x_j]$, $i, j = 1, 2, 3 \dots n$ tels que les différences $[x_i - x_j]$, aussi petites qu'on le désire, contiennent chacune un infiniment petit inclus dans $[a, 0]$ avec $a = x_i - x_j$. Le concept de l'infiniment petit forme l'essence du calcul différentiel et intégral. Le premier se fonde sur un type de quotient de deux infiniment petits, appelé quotient différentiel et dont la dérivée, qu'elle soit totale ou partielle, forme un cas particulier de grande importance. Soit f une fonction continue de la variable réelle x ; x_o étant un nombre réel fixé, j'appelle $x - x_o = h$ la différence variable et $f(x) - f(x_o)$ la différence fonctionnelle. On donne à h le statut d'un infiniment petit, à savoir on fait parcourir à cette variable n'importe quelle suite convergeant vers zéro. On forme alors les quotients

$$Q(x, x_o) = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

Si, quelle que soit la suite parcourue par h, ces quotients convergent vers une limite de la forme $f'(x_o)$, alors f' s'appelle dérivée de f pour $x = x_o$. Ainsi la dérivée s'affirme-t-elle comme un transfini. Son élaboration se ramène au quotient de deux ensembles homogones : la différence variable peut se représenter par l'homogone infinitésimal $\{U_n \dots 0\}$ et de même la différence fonctionnelle par $\{V_n \dots O\}$ et l'on a

$$\frac{\{V_n \dots 0\}}{\{U_n \dots 0\}} = \{Q_n \dots f'\} \; ; \; Q_n = \frac{V_n}{U_n}$$

les Q_n étant les quotients $Q(x, x_o)$. Premier changement qualitatif : dividende et diviseur sont des homogones infinitésimaux, le quotient au contraire un homogone non infiniment petit, ce qui reconfirme la capacité de la division à créer des qualités nouvelles, déjà notée à propos de la division des grandeurs physiques. Second : dans l'homogone quotient, tous les Q_n, qui constituent l'infini potentiel, sont quotients d'une différence fonctionnelle par une différence variable et en outre tous dépendent de x et de x_0 ; ces deux qualités-relations se trouvent anéanties dans l'infini actuel $f'(x_o)$. Troisième : la fonction dérivée f' est une qualité relationnelle différente de la fonction primitive f. Ainsi, une fonction linéaire pour dérivée une fonction constante, une fonction potentielle, x^a le produit ax^{a-1} d'une constante par une autre fonction potentielle, la fonction logarithmique népérienne Log$x$ qui est transcendante a pour dérivée $\frac{1}{x}$, fonction algébrique. Toutefois ce troisième changement qualitatif souffre une exception, mais une seule : la fonction exponantielle eulérienne e^x, qui a pour dérivée et donc pour primitive elle-même. A noter, concernant les quatre fonctions fondamentales plus haut définies à partir de l'addition et de la multiplication des nombres réels, que les dérivées des deux fonctions algébriques restent algébriques, que celle de la transcendante a^x demeure transcendante tandis que celle de la transcendante Log$x$ est algébrique.

Dans le calcul intégral, l'unité entre fini et non-fini, entre infiniment grand et infiniment petit se montre encore plus complexe, plus riche. Je m'en tiendrai à l'intégrale d'une fonction f de variable réelle et au sens que RIEMANN lui a donné. Classiquement, on se donne d'abord un intervalle d'intégration fini $[a, b]$ et on le subdivise en un très grand nombre N d'intervalles adjacents $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$ ...$[x_{N-1}, b]$. ξ_i étant un nombre intérieur à l'intervalle $[x_j, x_i]$ on forme la somme

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} [x_i - x_j]\, f(\xi_i) \; ; \; i = 1, 2, 3 \dots N \; ; \; j = i-1 ;$$

$a = x_o$; $b = x_N$.

Chaque différence $x_i - x_j$ reçoit alors le statut d'infiniment petit que je représenterai par l'homogone $\{U^i{}_n \dots 0\}$. Enfin, opération essentielle, les entiers N et n croissent ensemble indéfiniment, la croissance interminable de N entraînant celle de n et réciproquement (sans que ce soit ici le lieu de justifier cette implication mutuelle vraie). La limite commune à toutes les différences $x_i - x_j$ vaut alors zéro et la limite de la suite constituée par les S_N, si cette suite est convergente, c'est précisément l'intégrale I de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ toute cette construction se résumant dans l'expression $I = \int_a^b f(x)\, dx$. On voit immédiatement que l'intégrale, étant une limite, s'affirme elle aussi comme un transfini. Son infini potentiel comprend d'une part la suite interminable des S_N, d'autre part les N suites interminables $U^i{}_n$, le nombre N de ces suites croissant sans limite en même temps que, dans chaque suite, le nombre n. Son transfini, outre le nombre I limite de S_N, comprend aussi les N zéros qui bornent les homogones $[U^i{}_n \dots 0]$ ce nombre de zéros croissant, répétons-le, indéfiniment. L'élaboration de l'intégrale se ramène à l'addition des ensembles homogones. Mais, alors qu'en vertu de la règle posée plus haut de cette addition la somme d'un nombre fini d'homogones infinitésimaux demeure elle-même un homogone infiniment petit (puisque son transfini vaut $0 + 0 \dots + 0 = 0$) en revanche, lorsque le nombre d'homogones infinitésimaux additionnés croît indéfiniment et que leur somme tend vers une limite, celle-ci est encore un homogone mais qui n'est plus infinitésimal. C'est en cela que réside le changement qualitatif principal créé par l'intégration et qu'on peut exprimer en disant que l'addition de zéro à zéro, répétée indéfiniment, tend vers une limite qui (sauf cas particuliers) n'est pas un zéro, une non-quantité mais un nombre véritable, une quantité. L'élaboration de l'intégrale en effet peut elle aussi revêtir une forme homogonale en écrivant d'abord :

$$\left[W^N_n \dots 0\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[V^i_n \dots 0\right] ; \; V^i_n = U^i_n \, f(\xi_i) \; ;$$

$$W^N_n = \sum_{i=1}^{N} V^i_n$$

puis :

$$\text{limite } N \to \infty \left[W^N_n \dots 0\right] = \left[S_n \dots I\right]$$

On voit bien que tous les homogones $\left[W^N_n \dots 0\right]$ sont infiniments petits tandis que l'homogone-limite $[S_n \dots I]$ ne l'est pas. Si l'ordinal qui numérote la suite des S_N se note ici n au lieu de N, cela ne soulève aucune difficulté puisque ces deux entiers doivent croître indéfiniment de conserve (1).

Comme la dérivée, l'intégrale promeut en outre la conversion qualitative d'une fonction à une autre et d'abord le retour de la dérivée f' à la primitive f:

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\, dt \; ; \; a \text{ constante}, \; t \text{ et } x \text{ variables.}$$

La transformation d'une fonction en une autre par la médiation d'une intégrale ou comme on dit la « représentation » d'une fonction par l'intégrale d'une autre, joue un rôle important en mathématiques et se montre apte à exprimer beaucoup de lois physiques. Par exemple, la fonction φ définie ainsi :

(1) Désireux que mon exposé puisse intéresser les physiciens non familiarisés avec la topologie, je m'en tiens à la suite convergente comme base de départ pour l'élaboration du concept de l'infini.

$\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \in [-1, 1]$ se convertit, grâce à l'intégrale de FOURIER, en la fonction $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x}{x}$. Les oppositions qualitatives sautent ici aux yeux : φ se compose de deux fonctions constantes, f ne présente aucun caractère de constance ; φ est algébrique, f transcendante ; φ n'est pas périodique, f s'annule périodiquement pour $x = \pi, 2\pi, 3\pi$... De même la fonction $\frac{t}{t^2+1}$, algébrique et apériodique, se transforme par l'intégrale de LAPLACE en la fonction $\cos x$, transcendante et périodique.

Revenons maintenant tout au début de ce travail : le changement quantitatif, y disais-je, se développe au sein d'une qualité qu'il laisse inaltérée. Oui, mais en répétant un grand nombre de fois celui qui consiste à passer d'un terme u_n d'une suite convergente au suivant, on parvient aussi près qu'on le veut de la limite l. En d'autres mots, on parvient jusqu'aux confins de la qualité mathématique u et par conséquent jusqu'au seuil du changement qualitatif qui l'anéantira et créera la qualité l. Et c'est ainsi que poussé jusqu'à un degré suffisant, un changement quantitatif finit par déterminer un changement qualitatif. Il paraît évident qu'une qualité s'abolit lorsque sa quantité s'annule, mais elle peut aussi le faire à la limite d'une suite infinie, et par ailleurs zéro lui-même peut-être cette limite : tel se précise le contenu de l'unité, de l'identité entre le zéro et l'infini. « Qu'un changement ayant toutes les apparences d'un changement purement quantitatif, écrit HEGEL, puisse se transformer en changement qualitatif est un fait ». S'agissant de qualités mathématiques, ce « fait » se produit bel et bien lors du passage de l'infini potentiel au transfini, cependant on ne peut dans ce cas parler de fait car on a affaire à une loi, une essence, un élément structural du *concept* de l'infini mathématique. Le fait, c'est le monde, la nature et l'homme qui l'imposent. HEGEL en effet se réfère dans le passage cité aux problèmes du tas, du chauve, du riche prodigue, posés par les Anciens. Par exemple, si d'un tas de blé on ôte un par un les grains, à quel moment n'a-t-on plus affaire à un tas ? Ou inversement : si on accumule les grains un par un, à partir de quel nombre aura-t-on réalisé un tas ? C'est bien l'abolition ou la création de la qualité « tas » par le moyen d'un changement quantitatif qui se trouve ainsi posée. Mais la différence avec le domaine mathématique, c'est que dans celui-ci les qualités sont déterminées avec la précision, la rigueur les plus aigües que la pensée analytique puisse atteindre tandis que les Grecs raisonnaient ci-dessus sur des qualités floues, diffuses. Non que ces dernières ne jouent aucun rôle dans une science exacte comme la physique, au contraire. Peut-on déterminer une longueur d'onde frontière entre la lumière ultra-violette et les rayons X ? Non, assurément. Mais cela ne signifie pas que la distinction qualitative entre ces deux rayonnements n'ait son sens et son importance. De même, l'opposition entre objets macroscopiques d'une part, microphysiques de l'autre est capitale. Pourtant, impossible de fixer une frontière précise entre ces deux qualités. Une longueur d'un micron appartient à coup sûr au monde macroscopique, une d'un angström au monde microphysique, mais dans l'entre-deux on se trouve aussi embarrasé que devant le problème du tas. L'opposition entre qualités diffuses et qualités rigoureuses, mathématiques se présente en définitive de la manière suivante. Lorsqu'un changement quantitatif détermine la conversion d'une qualité diffuse A en une autre B, premièrement il n'existe pas de nombre exact jouant le rôle de frontière entre A et B mais un intervalle $]l_1, l_2[$ tel que si $x < l_1$, la quantité $|x|$ est inhérente à la qualité A pure et si $x > l_2$ elle est inhérente à B pure, une indétermination qualitative restant ouverte au sein de l'intervalle$]l_1, l_2[$; secondement, l'infini mathématique n'intervient pas. Seuls les changements quantitatifs engendrant le passage d'une qualité rigoureuse à une autre comportent une frontière qualitative exacte l. Celle-ci est alors un transfini venant limiter un infini potentiel, si toutefois il s'agit de qualités mathématiques. Car il est aussi des qualités physiques rigoureuses, nullement diffuses, telles qu'un changement quantitatif des grandeurs physiques engendre un changement qualitatif sans pour cela que ces grandeurs aient à parcourir une infinité potentielle et à atteindre un transfini. En voici un exemple classique. Un gaz chimiquement pur est comprimé à température constante (et inférieure à sa température critique) : sa pression augmente, son volume diminue, il accomplit un changement thermique quantitatif. Mais lorsque la pression atteint une valeur précise appelée pression de saturation, le gaz commence à se liquéfier : le changement thermique est devenu qualitatif.

L'INFINI MATHÉMATIQUE ET LE MONDE PHYSIQUE

Bien que rigoureuses, les qualités physiques premières des grandeurs ne peuvent se transformer les unes dans les autres par la médiation de l'infini mathématique : nul passage d'une suite à sa limite ne s'avère capable de convertir une température en inertie, une pression en charge électrique, ce sont là qualités trop concrètes. Ce passage ne peut changer que des qualités mathématiques exclusivement, mais celles-ci, et par excellence les qualités relationnelles, les fonctions, entrent dans l'expression des lois physiques et c'est par cette voie que le concept de l'infini mathématique, en se chargeant littéralement de matière, enrichit son contenu concret et ainsi non seulement se complète, s'approfondit et se précise mais il s'affirme comme un élément de la connaissance du monde.

Cependant, avant d'aborder cette concrétisation, il importe de fonder la rationalité de ce *passage* de l'infini potentiel au transfini et par conséquent du changement qualitatif qui en résulte. Logiquement, un tel mouvement de la pensée allant de la suite convergente à sa limite est-il licite ? Naturellement, les finitistes répondent non : l'esprit, disent-ils, devrait en faisant jouer chaque fois la loi de récurrence effectuer un nombre interminable d'opérations, et en accumulerait-il des trillions durant des siècles qu'il ne parviendrait jamais à épuiser la suite ni donc à gagner sa frontière transfinie. Comme KANT, ils jugeraient que devant l'infini mathématique « la pensée succombe »... Quelle réponse donne, par exemple, l'infinitiste DENJOY ? Qu'il faut « tenir pour absurde le projet » finitiste d'égrener successivement tous les termes de la suite et donc tous les ordinaux entiers qui la numérotent, que l'esprit est capable de « concevoir parfaitement dans son ensemble » la suite naturelle de ces *entiers*. Après avoir accompli un pas décisif vers le concept en identifiant transfini et limite, DENJOY décolle donc tout à coup de cette terre ferme et retourne à la spéculation cantorienne ! « Nulle idée n'est plus simple ni plus reposante pour l'esprit que celle du transfini, ajoute-t-il. Elle nous fait franchir une file fastidieuse, indéfinie, de nombres entiers finis. Elle nous pose directement au-delà de cette succession comme par un bond d'oiseau ou d'avion supprimant une étape monotone et interminable ». L'affirmation gratuite de la capacité de l'esprit et de son aspiration au repos, la belle image de l'oiseau, rien de rationnel assurément dans tout cela ! Et s'il est juste de tenir pour absurde le projet finitiste, encore reste-t-il à démontrer cette absurdité. Les infinitistes croient alors le faire en avançant l'argument de fait. « Le rationnel en mathématiques comme ailleurs, écrit DENJOY, se retrempe périodiquement dans l'empirique pour acquérir des forces qu'il ne saurait trouver en lui-même.» Appliquant ce précepte, il reprend l'aporie zénonienne d'Achille et de la tortue et il considère la licéité du passage de la suite à sa limite comme établie « puisqu'il tombe sous le sens » que le héros rattrape la bête. Ce qui revient proprement à « démontrer » le mouvement en marchant.

Tout compte fait, finitistes et infinitistes se montrent également incapables de fonder la rationalité du passage d'une suite à sa limite. Pourquoi ? Faute précisément de raisonner. Les premiers en effet circonscrivent le problème non pas même au niveau de l'entendement, mais au sein du génie opératoire et par conséquent ils ne font guère travailler que leur imagination, essayant de *se représenter* la file interminable des opérations et bien entendu n'y parvenant point, car ce que défie et vainct dans l'esprit l'infinité quantitative et même déjà le grand nombre, ce n'est nullement la pensée mais bien l'imagination. Quant aux infinitistes, leur « bond d'oiseau » jusqu'au transfini relève tout autant de l'imaginaire et, en appelant au secours l'empirisme, la perception, ils demeurent, en compagnie de leurs adversaires, enfermés dans la sphère de la représentation sensible ». (1). De sorte que ni les uns ni les autres ne pensent, ne s'élèvent jusqu'à la raison, même analytique, bien qu'ils prétendent « concevoir » (à ce propos, il est curieux de remarquer que dans le texte déjà cité, A. LICHNÉROVICZ parle maintes fois de « l'imagination du mathématicien » et jamais de sa raison). Il faut donc reprendre le problème à sa base, c'est à dire au concept. Le terme général u_n d'une suite une fois défini par une loi f indépendante de son rang n, $u_n = f(n)$, la convergence vers une limite *se démontre* et la démonstration détermine aussi la valeur l de la limite. Par exemple, à partir de la définition $u_n = p\left(b^{-k} + b^{-2k} \dots + b^{-nk}\right)$ où p est un entier de k chiffres et b une base de numération, on démontre que la suite a comme limite un rationnel non basal l et que celui-ci est déterminé par la loi, déjà mentionnée,

$$l = \frac{p}{b^k - 1}$$

Qu'est-ce à dire, sinon que la suite, considérée comme un général au simple sens de l'entendement, à savoir pensée (et non imaginée) selon son concept analytique dont le contenu, la « compréhension » n'est autre que la définition de u_n, se trouve liée logiquement à sa limite comme un antécédent à son conséquent nécessaire, ce qui se traduit par l'implication vraie $u_n = f(n) \Rightarrow l$? Le prétendu « vol d'oiseau », il consiste en réalité dans une *déduction*, dans le mouvement le plus propre à la raison et non dans un envol de l'imagination ni non plus dans un pur constat empirique. L'extension du concept de la suite est infinie ? Mais n'en va-t-il point de même, ai-je déjà rappelé, pour tout concept ? Lorsque le physicien énonce que si « un corps est immergé dans un fluide » (proposition A) alors « le fluide exerce sur lui une poussée etc. » (proposition B) sa pensée accomplit le même mouvement logique $A \Rightarrow B$ que celle du mathématicien déduisant, de la suite, la limite. Car l'implication $A \Rightarrow B$ n'exprime nullement un simple constat empirique mais se démontre à partir des principes de la mécanique des fluides, sa démonstration, bien qu'elle se soit précisée et mathématisée depuis, remonte même à ARCHIMÈDE. Rationnelle, la proposition $A \Rightarrow B$ se révèle en accord avec l'expérience, avec la mesure pratique, celle-ci la vérifie comme on dit, mais cela diffère du tout au tout d'un pur constat empirique. Or l'expression « un corps » par exemple recèle une infinité de corps particuliers et singuliers, divers à la fois qualitativement (nature chimique, forme, etc...) et quantitativement (dimensions) une infinité douée qui plus est de la puissance du continu. Invoquant l'impossibilité de se représenter cette infinité, ou même, face à un

(1) Voir dans *l'énumération transfinie* (tome IV) le chapitre « *Ce qui peut être pensé* ». A. DENJOY identifie manifestement pensée et représentation sensible.

corps singulier d'imaginer un par un tous les corpuscules microphysiques qui le composent, une par une toutes les molécules du fluide pressant sa surface, etc… le physicien va-t-il donc mettre en cause la capacité de son esprit à concevoir le passage de A à B sont droit d'énoncer la loi d'Archimède ? Question absurde ! C'est la fonction même de tout concept que d'accomplir une sorte d'intégration logique de l'infinité des éléments qui composent son extension. L'argutie finitiste, seule l'ignorance des données abécédaires de la réflexion philosophique peut la faire prendre au sérieux. Mais la science, la raison (c'est la même chose) doit sans hésitation tenir pour bien fondé le mouvement déductif par lequel, à l'intérieur du concept de l'infini mathématique, la pensée va du pôle potentiel au pôle actuel, tenir le changement qualitatif ainsi accompli pour authentiquement rationnel.
L'imaginaire et le pur empirisme éliminés, étude de la concrétisation physique du concept peut alors se faire sans équivoque. Revenons d'abord à la deuxième aporie de Zénon. Soit a l'avance de la tortue au moment du départ d'ACHILLE, r > l le rapport de la vitesse du héros à celle de l'animal. Première étape : ACHILLE parcourt la distance a, la tortue pendant ce temps a progressé de $\frac{a}{r}$, elle conserve donc une avance $\frac{a}{r}$
Seconde étape : le poursuivant parcourt $\frac{a}{r}$, la tortue pendant ce temps s'est encore éloignée de $\frac{a}{r^2}$, il lui reste une avance $\frac{a}{r^2}$ etc. Les valeurs successives de son avance composent de la sorte une suite interminable $\frac{a}{r^2}$ $\frac{a}{r^2}$ $\frac{a}{r^2 \ldots}$ $\frac{a}{r^2 \ldots}$
Or cette suite a pour limite zéro. Il en découle que l'avance de la poursuivie s'exprime par l'ensemble homogone $\{ u_n \ldots 0\}$ où $u_n = \frac{a}{r^2}$. Au passage de la pensée à la limite, à la déduction $u_n = \frac{a}{r^2}$ => (l = 0) répond alors l'annulation physique de l'avance, le rattrapage de la bête par l'homme, phénomène directement perceptible, « tombant sous le sens ». Rattrapage et même dépassement, le transfini zéro formant la frontière qualitative entre l'avance de la tortue et son retard. L'analyse du mouvement simultané des deux mobiles, qui s'exprime par la suite et sa synthèse, symbolisée par l'homogone au sein duquel la limite se déduit de la suite, tout cela constitue une connaissance rationnelle du mouvement de visu le rattrapage, en le vérifiant, octroie le statut de connaissance du monde physique à la construction rationnelle. Mais l'expérience à elle seule ne saurait en aucune façon établir, garantir la rationalité de la construction. En marchant, on ne démontre pas le mouvement, on ne l'explique pas, on l'impose comme un fait brutal et opaque. L'empirisme, la sensation n'ont par principe aucun droit de cité en mathématiques. C'est ce principe qui légitime notamment l'admirable effort de HILBERT pour extirper de la géométrie les pseudo-évidences de la perception.

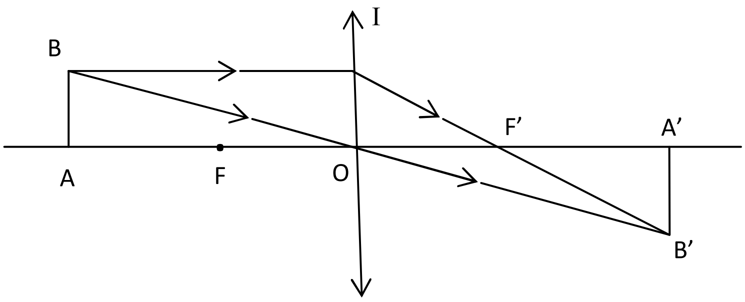

Figure 2

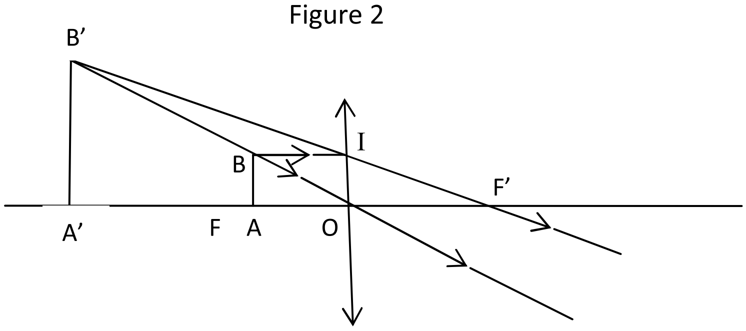

Figure 3

Voici maintenant un exemple de concrétisation physique de l'homogone sécantes-parallèle étudié précédemment. Une lentille convergente mince de centre optique O, de foyers F, F' donne d'un objet AB perpendiculaire à son axe une image A'B' (figures 2 et 3) . Par rapport au sens du mouvement de la lumière, cette image peut se situer soit en aval de la lentille (à sa droite sur les figures) soit en amont. Quand AB se déplace, parallèlement à lui-même, le long de l'axe FOF', la droite IF' autour de O et, dans les cas 2 et 3, elle est sécante de la droite fixe qu'elle coupe en B' : on retrouve bien le problème étudié plus haut. Au cas 2, l'image, en aval de la lentille, forme un ensemble de points de focalisation de faisceaux réfractés convergent ou focalisent en B' et de ce fait l'image est observable sur un écran, en d'autres termes réelle. Enfin, elle est renversée : A'B' et AB sont de sens contraires. Récapitulons les qualités de l'image au cas 2 : en aval de la lentille, réelle (faisceaux réfractés convergents) renversée. Au cas 3, elle présente les qualités exactement opposées : en amont de la lentille virtuelle (faisceaux réfractés divergents) droite (non renversée) ; sur le plan pratique, la lentille fonctionne en 2 comme objectif photographique, en 3 comme loupe. Ces oppositions physiques concrétisent en l'enrichissant celle, géométrique, des sécantes coupant IF' à gauche de F', ces sécantes constituant ainsi qu'il a été montré deux infinis potentiels dont le transfini commun est la parallèle OP à IF' (figure 4).

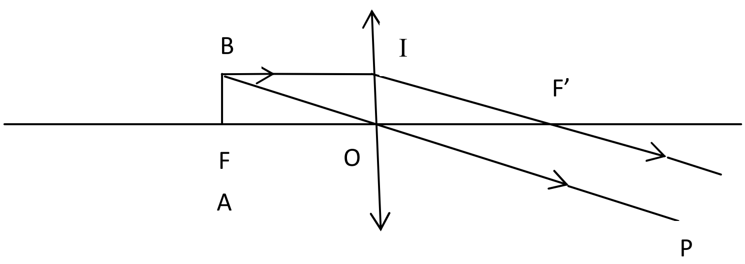

Figure 4

Ainsi, le faisceau lumineux parallèle s manifeste comme le transfini physique commun aux faisceaux convergents et aux divergents et par conséquent comme la frontière qualitative entre l'infinité potentielle des images aval, réelles et renversées et droites. Le transfini-frontière entre qualités opposées trouve en optique une belle et claire matérialisation, et le triple changement qualitatif accompli par l'image saute aux veux lorsque, le long du banc d'optique, l'objet AB glisse de la gauche à la droite de F (figures 2 et 3). Si maintenant cet objet, s'éloigne indéfiniment de la lentille vers l'amont, l'image tend vers une limite : le foyer aval F' dans lequel A' et B' viennent se confondre et la démonstration de cette limite se fait aisément à partir des relations algébriques de conjugaison. D'un point de vue plus élevé en effet, AB et A'B' sont des conjugués optiques par rapport à la lentille, échangeant leur rôles d'objet et d'image lorsque s'inverse le sens du mouvement de la lumière tandis que la configuration géométrique représentée en 2 ou 3 ainsi que les relations algébriques demeurent indifférentes à cette inversion. Au sein de ce concept synthétique de conjugaison, un foyer se définit comme la limite vers laquelle tend l'un des conjugués lorsque l'autre s'éloigne indéfiniment de la lentille. Donc, les foyers des lentilles et des miroirs courbes sont aussi des transfinis optiques.

Est-il alors licite de tabler sur un conjugué quand l'autre est le foyer ? Par exemple, sur une image A'B' au cas 4 où le point-objet A occupe le foyer F ? Dans le cadre de la théorie, assurément non : la parallèle OP ne coupe pas IF' et par conséquent le point-image B' n'existe pas ; l'infinité des images A'B' reste purement potentielle et « l'image à l'infini » apparait aussi fantomatique que le point à l'infini de PONCELET ou l'ordinal ω au terme de la suite des entiers selon CANTOR. En physique expérimentale, cependant, la réponse n'est pas si simple : elle nécessite en effet l'élucidation préalable d'une articulation essentielle entre le concept de l'infini mathématique et l'objet physique, entre la connaissance rationnelle de cet objet, que constitue le concept, et sa connaissance empirique. D'une manière générale, ces deux connaissances s'identifient et se contredisent à la fois, l'identité prédominant évidemment sur la contradiction ; je l'ai déjà montré à propos de la mesure théorique et pratique, mais mille exemples peuvent être avancés. Ainsi, selon la perception visuelle le soleil tourne autour de la terre, tandis que la dynamique rationnelle du système solaire fonde sur la rotation du soleil, et l'identité de ces deux rotations contradictoires, la cinématique la rétablit en les faisant apparaitre comme aspects particuliers d'une même réalité : le mouvement mutuel ou relatif des deux astres. Il ne faut donc point s'étonner si le concept de l'infini mathématique concorde avec le constat empirique, comme le montrent les exemples qui précèdent, mais en même temps puisse le contredire. Soit en effet un homogone $\{ u_n \dots l \}$; à partir d'un rang *n* suffisamment élevé, la différence $u_n - l$ pourra devenir assez petite pour ne plus être saisissable par les sens dans le cadre de l'appareillage, de la technique d'expérimentation mis en œuvre ; en d'autres termes, cette menue différence quantitative se fondra alors dans l'inévitable approximation métrologique, l'impossible égalité mathématique $u_n = l$ se convertissant en égalité physique, la limite physique se trouvant atteinte alors que la limite mathématique ne l'est point encore. Du même coup de rigoureuses dans la théorie, les qualités … et … se muent dans la pratique, chez l'objet présent et sensible qu'elle manipule, en qualités floues, la bande d'indétermination qualitative qui sépare l'une et l'autre à l' état pur restant cependant extrêmement étroite de l'ordre de grandeur de l'approximation, au contraire de ce qui se passe pour les qualités floues étudiées précédemment. Se confirme et se précise ici, sur un point particulier, cette vérité générale et bien connue que toute théorie physique élabore une re-création conceptuelle de son objet, dont le rapport à celui-ci, fait d'identité et de contradiction, n'est pas sans analogie avec le rapport de la re-création artistique avec son « projet ».
Revenons maintenant au problème du conjugué d'un foyer. Lorsque le point objet A s'éloigne indéfiniment de la lentille vers l'amont (figure 2) son image A' tend donc, selon la théorie, vers la position limite F' : cela signifie que si A s'éloigne par étapes, à chacune doit répondre un rapprochement de A' vers le foyer F'. Or l'expérience relève qu'au-delà d'un éloignement de A devient imperceptible, impossible à mesurer : il cesse donc physiquement d'exister et par conséquent la limite physique se trouve atteinte alors que la limite physique se trouve atteinte alors que la limite mathématique, il s'en faut d'une infinité, ne l'est pas. Par exemple, si OF = 1 mètre, l'image d'un objet A situé à 500mètres de la lentille se confondra dans la pratique, dans la connaissance empirique, avec le foyer théorique F', et à fortiori si A est une étoile et la lentille l'objectif d'une lunette astronomique.

Voilà où les deux connaissances, la rationnelle et l'empirique, se contredisent : l'une pose le non-être du conjugué de F' parce qu'il devrait terminer l'infinité potentielle des éloignements. OA interminable par nature, l'autre affirme son être, concrétisé avec un haut degré de précision physique dans une étoile. La contradiction prend d'ailleurs sa source aux postulats même de l'optique géométrique sur lesquels par déduction la pensée recrée à sa façon le mouvement de la lumière. Ces postulats, propagation rectiligne, points lumineux, schématisent, stylisent en effet une réalité infiniment plus complexe : la diffraction. Inventions de l'entendement, ni rayon lumineux ni point lumineux n'existent dans la nature physique. Et s'il est vrai qu'un faisceau réfracté par une lentille, au cas 2 par exemple, présente une région de rétrécissement, celle-ci ne se réduit nullement au point géométrique B' mais occupe en fait un volume, au sein duquel la répartition des photons procède d'une loi compliquée. Ainsi la focalisation d'un faisceau, conçue comme rigoureuse, ponctuelle, se révèle-t-elle à l'expérience comme une qualité floue, d'où l'abréviation de l'infinité potentielle théorique de OA, sa réduction physique à une longueur finie, à un quantum.

Autre exemple analogue : la décharge apériodique d'un condensateur de capacité $\mathcal{C}$ à travers un conducteur de résistance R ; si, initialement, la charge vaut Q_o, au bout d'un temps t elle vaut

$$Q = Q_o\, e^{-\frac{t}{\mathcal{C}R}}$$

selon la théorie du courant, l'électrocinétique. Il découle de cette relation que Q tend vers la limite zéro si et si seulement t augmente indéfiniment soit, en termes plus expressifs, que l'éternité ne suffirait pas pour que s'achevât la désélectrisation des armatures du condensateur ! Il va sans dire que l'expérience contredit cette conclusion théorique : la décharge se termine, physiquement, pratiquement, au bout d'un temps fini qui peut même être fort court, un millième de seconde par exemple. Là encore l'infinité potentielle s'abrège, le transfini physique advient quand le transfini mathématique n'a pas encore émergé et la qualité charge électrique se présente de ce fait comme une qualité diffuse. De la relation précédente on déduit en effet que la charge se réduira au trillionième de sa valeur initiale Q_o au bout d'un temps $t = 28\mathcal{C}R$ environ. Supposons que ce trillionième, les instruments de mesure les plus sensibles ne puissent parvenir à le déceler : alors la charge s'avèrera physiquement anéantie. Et pour qu'un millième de seconde seulement se soit écoulé lors de cette annulation, il faut et il suffit que $\mathcal{C}R = \frac{1}{28000}$, ce qui pratiquement est facile à réaliser.

La comparaison avec l'exemple optique permet de théoriser l'abréviation physique de l'infinité potentielle pure. On a affaire, dans la construction rationnelle d'un processus physique, à une fonction $f(x)$ qui admet un transfini lorsque sa variable x parcourt, elle, une infinité purement potentielle (à noter qu'il en est ainsi dans le cas des sécantes et de la parallèle, car la sécante tournante se présente comme une fonction de son point d'intersection avec la droite fixe). Ladite construction rationnelle détermine alors une unité naturelle ν pour la mesure de la qualité physique x : la distance focale de la lentille pour l'éloignement OA, le laps de temps $\mathcal{C}R$ pour la durée de la décharge du condensateur. Dans la révélation expérimentale du processus physique, l'infinité potentielle de x s'abrège, se nie en se réduisant à un quantum de la forme $X = k\nu$, où k est un nombre abstrait. A regarder de plus près, ce nombre k n'est pas exactement déterminé, il doit seulement remplir une condition d'appartenance $k \in]\, k_1, k_2 [$ telle que si $x < k_1\nu$ par exemple la fonction possède sûrement la qualité physique de son non-fini et si $x > k_2\nu$ sûrement la qualité physique de son transfini. Et c'est ainsi que ces qualités de la fonction, rigoureuses dans la théorie, apparaissent bien, vues par le côté de la variable, diffuses à l'expérience. Décidément, l'infinité potentielle pure, la nature physique la rejette, elle lui dénie le statut de connaissance, et cela confirme une fois de plus que seul est vrai le concept bipolaire, potentiel-actuel parce que seul apte, sous forme de suite convergente, de dérivée, d'intégrale convergente, à l'adéquation avec l'expérience (la concrétisation physique des dérivées et des intégrales se montrant si foisonnante et si banale qu'il est inutile d'en parler). A l'expérience comme à l'imagination le non-fini pur demeure donc inaccessible « or, ajoute HEGEL, n'est inaccessible que ce qui n'est pas vrai ».

De cette théorie de l'abréviation, la physique offre bien d'autres confirmations. Je mentionnerai succinctement la suivante parce que le changement qualitatif de la fonction y convertit une loi en une autre. Les oscillations, le long de la droite idéale qui les joint, des noyaux composant une molécule biatomique telle que O_2 sont douées d'une énergie ε aléatoire dont la moyenne $\bar{\varepsilon}$ (supposée prise, par exemple, à la même heure sur l'ensemble des molécules contenues dans un volume macroscopique de gaz oxygène sous la pression atmosphérique) varie en fonction de la température T selon la loi

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{\beta T}}-1} + \frac{h\omega}{2}\ ; \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

h (1) et β sont des constantes indifférentes à la qualité chimique du gaz, K désigne la constante d'élasticité de la paire de noyaux oxygène, m leur égale inertie ; ω caractérise donc la molécule O_2. Lorsque la température s'élève indéfiniment, et il s'agit d'une infinité potentielle pure, la fonction $\bar{\varepsilon}\,(T)$ ci-dessus admet au contraire une limite, un transfini : la simple fonction linéaire $\bar{\varepsilon} = \beta T + \frac{h\omega}{2}$. L'unité naturelle ν que détermine la théorie (la thermodynamique quantique) pour la mesure de T vaut ici $\nu = \frac{h\omega}{\beta}$ (on l'appelle température caractéristique des oscillations de O_2). Alors que la construction rationnelle stipule que le passage à la loi linéaire exige T interminablement grande, l'expérience établit qu'il suffit à T de dépasser 3 à 4 ν.

(1) h désigne ici la constante de Planck divisée par 2π.

Enfin, vu l'importance du problème, je voudrais préciser le rôle de l'infini dans la probabilité et la statistique. Le concept de la probabilité, c'est l'opposition entre la nécessité et la contingence qui le structure essentiellement. La logique philosophique traditionnelle classait les quatre « modalités » (nécessité, contingence, possibilité, impossibilité) parmi les catégories. L'impossibilité d'une proposition A s'identifiant avec la nécessité de non-A, la quatrième modalité se ramène à la première et par conséquent la troisième à la seconde puisque la nécessité et la contingence, qui s'avèrent donc les deux modalités essentielles, constituent un dipôle logique : aucune des deux en effet ne se peut définir sinon comme la négation de son opposée. D'où il résulte que la notion de chacune contient celle de l'autre, qu'elles s'excluent et s'impliquent mutuellement, qu'une contradiction vraie, dialectique enfin structure le concept du dipôle. De son côté, l'expérience — non seulement l'observation et l'expérimentation scientifiques mais toutes les pratiques, et l'histoire, et la vie personnelle — établit cette solide vérité déjà énoncée par les Anciens qu'il n'est rien, aucun processus naturel ou humain qui ne combine en lui le nécessaire et le contingent, les lois et les hasards, que le dipôle jamais ni nulle part ne se désunit. Aussi convient-il d'abord de renvoyer dos à dos les déterministes et les indéterministes, dont la commune erreur consiste à briser (abstraitement) le dipôle en proclamant le règne absolu dans le monde les uns de la nécessité, les autres de la contingence. Unilatéralité typique de l'entendement et qui les met, pour commencer, dans l'incapacité totale de définir le souverain de leur choix ! Mieux vaut examiner ce qui advient réellement dans une science concrète comme la physique. Lorsque la connaissance rationnelle d'un objet y prend la forme d'une théorie « déterministe » (en donnant à ce mot le sens restreint de « non probabiliste ») la connaissance empirique de cet objet, elle, traite les résultats de ses mesures par la statistique. Autrement dit, chassée de la construction rationnelle, la contingence revient en force dans le donné expérimental. Ironie de l'histoire, c'est à l'époque même où la mécanique rationnelle (et surtout la céleste) servait de modèle au déterminisme naïf de LAPLACE que GAUSS appliquait pour la première fois le calcul des probabilités aux approximations des mesures astronomiques ! Mais lorsque, au contraire, la connaissance rationnelle d'un objet physique prend la forme d'une théorie probabiliste, dès les prémisses de celle-ci le nécessaire et le contingent se trouvent intimement unis, de sorte qu'une telle théorie se montre plus concrète qu'une théorie déterministe. En effet, l'objet φ s'y conçoit non pas seulement comme le général abstrait et nécessaire de la pensée analytique, mais aussi comme l'ensemble de ses particularités contingentes — dans le cas simple, mais suffisant pour élaborer le concept, où le nombre n de ces particularités est fini, comme l'ensemble $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$. La théorie probabiliste s'élève donc bien jusqu'à la synthèse concrète du général et du particulier, du nécessaire et du contingent. La formalisation mathématique se ramène alors au thème de la variable aléatoire x, inhérente à φ et dont les valeurs contingentes forment l'ensemble $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$; x pouvant désigner une grandeur physique à quantum aléatoire ou bien, si la différence entre les particularités φ_i, $i = 1, 2 \dots n$, est purement qualitative, un ordinal servant à les numéroter. A chacune des x_i on attribue une probabilité p_i, nombre abstrait appartenant à l'intervalle $[0,1]$. Or, aussi bien l'ensemble $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ que l'ensemble en correspondance biunivoque $\{p_1, p_2 \dots p_n\}$ sont déterminés par des postulats physiques ou par des propositions déduites de ces postulats, et il en résulte notamment que les moyennes probabilistes, par exemple la moyenne $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ sont des caractéristiques nécessaires de l'objet φ tout comme les deux ensembles précités. En particulier, une valeur x_i s'avère, contradictoirement, à la fois nécessaire — de par la loi qui stipule son appartenance à l'ensemble $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ — et non-nécessaire (en tant que particularité contingente de φ). C'est ainsi qu'en thermodynamique quantique (exemple précédent) les valeurs ε_i de l'énergie d'oscillation moléculaire sont déterminées par une loi de quantification et leurs probabilités respectives par le théorème de BOLTZMANN, et que la moyenne $\bar{\varepsilon}$ se détermine par une relation (ci-dessus) tout aussi nécessaire que le postulat de NEWTON en mécanique rationnelle céleste. Si bien que le libre jeu de la contingence, pour ainsi dire, ne peut jamais s'exercer que dans d'étroites limites fixées par une nécessité physique impérative. Tel se présente le premier aspect de l'unité dialectique des deux modalités fondamentales : déjà la nécessité y maîtrise le hasard.

Il en est un second. La découverte mathématique de la probabilité a fait descendre les modalités du rang de catégories à celui de qualités. En effet, la probabilité p d'une proposition A n'exprime pas autre chose que le quantum de sa nécessité et $1-p$ celui de la nécessité de non-A. $p = 0$ signifie que A est impossible et non-A purement nécessaire, $p = 1$ que A est purement nécessaire et non-A impossible. C'est $0 < p < 1$ qui dénote la contingence de A, à savoir la possibilité à la fois de A et de non-A, avec pour A un degré de nécessité mesuré par p, et l'on voit là comme les deux modalités opposées s'interpénètrent : il y a de la nécessité dans la contingence ! L'opposition qualitative du zéro et du un d'une part avec tous les autres nombres de l'intervalle $[0,1]$ d'autre part, se concrétise dès lors, dans la probabilité, avec le maximum d'acuité : zéro et un signifient la nécessité pure, les autres nombres la contingence. Si petite que soit p, A demeure possible, mais si $p = 0$, A est absolument impossible ; de même, si peu que p diffère de 1, non-A reste possible tandis que si $p = 1$, la nécessité de A devient absolue. C'est dire que le passage d'une probabilité $0 < p < 1$ à $p = 0$ ou bien à $p = 1$, en tant que passage de la contingence à la nécessité, ne saurait constituer un banal changement quantitatif mais bien une métamorphose qualitative radicale. Or, seul un transfini peut la promouvoir, et c'est précisément ce que confirment les théorèmes groupés sous l'appellation de « loi des grands nombres ». En effet, même si le nombre n des particularités contingentes de l'objet φ est fini, le nombre N de répétitions singulières de cet objet, dans l'espace et dans le temps, est, lui, potentiellement infini — et l'on retrouve là cette infinité potentielle qu'ouvre n'importe quel concept. Lorsqu'au cours de N répétitions de φ la particularité φ_i s'est reproduite N_i fois, la fréquence statistique de φ_i dans cette série de répétitions vaut par définition $f_i = \frac{N_i}{N}$. Or, une opposition qualitative essentielle démarque cette fréquence statistique f_i de la probabilité p_i : celle-ci est nécessaire, celle-là ne l'est point, à savoir f_i se présente comme une particularité contingente de l'objet Φ constitué par N répétitions de l'objet primitif φ. Ceci posé, on démontre que lorsque N parcourt la suite naturelle interminable des nombres entiers, les fréquences f_i tendent vers une limite qui n'est autre que la probabilité p_i. Ainsi la probabilité s'affirme comme le transfini de l'infinité potentielle des fréquences statistiques et le changement qualitatif du pôle potentiel au pôle actuel consiste bien ici dans la conversion de la contingence en nécessité pure. Un autre théorème logiquement équivalent au précédent stipule qu'une moyenne statistique comme $x = \sum_{i=1}^{N} f_i x_i$, qui demeure aléatoire, qui elle aussi est une particularité contingente de l'objet Φ, tend lorsque N augmente indéfiniment vers la moyenne probabiliste $\bar{x}$, qui est nécessaire. Là encore $\bar{x}$ s'affirme comme le transfini de l'infinité potentielle des x et le changement qualitatif de celle-ci à celui-là comme la transformation de la contingence en nécessité. Tel se présente le second trait de l'unité dialectique des deux modalités : grâce à la médiation de l'infini mathématique, le hasard se convertit en sa négation. Le concept de la probabilité, qui n'est autre en définitive que le concept probabiliste de l'objet φ, ce second trait le parachève. En effet, le premier met à jour les nécessités qui s'imposent aux particularités contingentes de φ, le second le retour de cette contingence à la nécessité par la répétition indéfinie de φ et le passage au transfini, mais cette répétition indéfinie d'objets singuliers, le concept de φ l'impliquait (comme tout concept, encore une fois) dès le départ. L'interpénétration des deux modalités opposées elle aussi se complète : le transfini impliquant l'infini potentiel, la nécessité du premier implique (logiquement) et donc contient (ontologiquement) la contingence du second. Bien entendu, tous les éléments du concept probabiliste se trouvent dans les traités usuels, mais épars : qu'on y cherche le concept lui-même, son unité, sa structure, et l'on perdra sa peine.

Reste la confrontation de la théorie probabiliste avec l'expérience : c'est par la statistique qu'elle s'opère. Seules, au premier abord, les fréquences et les moyennes statistiques sont directement accessibles au dénombrement ou à la mesure pratique, non leurs homologues probabilistes. Mais ici va jouer l'abréviation de l'infinité purement potentielle du nombre N des répétitions de l'objet : lorsqu'il devient suffisamment grand, les différences telles que $|p_i - f_i|$ ou $|\bar{x} - x|$ entre grandeurs probabilistes, transfinis relevant de la construction rationnelle, et grandeurs statistiques, connaissables empiriquement, ces différences deviennent inaccessibles à la perception, à la mesure, et par conséquent physiquement nulles, niées. En d'autres termes, les transfinis probabilistes viennent s'intégrer au donné expérimental du fait que dans celui-ci la contingence et la nécessité, qualités dures et pures en théorie, se révèlent (légèrement) fluides et floues. D'où l'appellation, empiriquement bien justifiée, de « loi des grands nombres » donné aux théorèmes concernant la conversion de la contingence en nécessité. Par excellence, c'est la physique qui délivre à ces théorèmes leur plus précise vérification expérimentale. Les corpuscules microphysiques qui composent un corps macroscopique, même une gouttelette d'eau à peine visible à l'œil nu, forment en effet une collection de cardinal si grand qu'il défie toute imagination. Aussi une loi probabiliste, du genre de celle qui détermine $\bar{\varepsilon}$ (ci-dessus) peut-elle recevoir de l'expérience une confirmation hautement précise, autant et souvent davantage qu'une loi édictée par une théorie déterministe. Et l'on ne saurait trop souligner que toute loi relève de la nécessité, au sein de la connaissance rationnelle, que celle-ci soit probabiliste ou non. En définitive, la physique impose la conclusion suivante : primo, qu'on en élabore une théorie de l'un ou l'autre type, l'objet concret, à la fois conçu et expérimenté, rejette le règne absolu de la nécessité comme de la contingence mais unit en lui les deux modalités ; secundo, la nécessité domine fortement en lui la contingence, ce qui d'ailleurs explique pourquoi une science de la nature physique a pu se constituer, le but de toute science étant la découverte de lois.

Je voudrais, pour terminer, éviter tout malentendu. Sans analyse abstraite, point de science, point de synthèse concrète, celle-ci ne pouvant se construire que sur la base de données analytiques rigoureuses. Si j'ai critiqué le discours usuel des sciences exactes, ce n'est donc point parce qu'il met à l'œuvre l'entendement, mais parce qu'il s'arrête, ou presque, à ce stade primaire, rudimentaire de la rationalité. Bien davantage encore, parce qu'il verse de plus en plus dans la pseudo-rationalité de l'opérationnalisme, tendance dont un physicien, P.-W Bridgman, expérimentateur de grand talent, a été l'un des protagonistes et qui me paraît la plus pernicieuse, la plus représentative de l'« apensée » scientifique qui se répand dans les sociétés à haut développement technique. Mais je ne suis pas non plus contre la technique, à condition qu'elle serve uniquement à satisfaire les besoins réels de tous les hommes sans en asservir aucun (condition très loin d'être remplie par lesdites sociétés) et qu'elle demeure, en conséquence, dominée de haut par la pensée au lieu que celle-ci se laisse investir et à demi étouffer par elle. En particulier, je tiens pour légitime l'élaboration de théories formalisées, d'algorithmes, à condition de les traiter comme des auxiliaires du concept, des auxiliaires indispensables dans une science comme la physique, mais seulement des auxiliaires. Et il n'est de concept vrai que concret, c'est à dire synthétique, et qu'ouvert, c'est-à-dire critique.

Manuscrit, reçu le 15 janvier 1969.

BIBLIOGRAPHIE

A

I. Lalande (A.). — *Vocabulaire de la philosophie*, 1 vol. édit. PUF, Paris (1960).

II. Aristote. — *Physique*. 2 vol. t. 1, pp. 95-108, édit. Les Belles lettres, Paris (1926-1932).

III. Hegel (G.W.F.). — *Science de la logique*. 2 vol. t. I, pp. 246-352, 379-380, édit. Aubier, Paris (1947-1949).

IV. Piaget (J.), Apostel (L.) etc. — *Logique et connaissance scientifique*. 1 vol. article de Lichnérovicz (A.), pp. 474-484, édit. NRF, Paris (1967).

V. Cavaillès (J.). — *Transfini et continu*. 1 vol. édit. Hermann, Paris (1947).

VI. Lautman (A.). — *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*. 1 vol. édit. Hermann, Paris (1939).

B

VII. Kamke (E.). — *Théorie des ensembles*. 1 vol. édit. Dunod, Paris, (1964).

VIII. Sierpinski (W.). — *Leçons sur les nombres transfinis*. 1 vol. édit. Gauthier-Villars, Paris (1928).

IX. Fréchet (M.). — *L'arithmétique de l'infini*. 1 vol. édit. Hermann, Paris (1934).

X. Denjoy (A.). — *L'énumération transfinie*. 4 vol. édit. Gauthier-Villars, Paris (1954).

XI. Borel (E.), Bourbaki (N.) etc. — *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par F. Le Lionnais) 1 vol. article Denjoy pp. 188-195, édit. Cahiers du Sud, Paris (1948).

XII. Vassails (G.). — *Les logiques métriques divalentes*. Ann. Université de Madagascar, série Sc. de la nat. et math. t. 5, pp. 21-34 (1967).

XIII. Bassière (M.) et Gaignebert (E.). — *Métrologie générale*. 1 vol. édit. Dunod, Paris (1966).