NOTE SUR L'ANTINOMIE

PAR

Gérard VASSAILS

(Laboratoire de Physique)

RÉSUMÉ

1. — L'antinomie trouve dans les logiques métriques sa solution mathématique en tant que forme de raisonnement susceptible d'être vrai.

2. — Une logique métrique peut être construite à partir des quaternions comme véracités. Comme celle qui se fonde sur les véracités complexes, elle est dialectique : la contradiction et l'antinomie n'y sont pas nécessairement fausses, elles peuvent y être vraies.

★

On le sait, l'antinomie est un raisonnement formellement rigoureux — selon l'exigence de rigueur de la logique classique — dont l'hypothèse est l'affirmation qu'une proposition A est vraie et la conclusion la vérité de la contradictoire A* de A. Dans cette note, nous ne saurions entreprendre un examen des nombreux travaux consacrés à l'antinomie depuis environ 70 ans [II] et [III]. Nous retiendrons seulement que les logiciens classiques se sont efforcés d'éliminer les antinomies sans y parvenir toujours de manière satisfaisante — but tout naturel pour eux puisque l'antinomie recèle une contradiction ; que les intuitionnistes et les logiciens non classiques (appelés « hétérodoxes » par E.W. BETH) n'ont pas selon nous réussi à doter, de manière convaincante, l'antinomie d'un statut logico-mathématique d'opération logique licite, de raisonnement capable d'accéder à la vérité — lorsque son contenu concret s'y prête.

Admettant qu'une contradiction n'est pas nécessairement fausse et peut même être vraie, les logiques métriques [I] sont en mesure d'accorder à l'antinomie ce statut de légitimité.

L'ANTINOMIE EN LOGIQUE MÉTRIQUE

L'antinomie peut être réduite à la forme simple de deux implications vraies ensemble :

$$\begin{cases} v\,(A \rightarrow A^*) = 1 & (1) \\ v\,(A^* \rightarrow A) = 1 & (2) \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter la vérité de la contradiction

$$v\,(A \wedge A^*) = 1 \qquad (3)$$

car si A est affirmée vraie, (1) $\Rightarrow$ A* vraie et si A* est postulée vraie, (2) $\Rightarrow$ A vraie, d'où (3).

La véracité de l'implication $A_1 \rightarrow A_2$ est en logique métrique $u_1 u_2 - a_1 a_2^*$. Dans (1), a_1 est la véracité a de A, a_2 la véracité a^* de A*, $a_2^* = a^{**}$; u_1 est un négateur u de A ; u_2 est un négateur u' de A* : en logique métrique $u \neq u'$ en général, car la négation de la négation A** n'est pas nécessairement A. Dans (2), $a_1 = a^*$, $a_2^* = a^*$. (1), (2) et (3) s'écrivent donc, V étant la fonction de valuation ;

$$\begin{cases} v\,(A \rightarrow A^*) = V\,(uu' - aa^{**}) = 1 & (1\ bis) \\ v\,(A^* \rightarrow A) = V(u'u - a^{*2}) = 1 & (2\ bis) \\ v\,(A \wedge A^*) = V\,(a)\,V\,(u - a) = 1 & (3\ bis) \end{cases}$$

EN LOGIQUE QUASI-DIALECTIQUE

$a \in [0,1]$, V (a) = a et tout négateur est égal à 1.

Donc

$$\begin{cases} v\,(A \rightarrow A^*) = 1 - a^2 \\ v\,(A^* \rightarrow A) = 2a - a^2 \\ v\,(A \wedge A^*) = a\,(1 - a) \end{cases}$$

L'antinomie ne peut recevoir dans cette logique qu'une solution approchée. Par exemple, choisissons $v\,(A) = v\,(A^*) = 0{,}5$: dans l'antinomie du menteur, les propositions « Epiménide le Crétois dit vrai » et « Epiménide le Crétois dit faux » seraient vraies toutes deux à 50 % . Alors

$$v\,(A \rightarrow A^*) = 0{,}75 = v\,(A^* \rightarrow A)$$
$$v\,(A \wedge A^*) = 0{,}25$$

EN LOGIQUE DIALECTIQUE BOOLÉENNE

En logique métrique à véracités complexes, a est un nombre complexe de module $|a| \in [0,1]$,

$V(a) = |a|^2$ et $|u| = 1$. (3) $\Rightarrow a = e^{i\alpha}$,
$u = e^{i(\alpha \pm \frac{\pi}{3})}$, $a^* = e^{i(\alpha \pm \frac{2\pi}{3})}$. (1 *bis*) et (2 *bis*) s'écrivent en posant $u' = e^{i(\alpha + \beta)}$:

$$v(A \to A^*) = \left| e^{i(\beta \pm \frac{\pi}{3})} - e^{i\beta} + e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \right|^2 = 2(1 + \cos\beta)$$

$$v(A^* \to A) = \left| e^{i(\beta + \frac{\pi}{3})} - e^{\pm i\frac{4\pi}{3}} \right|^2 = 2(1 + \cos\beta)$$

$$v(A \to A^*) = v(A^* \to A) = 1 \Rightarrow \beta = \pm \frac{2\pi}{3}$$

La différence entre les arguments de a^* et de son négateur u' ne pouvant en valeur absolue excéder $\frac{\pi}{3}$, il faut prendre $\beta = \frac{2\pi}{3}$ lorsque $u = e^{i(\alpha + \frac{\pi}{3})}$ et $\beta = -\frac{2\pi}{3}$ lorsque $u = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{3})}$ c'est-à-dire, dans les deux cas, $u' = a^*$, ce qui entraîne $a^{**} = 0$: la négation de la négation A^{**} doit être fausse.

L'antinomie est donc reçue, en logique métrique dialectique, comme un raisonnement licite, susceptible d'être vrai avec un choix convenable des négateurs. Le système des relations (1), (2) et (3) y trouve sa solution mathématique.

LOGIQUE MÉTRIQUE A VÉRACITÉS QUATERNIONIQUES

La logique métrique à véracités complexes se généralise en prenant comme ensemble des véracités celui des quaternions a de module $|a| \in [0,1.]$ Si $a = (r, \vec{\alpha})$. r réel et $\vec{\alpha}$ vecteur d'un espace vectoriel tridimensionnel euclidien, la valuation ou degré de vérité d'une proposition A de véracité a sera $v(A) = V(a) = |a|^2 = r^2 + \alpha^2$, α^2 norme de $\vec{\alpha}$.

La fonction de valuation V, appliquée aux quaternions, se conforme bien aux axiomes constitutifs d'une logique métrique : $V(0) = 0$, $V^{-1}(0) = 0$ et $V(a_1 a_2) = V(a_1) V(a_2)$. Le cas des quaternions permet de préciser le contenu de ces axiomes en ce qui concerne la commutativité de la multiplication des véracités. En effet, dans ce cas $a_1 a_2 \neq a_1 a_2$ mais

$$V(a_1 a_2) = V(a_1).V(a_2) \Rightarrow V(a_2 a_1) = V(a_1 a_2)$$

Dans toute logique métrique l'ensemble des véracités doit être une partie, stable pour la multiplication, d'un demi-anneau mais il n'est donc pas nécessaire que dans celui-ci la multiplication soit commutative. Il suffit que la valuation déterminée par le produit $a_1 a_2$ le soit pour que la conjonction $A_1 \wedge A_2$ demeure une coordination logique commutative.

Puisque la logique métrique à véracités complexes est dialectique, à fortiori la logique métrique quaternionique c'est-elle : la contradiction et l'antinomie peuvent y accéder à la vérité.

Comme de toute logique métrique, on peut déduire de celle qui se construit sur les quaternions une nouvelle théorie des probabilités, différente et de la classique et de la quantique.

Manuscrit reçu le 10 février 1967.

RÉFÉRENCES

I. G. VASSAILS, *Les logiques métriques divalentes*, Annales de l'Université de Madagascar, série Sciences de la nature et Mathématiques, nº 5, 1967.

II. E.W. BETH, *Les fondements logiques des mathématiques*, chez Gauthier-Villars, Paris, 1955 (Livre V).

III. S. KURODA (J. Symb. Logic. 23, 1958). F. CECIONI (Ann. Math. Pura Appl. 48, 1959). G.H. Von WRIGTH (Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. Math. 24, 1960). D.A. BOCVAR (Math. Sb. N.S. 52, 94, 1960). A.N. PRIOR (Notre-Dame J. Formal Logic 2, 1961). L. LOMBARDO RADICE (Arch. Math. 13, 1962) F.C. ASENJO (Amer. Math. Soc. Not. 11, nº 6, 1964).