

LES LOGIQUES MÉTRIQUES DIVALENTES

PAR

Gérard VASSAILS

(Laboratoire de Physique)

RÉSUMÉ

Dans les logiques métriques divalentes les valuations des propositions forment un ensemble non dénombrable : l'intervalle $[0,1]$. En outre, on se donne un ensemble E de véracités a , soumis à certaines conditions, et la valuation v est $v = V(a)$, V application réciproque de E sur $[0,1]$. L'algèbre propositionnelle générale des logiques métriques divalentes est alors construite à partir de 4 axiomes. Elle contient la logique classique (non métrique) comme cas particulier.

Elle est appliquée d'abord au cas où $E = [0,1]$ et où V est l'application identique. On obtient ainsi une logique métrique dans laquelle la contradiction peut avoir un degré de vérité non nul mais ne peut pas être vraie ; pour cette raison cette logique est appelée quasi-dialectique. La réduction booléenne de cette logique est la logique classique.

Ensuite, l'algèbre générale est appliquée au cas où E est l'ensemble des nombres complexes a de module $|a| \leq 1$ et où $V(a) = |a|^2$. On obtient ainsi une logique métrique dans laquelle la contradiction peut être vraie et qui est appelée dialectique pour cette raison. La réduction booléenne de cette logique est la logique dialectique booléenne, qui n'est pas métrique.

Toute logique métrique divalente engendre une théorie des probabilités : la logique quasi-dialectique la théorie classique des probabilités, la logique métrique dialectique la théorie quantique des probabilités. Le raisonnement prévisionnel probabiliste procède d'une logique métrique et non de la logique classique.

AXIOMES ET DÉFINITIONS

Par définition, une logique est métrique si l'ensemble des valuations n'est pas dénombrable. Dans les logiques métriques divalentes, cet ensemble est l'intervalle $[0,1]$, v désignant la valuation (ou degré

de vérité) d'une proposition (ou énoncé) A , A fausse $\Leftrightarrow v = 0$; A vraie $\Leftrightarrow v = 1$; A approchée $\Leftrightarrow 0 < v < 1$. La valeur en logique métrique devient une grandeur continue mesurable, d'où le qualificatif « métrique ». Nous posons ci-dessous les définitions **D** et les axiomes **A** fondamentaux.

D₁. — Un ensemble est un *demi-anneau* (commutatif) s'il existe deux lois de composition interne : l'addition, commutative, associative, admettant un élément neutre noté 0 (mais pas nécessairement d'opposés) ; la multiplication, associative, distributive, admettant un élément neutre (mais pas nécessairement d'inverses).

Nous désignons par F un ensemble non dénombrable dont la structure algébrique est *au moins* celle d'un demi-anneau ; F est donc un demi-anneau, ou un anneau, ou un corps.

Axiomes

A₁. — Toute proposition A est dotée d'une *véracité* a , élément d'un ensemble E qui est une partie, non dénombrable et stable pour la multiplication, de l'ensemble F .

A₂. — Toute proposition A est dotée d'une valuation $v \in [0,1]$ telle que $v = V(a)$, V application réciproque (1) de E sur $[0,1]$ soumise aux conditions suivantes :

$$V^{-1}(0) = \emptyset ; \quad V(a_1 a_2) = V(a_1) V(a_2)$$

A₃. — Si A^* , de véracité a^* , désigne la négation ou contradictoire de A , on doit avoir :

$$V(a + a^*) = 1$$

Soient données n propositions A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, de véracités a_i et soient a_i^* les véracités de leurs contradictoires.

(1) Mais non nécessairement biunivoque.

D₂. — Une proposition composée (ou coordination logique ou expression logique) d'ordre n est une proposition dont la véracité c est une fonction des a_i et des a_i^* .

$c = f_n(a_1, a_1^*, a_2, a_2^* \dots a_n, a_n^*)$
 f_n a ses valeurs dans F ; elle ne détermine une véracité que si $c \in E$. La condition d'existence d'une proposition composée définie par f_n est donc $c \in E$ ou, ce qui est équivalent, $V(c) \in [0,1]$.

A₄. — f_n est un polynôme dans lequel chacun des indices $1, 2, \dots, n$ doit figurer au moins une fois et dont tous les coefficients sont égaux à l'unité.

La condition $V(a_1 a_2) = V(a_1) V(a_2)$ exige la stabilité de E pour la multiplication car $[0,1]$ possède cette stabilité et la fonction V est réciproque.

Deux corollaires immédiats se déduisent des énoncés **A** et **D** ci-dessus. Tout d'abord, il résulte de **A₂** que $V(0) = 0$.

En second lieu, si e désigne l'élément neutre de la multiplication des véracités, on a $V(e.e) = V(e)$ et **A₂** $\Rightarrow V(e) \cdot V(e) = V(e)$. La solution $V(e) = 0$ de cette équation est à rejeter car **A₂** entraînerait $e = 0$; reste donc $V(e) = 1$.

Une proposition composée s'écrit à l'aide des symboles A_i liés par des symboles de coordination logique : nous allons dorénavant introduire ces derniers.

Conjonction et complémentarité

Appliquons **A₄** au cas $n = 2$. Parmi les polynômes f_2 figurent le monôme $a_1 a_2$ et le polynôme $a_1 + a_2$.

D₃. — La *conjonction* de deux propositions A_1 et A_2 est la proposition composée, notée $A_1 \wedge A_2$ dont la véracité est $a_1 a_2$.

D₃ et **A₂** $\Rightarrow v(A_1 \wedge A_2) = V(a_1 a_2) = V(a_1) V(a_2)$

D'après **A₂**, la conjonction est commutative. De la stabilité de E et de $[0,1]$ pour la multiplication, il résulte que $\forall a_1, \forall a_2, A_1 \wedge A_2$ existe.

Comme en logique classique,

$$\begin{aligned} v(A_1) = v(A_2) = 1 &\Leftrightarrow v(A_1 \wedge A_2) = 1 \\ v(A_i) = 0 &\Rightarrow v(A_1 \wedge A_2) = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

Par contre, **D₃** $\Rightarrow v(A \wedge A) = V(a^2) = [V(a)]^2$.

En général donc, sauf si $v(A) = 0$ ou si $v(A) = 1$, la conjonction n'est pas idempotente en logique métrique.

D₄. — La *complémentarité* de deux propositions A_1 et A_2 est la proposition composée, notée $A_1 \wedge A_2$

dont la véracité est $a_1 + a_2$. D'après **A₁**, la complémentarité est commutative. Elle n'existe que si $a_1 + a_2 \in E$.

Lorsque $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, pour que $v(A_1 \wedge A_2) = 0$ il faut que $a_1 + a_2 = 0$, donc que l'addition des véracités admette des opposés.

Négation et contradiction

Lorsque $n = 1$, figurent parmi les fonctions f_1 le polynôme $a + a^*$ et le monôme aa^* .

A₃ et **D₄** $\Rightarrow v(A \wedge A^*) = V(a + a^*) = 1$: la complémentarité de deux contradictoires est toujours vraie.

D₅. — Posons $a + a^* = u$; u est un *négateur* de A si les trois conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} u \in E \\ V(u) = 1 ; u \text{ véracité unitaire (d'après } \mathbf{A}_3) \\ u - a = a^* \in E \text{ (d'après } \mathbf{A}_1) \end{cases}$$

En général, ces trois conditions peuvent être satisfaites par un ensemble de négateurs de A ; alors la contradictoire A^* dispose a priori, a une fois fixée, d'un ensemble de véracités $a^*(u)$. C'est donc le choix d'un négateur qui, dans un problème de logique appliquée, fixera la véracité de la contradictoire.

Si u est un négateur de A , il est aussi un négateur de A^* . En effet,

$$u \in E ; V(u) = 1 ; u - a^* = a \in E$$

D₆. — La conjonction d'une proposition et de sa contradictoire est appelée *contradiction*.

A₂, D₃, D₅ $\Rightarrow v(A \wedge A^*) = V(aa^*) = V(a) \cdot V(u - a)$

En logique métrique, une contradiction n'est pas nécessairement fausse. Elle peut être vraie; alors :

$$v(A \wedge A^*) = 1 \Leftrightarrow v(A) = v(A^*) = 1$$

Dans ce travail nous élaborerons deux logiques métriques particulières : dans l'une, appelée *quasi-dialectique* parce que la contradiction ne peut y être vraie mais peut être approchée, $E = [0,1]$ et $V(a) = a$; dans l'autre, appelée *héralitéenne* ou *dialectique* parce que la contradiction peut y être vraie, les véracités sont les nombres complexes de module $|a| \in [0,1]$ et $V(a) = |a|^2$. Nous avons montré par ailleurs [II] que la logique classique est propre à l'activité analytique ou abstraite de la pensée tandis que la logique dialectique (et dans une moindre mesure la quasi-dialectique) est propre à son activité synthétique ou concrète.

ALGÈBRE PROPOSITIONNELLE GÉNÉRALE DES LOGIQUES MÉTRIQUES (1)

Propositions composées normales

D₇. — Une proposition composée d'ordre n est dite *normale* et le polynôme P_n^p qui détermine sa véracité est dit normal si ce polynôme est homogène de degré p , si dans aucun de ses monômes il n'y a de répétitions d'indices et si aucun monôme n'est répété.

D₈. — Un polynôme normal est dit *complet* et noté \bar{P}_n^p s'il comprend tous les monômes de degré p permis par l'analyse combinatoire.

Il est aisé de voir que les polynômes normaux complets peuvent être formés à partir des complémentarités de contradictoires $A_i \wedge A_i^*$, de véracité $a_i + a_i^* = u_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \bar{P}_n^1 &= \sum_i (a_i + a_i^*) = \sum_i u_i \\ P_n^2 &= \sum_{(ij)} (a_i + a_i^*) (a_j + a_j^*) = \sum_{(ij)} u_i u_j \end{aligned}$$

où (ij) désigne une combinaison de deux indices ; P_n^2 comprend $2^2 C_n^2$ monômes de degré 2.

De même,

$$P_n^3 = \sum_{(ijk)} (a_i + a_i^*) (a_j + a_j^*) (a_k + a_k^*) =$$

$\sum u_i u_j u_k$ où (ijk) désigne une combinaison de (ijk)

3 indices ; P_n^3 comprend $2^3 C_n^3$ monômes de degré 3. Et ainsi de suite jusqu'à

$$\bar{P}_n^n = (a_1 + a_1^*) (a_2 + a_2^*) \dots (a_n + a_n^*) = u_1 u_2 \dots u_n$$

qui comprend 2^n monômes de degré n .

Toute proposition composée normale a une véracité égale soit à l'un des monômes d'un polynôme normal complet, soit à une somme de plusieurs de ces monômes.

D₉. — Une famille p de propositions composées normales d'ordre n contient toutes celles qui dérivent du polynôme normal complet P_n^p . Au sein d'une même famille, les propositions peuvent être classées en groupes selon le nombre des monômes de P_n^p qui composent P_p^n .

Propositions binaires normales : famille 2, groupe 1

$$\bar{P}_2^2 = a_1 a_2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^* = u_1 u_2$$

(1) ou logique métrique générale des énoncés.

Le groupe 1 est celui des propositions binaires dont la véracité est la somme d'un nombre impair de monômes de \bar{P}_2^2 .

Les monômes de \bar{P}_2^2 sont les véracités respectives des conjonctions $A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2^*, A_1^* \wedge A_2^*$ et $A_1^* \wedge A_2$ qui existent sans conditions.

D₁₀. — Le polynôme $a_1 a_2^* + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^* = u_1 u_2 - a_1 a_2$ est la véracité de la proposition appelée *incompatibilité* de A_1 et A_2 et notée $A_1^* \vee A_2^*$.

L'incompatibilité existe si $A_1 \wedge A_2$ admet $u_1 u_2$ comme négateur. Alors, d'après **A₃**, **D₄** et **D₅**, on a :

$$v(A_1^* \vee A_2^*) = v[(A_1 \wedge A_2)^*]$$

et la véracité de $A_1^* \vee A_2^*$ est fixée, une fois fixée $a_1 a_2$, par le négateur $u_1 u_2$. $A_1^* \vee A_2^*$ est commutative.

D₁₁. $a_1 a_2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 = u_1 u_2 - a_1^* a_2^*$ est la véracité de la proposition composée appelée *disjonction* de A_1 et A_2 et notée $A_1 \vee A_2$.

La disjonction existe si $A_1^* \wedge A_2^*$ admet $u_1 u_2$ comme négateur. Alors,

$$v(A_1 \vee A_2) = v[(A_1^* \wedge A_2^*)^*]$$

et la véracité de $A_1 \vee A_2$ est fixée, $a_1^* a_2^*$ une fois fixée, par le négateur $u_1 u_2$.

D₁₂. $a_1 a_2 + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^* = u_1 u_2 - a_1^* a_2$ est la véracité de la proposition composée appelée *implication* de A_2 par A_1 notée indifféremment $A_1^* \vee A_2$ ou $A_1 \rightarrow A_2$.

L'implication existe si $A_1^* \wedge A_2$ admet $u_1 u_2$ comme négateur. Alors,

$$v(A_1 \rightarrow A_2) = v[(A_1^* \wedge A_2)^*]$$

et la véracité de $A_1 \rightarrow A_2$ est fixée, une fois fixée $a_1^* a_2$, par le négateur $u_1 u_2$.

La condition d'existence de $A_1^* \vee A_2^*, A_1 \vee A_2, A_1^* \vee A_2$ et $A_1 \vee A_2^*$ est la suivante :

Condition C₁. A_1 et A_2 étant deux propositions quelconques, $\exists u_1$ négateur de A_1 et $\exists u_2$ négateur de A_2 tels que $u_1 u_2$ soit un négateur de $A_1 \wedge A_2$.

En effet, si E et la fonction V peuvent remplir cette condition, alors $A_1^* \vee A_2^*$ existe, mais comme u_1 est aussi un négateur de A_1^* et u_2 de A_2^* les autres disjonctions peuvent exister aussi.

Propositions binaires normales : famille 2, groupe 2

La véracité d'une proposition de ce groupe est la somme d'un nombre pair de monômes de \bar{P}_2^2 .

D₁₃. $a_1a_2 + a_1^*a_2^*$ est la véracité de la proposition composée appelée *concordance* et notée $A_1 \rightleftharpoons A_2$.

D₁₄. $a_1a_2^* + a_1^*a_2$ est la véracité de la proposition composée appelée *discordance* et notée $A_1 \times A_2$.

Condition C₂. $A_1 \rightleftharpoons A_2$ existe si $\exists u_1$ négateur de A_1 et $\exists u_2$ négateur de A_2 tels que $a_1a_2 + a_1^*a_2^* \in E$.

Condition C₃. $A_1 \times A_2$ existe si $\exists u_1$ négateur de A_1 et $\exists u_2$ négateur de A_2 tels que $a_1a_2^* + a_1^*a_2 \in E$.

Si **C₁** et **C₂** sont satisfaites, alors

$$v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = v[(A_1 \times A_2)^*] \text{ et } v(A_1 \times A_2) = v[(A_1 \rightleftharpoons A_2)^*].$$

Nous laissons de côté les coordinations de ce groupe dont les véracités respectives sont $a_1a_2 + a_1a_2^* = u_2a_1, a_1a_2 + a_1^*a_2 = u_1a_2, a_1a_2^* + a_1^*a_2^* = u_1a_1^*$ et $a_1^*a_2 + a_1^*a_2^* = u_2a_1^*$ et dont les degrés de vérité sont déterminés par la véracité de l'une seulement des propositions A_1, A_1^*, A_2, A_2^* .

Propositions binaires normales : famille 1

$$\bar{P}_2^1 = a_1 + a_2 + a_1^* + a_2^* = u_1 + u_2.$$

Nous avons déjà défini la complémentarité.

D₁₅. $a_1 + a_2^*$ est la véracité de la *complémentarité inverse* de A_1 et A_2 , notée $A_1^* \mathcal{M} A_2^*$.

Condition C₄. $\exists u_1$ négateur de A_1 et $\exists u_2$ négateur de A_2 tels que si $a_1 + a_2 \notin E$ alors $a_1^* + a_2^* \in E$.

A noter que dans **C₄** les véracités interviennent et pas seulement les négateurs. **C₄** satisfaite, si $A_1 \mathcal{M} A_2$ n'existe pas, alors $A_1^* \mathcal{M} A_2^*$ existe et réciproquement.

D₁₆. $a_1 + a_2^*$ est la véracité de la proposition composée appelée *équivalence* et notée $A_2 - A_1$.

La dénomination « équivalence » est due à ce que $a_1 = a_2 \Rightarrow v(A_2 - A_1) = v(A_1 - A_2) = 1$

En effet,

$$a_1 + a_2^* = a_1 - a_2 + u_2 \text{ et } a_1^* + a_2 = a_2 - a_1 + u_1$$

$$a_1 = a_2 \Rightarrow v(A_2 - A_1) = V(u_2) = 1 \text{ et } v(A_1 - A_2) = V(u_1) = 1$$

C₄ satisfaite, l'une au moins des deux équivalences, $A_2 - A_1$ et $A_1 - A_2$ existe puisque $A_2 - A_1 \equiv A_1 \mathcal{M} A_2^*$ et $A_1 - A_2 \equiv A_1^* \mathcal{M} A_2$.

Tableau des principales propositions binaires normales

	Notation	Nom	Véracité
Famille 2 Groupe 1	$A_1 \wedge A_2$	Conjonction	a_1a_2
	$A^* \vee A^*$	Incompatibilité	$u_1u_2 - a_1a_2^*$
	$A_1 \vee A_2$ $= u_2a_1 + u_1a_2 - a_1a_2$	Disjonction	$u_1u_2 - a_1^*a_2^*$
	$A_1 \rightarrow A_2$ $= u_1u_2 - a_1(u_2 - a_2)$	Implication	$u_1u_2 - a_1a_2^*$
Famille 2 Groupe 2	$A_1 \rightleftharpoons A_2$ $= u_1u_2 - (u_2a_1 + u_1a_2) + 2a_1a_2$	Concordance	$a_1a_2 + a_1^*a_2^*$
	$A_1 \times A_2$ $= u_2a_1 + u_1a_2 - 2a_1a_2$	Discordance	$a_1a_2^* + a_1^*a_2$
Famille 1	$A_1 \mathcal{M} A_2$	Complémentarité	$a_1 + a_2$
	$A_1^* \mathcal{M} A_2^*$	Complémentarité inverse	$a_1^* + a_2^*$
	$= u_1 + u_2 - (a_1 + a_2)$		
	$A_2 - A_1$	Équivalence	$a_1 + a_2^*$
	$= a_1 + u_2 - a_2$		
	$A_1 - A_2$	Équivalence	$a_1^* + a_2$
	$= u_1 - a_1 + a_2$		

Propositions normales d'ordre n : familles 1 et n

Nous ne retiendrons ici que ces deux familles et seulement quelques unes des coordinations qui les composent.

$$\bar{P}_n^1 = a_1 + a_2 \dots + a_n + a_1^* + a_2^* \dots + a_n^* = u_1 + u_2 \dots + u_n.$$

L'addition des véracités est associative (**A₁**) mais la complémentarité ne l'est en général pas. Nous écrirons en effet dans tous les cas $A_1 \mathcal{M} A_2 \mathcal{M} A_3$ la proposition composée dont la véracité est $c = a_1 + a_2 + a_3, c \in E$. Si et si seulement $A_1 \mathcal{M} A_2$ existe ($a_1 + a_2 \in E$) et $A_2 \mathcal{M} A_3$ existe ($a_2 + a_3 \in E$) il y a associativité, résultant de celle de l'addition des véracités; $(A_1 \mathcal{M} A_2) \mathcal{M} A_3, A_1 \mathcal{M} (A_2 \mathcal{M} A_3)$ et $A_1 \mathcal{M} A_2 \mathcal{M} A_3$ ont alors la même véracité $a_1 + a_2 + a_3$. La complémentarité des n propositions A_1 , commutative, est donc la proposition composée, tirée de $\bar{P}_1^n, A_1 \mathcal{M} A_2 \dots \mathcal{M} A_n$ dont la véracité est $a_1 + a_2 \dots + a_n$.

On aura de même la complémentarité inverse de n propositions, commutative mais non associative en général par rapport aux A_i^* , notée $A_1^* \mathcal{M} A_2^* \dots \mathcal{M} A_n^*$ et de véracité $a_1^* + a_2^* \dots + a_n^*$.

Si l'ensemble E et la fonction V satisfont à **C₄**, alors quand la complémentarité n'existe pas la complémentarité inverse existe.

$$\overline{P}_n^n \quad (a_1 + a_1^*) (a_2 + a_2^*) \dots (a_n + a_n^*) \\ u_1 u_2 \dots u_n.$$

La multiplication des véracités étant associative, la conjonction l'est aussi car elle n'est soumise à aucune condition d'existence.

$A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$, $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ et $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ ont toujours même véracité $a_1 a_2 a_3$.

La conjonction des n propositions A_i , commutative et associative, est donc la proposition composée notée $A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n$ dont la véracité est $a_1 a_2 \dots a_n$, qui est l'un des monômes de P_n^n .

Si C_1 est satisfaite par $u_2 u_3$ et par $u_1 u_2 u_3$, l'incompatibilité $A_1^* \vee (A_2^* \vee A_3^*)$ existe, elle est alors la négation par le négateur $u_1 (u_2 u_3) = u_1 u_2 u_3$ de la conjonction $A_1 \wedge (A_2 \wedge A_3)$, identique à $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$. Si en outre $u_1 u_2$ satisfait à C_1 , l'incompatibilité $(A_1^* \vee A_2^*) \vee A_3^*$ existe et elle est aussi la négation par le négateur $u_1 u_2 u_3$ de la conjonction $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$. On voit que si la condition C_1 est satisfaisante partout où elle est nécessaire, il existe une incompatibilité de A_1, A_2 et A_3 , commutative et associative, que l'on notera $A_1^* \vee A_2^* \vee A_3^*$ et qui aura pour véracité $u_1 u_2 u_3 = a_1 a_2 a_3$; plus généralement, il pourra exister une incompatibilité commutative et associative des n propositions A_i notée $A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^*$ et qui aura comme véracité $u_1 u_2 \dots u_n = a_1 a_2 \dots a_n$. Mais on peut aussi comme pour la complémentarité, noter dans tous les cas $A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^*$ la proposition composée, non associative en général, de véracité $u_1 u_2 \dots u_n = a_1 a_2 \dots a_n$.

De même, grâce à un choix convenable des négateurs, il pourra exister une disjonction des n propositions A_i , commutative et parfois associative, notée $A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n$ et de véracité $u_1 u_2 \dots u_n = a_1^* a_2^* \dots a_n^*$.

Réduction booléenne d'une logique métrique. Logique classique

La réduction booléenne d'une logique métrique divalente consiste à réduire l'ensemble $[0,1]$ des valuations à l'ensemble $\{0,1\}$; en conséquence, l'ensemble E des véracités ne conserve que son élément neutre 0, puisque $V^{-1}(0) = 0$, et l'ensemble des véracités unitaires. On obtient ainsi une logique booléenne, non métrique puisque $\{0,1\}$ est dénombrable.

Nous allons montrer que la logique classique est l'une de ces réductions booléennes, qu'en d'autres termes la logique métrique générale des énoncés contient la logique classique des énoncés comme cas particulier.

En effet, l'algèbre propositionnelle classique tout entière peut se déduire de la valuation de la négation et de celle de la conjonction, en définissant à partir de celle-ci et de proche en proche les autres propositions composées. Nous savons déjà que si les valuations de A_1 et de A_2 sont booléennes celle de $A_1 \wedge A_2$ est la même en logique métrique générale qu'en logique classique.

En ce qui concerne la négation, il découle de $a + a^* = u$, de $V^{-1}(0) = 0$, de $V(0) = 0$ et de $V(u) = 1$ que :

$$\forall u, v(A) = 0 \Rightarrow v(A^*) = 1 \\ \forall u, v(A^*) = 0 \Rightarrow v(A) = 1$$

que si $v(A) = 1$, on peut choisir $u = a$ comme négateur car $a \in E$, $V(a) = 1$ et $u - a = 0 \in E$, de sorte que

$v(A) = 1 \Rightarrow v(A^*) = 0$ à condition que $u = a$ et que, de même,

$v(A^*) = 1 \Rightarrow v(A) = 0$ à condition que $u = a^*$.

La valuation de la négation métrique peut donc bien être rendue identique à celle de la négation classique, en choisissant quand il y a lieu des négateurs particuliers.

Que la logique métrique générale englobe le cas particulier de la logique classique est une absolue nécessité. En effet, notre exposé même de cette algèbre propositionnelle métrique est développé selon les canons de la logique aristotélicienne, en particulier les fondements de cet exposé, qui empruntent à la théorie des ensembles. Si donc la logique classique n'était pas un cas particulier de la logique métrique, celle-ci, minée par une incohérence fondamentale, devrait être rejetée sur-le-champ.

Nous avons, dès notre précédent travail [II], posé en principe qu'une logique synthétique ne doit pas renier la logique classique mais l'intégrer dans son système de relations et aussi que dans le développement de la connaissance l'analyse précède et prépare la synthèse — ainsi la théorie des ensembles, essentiellement analytique, est-elle ici le point de départ d'une théorie logique synthétique.

Un exposé est analytique par nécessité pédagogique, celui de la logique métrique demeure rationnel parce que cette dernière s'expose en conformité avec une logique qu'elle englobe, donc en définitive avec elle-même.

LOGIQUE MÉTRIQUE QUASI-DIALECTIQUE

L'ensemble des véracités E est l'intervalle $[0,1]$; la fonction V est l'application identique : le degré de vérité est égal à la véracité. V satisfait bien à A_2 . $V(u) = 1$ et $V(u) = u \Rightarrow u = 1$: cette logique ne connaît donc qu'un négateur unique, le nombre 1.

Négation, complémentarité des contradictoires, contradiction

A_3 s'écrit $a + a^* = 1$. La contradiction a pour valeur $v(A \wedge A^*) = a(1 - a)$. Elle ne peut être vraie ; elle est fautive si A est fautive ou bien si A est vraie ; elle est approchée si A est approchée mais son degré de vérité maximum est 0,25, atteint quand $a = 0,50$.

Propositions binaires normales. Conditions 1 à 4

$$P_2^2 = a_1 a_2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^* = 1$$

Les quatre termes de P_2^2 appartiennent à $[0,1]$. Donc $(1 - a_1 a_2) \in [0,1]$ et de même $1 - a_1 a_2^*$, $1 - a_1^* a_2$ et $1 - a_1^* a_2^*$: la condition C_1 est toujours remplie par le négateur 1.

La somme des quatre termes étant 1, $(a_1 a_2 + a_1^* a_2^*) \in [0,1]$ et $(a_1 a_2^* + a_1^* a_2) \in [0,1]$: les conditions C_2 et C_3 sont également toujours satisfaites. Enfin, si $a_1 + a_2 \geq 1$ alors $a_1^* + a_2^* = 2 - (a_1 + a_2) \leq 1$ car $a_1 + a_2 \leq 2$: la condition C_4 est toujours remplie aussi.

Les degrés de vérité des principales coordinations binaires normales sont alors les suivants :

$$\text{Conjonction } v(A_1 \wedge A_2) = a_1 a_2$$

$$\text{Incompatibilité } v(A_1^* \vee A_2^*) = 1 - a_1 a_2 ; A_1^* \vee A_2^* \equiv (A_1 \wedge A_2)^*$$

$$\text{Disjonction } v(A_1 \vee A_2) = 1 - a_1^* a_2^* = a_1 + a_2 - a_1 a_2 ; A_1 \vee A_2 \equiv (A_1 \wedge A_2)^*$$

$$\text{Implication } v(A_1 \rightarrow A_2) = 1 - a_1 a_2^* = 1 - a_1(1 - a_2) \Rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \equiv (A_1 \wedge A_2^*)^* = A_1^* \vee A_2$$

$$\text{Concordance } v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = a_1 a_2 + a_1^* a_2^* = 1 - (a_1 + a_2) + 2a_1 a_2$$

$$\text{Discordance } v(A_1 \times A_2) = a_1 a_2^* + a_1^* a_2 = a_1 + a_2 - 2a_1 a_2 \Rightarrow A_1 \times A_2 \equiv (A_1 \Leftrightarrow A_2)^*$$

$$\text{Équivalence } v(A_2 - A_1) = a_1 + a_2^* = a_1 + 1 - a_2 ; v(A_1 - A_2) = a_1^* + a_2 = 1 - a_1 + a_2$$

Seule $A_2 - A_1$ existe quand $a_2 \geq a_1$ et seule $A_1 - A_2$ existe quand $a_1 \geq a_2$. On peut donc définir en logique quasi-dialectique une coordination unique et commutative appelée équivalence :

$$v(A_1 - A_2) = v(A_1 - A_2) = 1 - |a_1 - a_2| \text{ qui est vraie si seulement } a_1 = a_2$$

Complémentarités $v(A_1 \wedge A_2) = a_1 + a_2 ; v(A_1^* \wedge A_2^*) = a_1^* + a_2^* = 2 - (a_1 + a_2)$ Seule $A_1 \wedge A_2$ existe quand $(a_1 + a_2) \in (0,1)$ et seule existe $A_1^* \wedge A_2^*$ quand $a_1 + a_2 \geq 1$.

Nous retrouvons l'algèbre propositionnelle déjà élaborée, mais sans son fondement mathématique et avec une nomenclature et une notation tâtonnantes, dans un précédent travail [I].

Propositions normales d'ordre n.

Nous aurons par exemple les degrés de vérité suivants :

$$\text{Conjonction } v(A_1 \wedge A_2) \dots \wedge A_n) = a_1 a_2 \dots a_n$$

$$\text{Incompatibilité } v(A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^*) = 1 - a_1 a_2 \dots a_n ; \Rightarrow A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^* \equiv (A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n)^*$$

$$\text{Disjonction } v(A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n) = 1 - a_1^* a_2^* \dots a_n^* \Rightarrow A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n \equiv (A_1^* \wedge A_2^* \dots \wedge A_n^*)^*$$

$$\text{Complémentarités } v(A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n) = a_1 + a_2 \dots + a_n, \text{ définie seulement si } (a_1 + a_2 \dots + a_n) \in [0,1]$$

$$v(A_1^* \wedge A_2^* \dots \wedge A_n^*) = n - (a_1 + a_2 \dots + a_n) \text{ définie seulement si } a_1 + a_2 \dots + a_n \geq n - 1.$$

LOGIQUE CLASSIQUE

La logique classique est la réduction booléenne de la logique quasi-dialectique. L'ensemble E des véracités se réduit à $\{0,1\}$. Il en résulte que $v(A \wedge A^*) = a(1 - a) \equiv 0$; la contradiction est toujours fautive.

Examinons quelques articulations remarquables entre logique quasi-dialectique et logique classique.

Équivalence déductive

La concordance, l'équivalence et l'implication réciproque de la logique quasi-dialectique viennent se fondre en logique classique dans une coordination unique qui est l'équivalence classique $A_1 \Leftrightarrow A_2$ ou équivalence déductive. En effet, si a_1 et a_2 sont des variables booléennes,

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = 1 - (a_1 + a_2) + 2a_1 a_2 = v(A_1 \Leftrightarrow A_2)$$

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = 1 - |a_1 - a_2| = v(A_1 - A_2) = v(A_2 - A_1)$$

Quant à l'implication réciproque, elle a pour degré de vérité en logique quasi-dialectique, en la définissant par $A_1 \Leftrightarrow A_2 = (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$,

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = 1 - (a_1 + a_2) + 2a_1 a_2 + a_1 a_2 (1 - a_1) (1 - a_2)$$

Quand a_1 et a_2 sont booléens, le troisième terme du dernier membre est toujours nul (principe de non contradiction) de sorte que :

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = v(A_1 \Leftrightarrow A_2)$$

Exclusion réciproque

La discordance, la complémentarité et la complémentarité inverse de la logique quasi-dialectique viennent se fondre en logique classique dans une coordination unique qui est l'exclusion réciproque. En adoptant la notation de Piaget $A_1 \text{ W } A_2$ pour l'exclusion réciproque, on a en effet quand a_1 et a_2 sont booléennes :

$$\begin{aligned} v(A_1 \text{ W } A_2) &= a_1 + a_2 - 2a_1 a_2 = v(A_1 \Leftrightarrow A_2) \\ v(A_1 \text{ W } A_2) &= a_1 + a_2 = v(A_1 \text{ M } A_2) \text{ lorsque } a_1 + a_2 \leq 1 \\ v(A_1 \text{ W } A_2) &= 2 - (a_1 + a_2) = v(A_1^* \text{ M } A_2^*) \text{ lorsque } a_1 + a_2 \geq 1 \end{aligned}$$

La première de ces relations est vraie $\forall a_1, \forall a_2$ (booléennes), la seconde pour les dyades $(a_1, a_2) = (0,0); (0,1); (1,0)$; la troisième pour les dyades $(a_1, a_2) = (1,0); (0,1); (1,1)$.

LOGIQUE MÉTRIQUE DIALECTIQUE

Une logique dialectique ou héraclitéenne admettant que la contradiction puisse être vraie, posons en logique quasi-dialectique $v(A \wedge A^*) = a(1 - a) = 1$; cette équation n'a pas de racines

réelles mais admet les racines complexes $a = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$.

C'est ce résultat qui conduit à élaborer une logique métrique à véracités complexes [III]. L'addition des véracités y étant isomorphe de celle des vecteurs du plan, il est naturel de rattacher la fonction V à la métrique de l'espace vectoriel R^2 . Nous adopterons comme valuations les normes des vecteurs.

E sera donc l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 et la fonction V sera telle que $V(a) = |a|^2$: elle satisfait bien à A_2 .

Négateurs, contradictoires. Contradiction

Soit A une proposition de véracité fixée $a = |a|e^{i\alpha}$ (si $a = 0$, α est indéterminé, nous conviendrons de prendre $\alpha = 0$). Selon D_3 , un négateur sera ici un nombre complexe unitaire $u = e^{i\omega}$ tel que $|u - a| \leq 1$. Posant $\varphi = \omega - \alpha$ (fig. 1) cette inégalité entraîne $\cos \varphi \geq \frac{|a|}{2}$, soit $|\varphi| \leq \theta$, $\theta = |\arccos \frac{|a|}{2}|$

En résumé,

$$\varphi \in [-\theta, \theta]; \cos \theta = \frac{|a|}{2}; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (1)$$

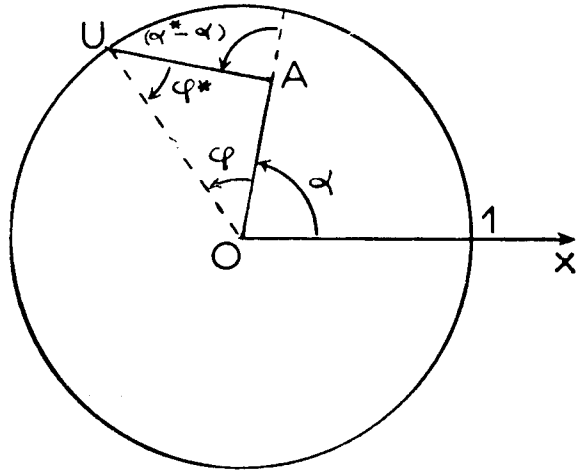


Figure 1

$$\vec{a} = \vec{OA}; \vec{u} = \vec{OU}; \vec{a}^* = \vec{AU}$$

Les négateurs u de A forment donc un ensemble continu : le secteur du *cercle de vérité* (cercle trigonométrique) d'angle 2θ dont le vecteur a est colinéaire à la bissectrice (fig. 2). Un négateur est déterminé par l'angle φ , $u(\varphi)$ est une fonction biunivoque.

La contradictoire A^* dispose ainsi, a fixé, d'un ensemble continu de véracités $a^*(\varphi)$, $a^* = |a^*|e^{i\alpha^*}$ et l'on a : $|a^*| \in [1 - |a|, 1]$; $\varphi = 0 \Leftrightarrow |a^*| = 1 - |a|$; $\varphi = \pm \theta \Leftrightarrow |a^*| = 1$ (2)

Posant $\omega - \alpha^* = \varphi^*$ (fig. 2), $\varphi = -\theta \Leftrightarrow \varphi^* = \pi - 2\theta$; $\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi^* = 0$; $\varphi = \theta \Leftrightarrow \varphi^* = 2\theta - \pi$; en résumé,

$$\varphi^* \in [2\theta - \pi, \pi - 2\theta] \Rightarrow \varphi - \varphi^* \in [\theta - \pi, \pi - \theta] \quad (3)$$

D'autre part (fig. 1) on a :

$$\alpha^* - \alpha = \varphi - \varphi^* \quad (4)$$

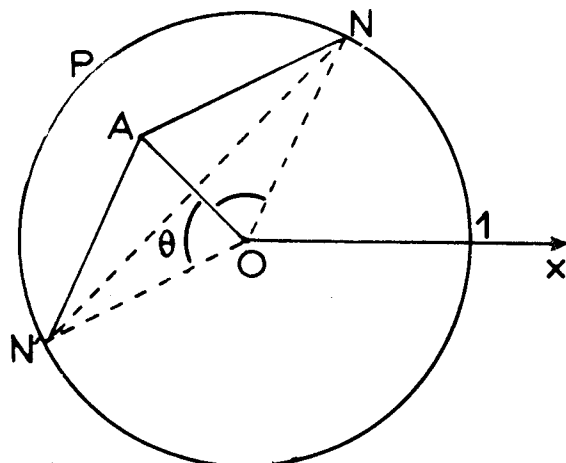


Figure 2

Lieu de U : arc $\widehat{NPN'}$, NN' médiatrice de OA

La contradiction vraie $v(\Lambda \wedge \Lambda^*) = V[aa^*] = 1$ exige $|a| = 1$ d'où $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$ et aussi $|a^*| = 1$ d'où $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$ et $\varphi^* = \pm \frac{\pi}{3}$, $\varphi - \varphi^* = \pm \frac{2\pi}{3} = \alpha^* - \alpha$. Les solutions de l'équation $v(\Lambda \wedge \Lambda^*) = 1$ sont donc finalement (fig. 3) :

$a = e^{i\alpha}$, α quelconque ; $a^* = e^{i(\alpha \pm \frac{2\pi}{3})}$
La logique métrique à véracités complexes est bien dialectique [III].

Un autre trait caractéristique d'une logique dialectique est que la négation de la négation ne ramène pas nécessairement à la proposition primitive (G.W. Hegel). On a bien, si $u' \equiv u$, $v(A^{**}) = V(u' - a^*) \equiv V(a) ; v(A^{**}) \equiv v(A)$

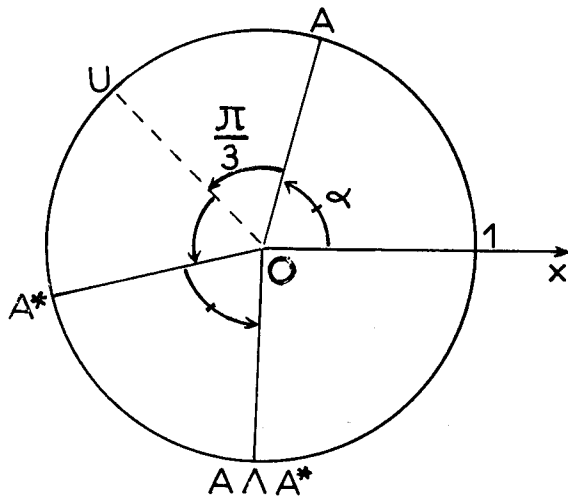


Figure 3

La contradiction vraie

Conditions C₁ à C₄

Condition C₁. — Elle s'écrit $|u_1 u_2 - a_1 a_2| \leq 1$ soit, avec les notations ci-dessus,

$$|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} - |a_1| \cdot |a_2|| \leq 1$$

C₁ revient donc à

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \geq \frac{|a_1| \cdot |a_2|}{2}$$

Il existe un ensemble continu de négateurs $u_1(\varphi_1)$ et un autre de négateurs $u_2(\varphi_2)$ qui y satisfont (par exemple $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$). Ainsi l'incompatibilité $\Lambda_1^* \vee \Lambda_2$ existe, dispose, a_1 et a_2 fixées, d'un ensemble continu de véracités $u_1 u_2 - a_1 a_2$ et l'on a

$$v(\Lambda_1^* \vee \Lambda_2^*) = v(\Lambda_1 \wedge \Lambda_2)^*$$

De même $\Lambda_1 \vee \Lambda_2$ existe-t-elle, à la condition que :

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \geq \frac{|a_1^*| \cdot |a_2|}{2}$$

satisfaite par exemple si $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$.

De même l'implication $\Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$, à la condition que

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2^*) \geq \frac{|a_1^*| \cdot |a_2|}{2}$$

Condition C₄. — Posant $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, de ce que $|a_1 + a_2| = ||a_1|e^{i\alpha} + |a_2|e^{i\alpha}|$, il résulte que $\forall a_1 \neq 0, \forall a_2 \neq 0, |\alpha| \geq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |a_1 + a_2| \leq 1$; donc $|a_1 + a_2| > 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{2\pi}{3}$.

Si $|a_1 + a_2| > 1$, ce qui exige a_1 et a_2 non nuls, $\Lambda_1 \wedge \Lambda_2$ n'existe pas et selon C₄, $\Lambda_1^* \wedge \Lambda_2^*$ doit alors exister : démontrons qu'on peut trouver effectivement des négateurs u_1 et u_2 tels que $|a_1^* + a_2| \leq 1$. Il suffit, pour cette inéquation soit satisfaite, que $|\alpha_1^* - \alpha_2^*| \geq \frac{2\pi}{3}$. D'après (4),

$$\alpha_1^* - \alpha_2^* = (\varphi_1 - \varphi_1^*) - (\varphi_2 - \varphi_2^*) + \alpha$$

Soit $0 \leq \alpha = \frac{2\pi}{3} - \beta$. D'après (3) la valeur maximum de $\varphi_1 - \varphi_1^*$ est $\pi - \theta_1 > 0$, celle de $-(\varphi_2 - \varphi_2^*)$ est $\pi - \theta_2 > 0$; donc

$$\sup|\alpha_1^* - \alpha_2^*| = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) + \frac{2\pi}{3} - \beta > \frac{5\pi}{3} - \beta$$

car $\theta_1 + \theta_2 < \pi$. Il en résulte que $\sup|\alpha_1^* - \alpha_2^*| \geq \pi$ puisque $0 \leq \beta \leq \frac{2\pi}{3}$; or la condition suffisante est

$|\alpha_1^* - \alpha_2^*| \geq \frac{2\pi}{3}$; il existe donc un ensemble continu de valeurs de $|\alpha_1^* - \alpha_2^*|$ et par conséquent de négateurs $u_1(\varphi_1)$ et $u_2(\varphi_2)$ qui satisfont à cette condition.

Condition C₂. — Elle s'écrit $|a_1 a_2 + a_1^* a_2^*| \leq 1$. Comme C₄, il suffit pour qu'elle soit remplie que l'angle des vecteurs non nuls $a_1 a_2$ et $a_1^* a_2^*$ soit $\geq \frac{2\pi}{3}$, donc que $|\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1^* + \alpha_2^*)| \geq \frac{2\pi}{3}$ ou encore

$$|\varphi_1^* - \varphi_1 + \varphi_2^* - \varphi_2| \geq \frac{2\pi}{3} \tag{5}$$

ou selon (3) :

$$\sup|\varphi_1^* - \varphi_1 + \varphi_2^* - \varphi_2| = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2) > \pi$$

Il existe donc un ensemble continu de négateurs $u_1(\varphi_1)$ et un autre de négateurs $u_2(\varphi_2)$ qui satisfont l'inéquation (5).

Condition C₃. — Elle s'écrit $|a_1 a_2^* + a_1^* a_2| \leq 1$; étudiée par la même méthode, elle s'avère remplie si (condition suffisante) :

$$|\varphi_1^* - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_2^*| \geq \frac{2\pi}{3}$$

inéquation dont la solution est la même que celle de (5). Il en résulte que concordance $\Lambda_1 \rightleftharpoons \Lambda_2$ et discordance $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ peuvent exister ensemble ; alors l'une est la négation de l'autre par le négateur $u_1 u_2$.

Algèbre propositionnelle

Une algèbre propositionnelle peut donc être construite sur l'ensemble des véracités complexes de module $\in [0,1]$. Les principales propositions binaires normales sont les suivantes.

Famille 2, groupe 1 :

Conjonction

$$v(A_1 \wedge A_2) = |a_1 a_2|^2 = |a_1|^2 \cdot |a_2|^2$$

Incompatibilité

$$v(A_1^* \wedge A_2^*) = |u_1 u_2 - a_1 a_2|^2 = \left| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{|a_1| \cdot |a_2|}{|u_1 u_2 - a_1 a_2|} \right|^2 \quad (6)$$

$$v(A_1^* \vee A_2^*) = v[(A_1 \wedge A_2)^*], \text{ négateur } u_1 u_2.$$

Disjonction

$$v(A_1 \vee A_2) = |u_2 a_1 + u_1 a_2 - a_1 a_2|^2 = \left| |a_1| e^{i\varphi_2} + |a_2| e^{i\varphi_1} - |a_1| \cdot |a_2| \right|^2 \quad (7)$$

$$v(A_1 \vee A_2) = v[(A_1^* \wedge A_2^*)^*], \text{ négateur } u_1 u_2.$$

Implication

$$v(A_1 \rightarrow A_2) = \left| \frac{u_1 u_2 - a_1(u_2 - a_2)}{|u_1 u_2 - a_1(u_2 - a_2)|} \right|^2 = \left| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{|a_1| (|e^{i\varphi_2} - |a_2||)}{|u_1 u_2 - a_1(u_2 - a_2)|} \right|^2 \quad (8)$$

$$v(A_1 \rightarrow A_2) = v[(A_1 \wedge A_2^*)^*], \text{ négateur } u_1 u_2.$$

Famille 2, groupe 2 :

Concordance

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = |u_1 u_2 - u_2 a_1 - u_1 a_2 + 2a_1 a_2|^2 = \left| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \frac{|a_1| e^{i\varphi_2} - |a_2| e^{i\varphi_1} + 2|a_1| \cdot |a_2|}{|u_1 u_2 - u_2 a_1 - u_1 a_2 + 2a_1 a_2|} \right|^2 \quad (9)$$

$$v(A_1 \Leftrightarrow A_2) = v[(A_1 \times A_2)^*], \text{ négateur } u_1 u_2.$$

Discordance

$$v(A_1 \prec A_2) = |u_2 a_1 + u_1 a_2 - 2a_1 a_2|^2 = \left| |a_1| e^{i\varphi_2} + |a_2| e^{i\varphi_1} - 2|a_1| \cdot |a_2| \right|^2 \quad (10)$$

$$v(A_1 \prec A_2) = v[(A_1 \Rightarrow A_2)^*], \text{ négateur } u_1 u_2.$$

Famille 1 :

Complémentarité

$$v(A_1 \vee A_2) = |a_1 + a_2|^2 = \left| |a_1| e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + |a_2| \right|^2 \quad (11)$$

Complémentarité inverse

$$v(A_1^* \wedge A_2) = |u_1 + u_2 - a_1 - a_2|^2 = \left| (e^{i\varphi_1} - |a_1|) e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{i\varphi_2} - |a_2| \right|^2 \quad (12)$$

$A_1^* \wedge A_2^*$ existe seule si $|a_1 + a_2| > 1$.

Equivalence

$$v(A_2 \dashv A_1) =$$

$$|a_1 + u_2 - a_2|^2 = \left| |a_1| e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{i\varphi_2} - |a_2| \right|^2 \quad (13)$$

C'est dans la famille 1 seulement qu'intervient l'angle $\alpha_1 - \alpha_2$ des vecteurs a_1 et a_2 .

Cherchons quels négateurs il faut choisir pour que si $v(A_1) = v(A_2)$, c'est-à-dire si $|a_1| = |a_2| = |a|$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on ait : $v(A_2 \dashv A_1) = 1 = v(A_1 \dashv A_2)$.

On a alors : $v(A_2 \dashv A_1) = \left| |a| (e^{i\alpha} - 1) + e^{i\varphi_2} \right|^2$ où $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Pour que $v(A_2 \dashv A_1) = 1$, la condition nécessaire et suffisante est :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi_2\right) = |a| \sin\frac{\alpha}{2} \quad (15)$$

De même, pour que : $v(A_1 \dashv A_2) = 1$, la condition est $\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi_1\right) = |a| \sin\frac{\alpha}{2}$ d'où $\varphi_1 = \varphi_2$, φ_2 solution de (15). La figure 4 donne la représentation géométrique ; $a_1^* = a_2^*$ et ces deux vecteurs sont parallèles à la bissectrice OB de α ; $a_1 + a_2 = u_1$ et $a_1^* + a_2 = u_2$.

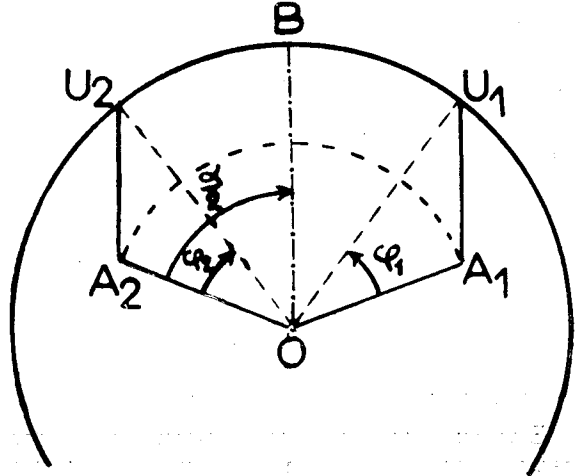


Figure 4

Propositions normales d'ordre n.

Conjonction

$$v(A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n) = |a_1 a_2 \dots a_n|^2.$$

Incompatibilité

$$v(A_1^* \vee A_2 \dots \vee A_n^*) = |u_1 u_2 \dots u_n - a_1 a_2 \dots a_n|^2$$

$$v(A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^*) = v[(A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n)^*]$$

négateur $u_1 u_2 \dots u_n$.

Disjonction

$$v(A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n) = |u_1 u_2 \dots u_n - a_1^* a_2^* \dots a_n^*|^2$$

$$v(A_1 \vee A_2 \dots \vee A_n) = v[(A_1^* \wedge A_2^* \dots \wedge A_n^*)^*]$$

négateur $u_1 u_2 \dots u_n$.

Complémentarité

$$v(A_1 \wedge A_2 \dots \wedge A_n) = |a_1 + a_2 \dots + a_n|^2.$$

Complémentarité inverse

$$v(A_1^* \wedge A_2^* \dots \wedge A_n^*) = |u_1 + u_2 \dots + u_n - (a_1 + a_2 \dots + a_n)|^2$$

A titre d'exemple, déterminons la condition d'existence de l'incompatibilité ; on a :

$$v(A_1^* \vee A_2^* \dots \vee A_n^*) = \left| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 \dots + \varphi_n)} - |a_1| \cdot |a_2| \dots |a_n| \right|^2$$

La condition est donc :

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2 \dots + \varphi_n) \geq \frac{|a_1| \cdot |a_2| \dots |a_n|}{2}$$

Cette algèbre propositionnelle a été ébauchée dans un travail antérieur [II] mais sans son fondement mathématique et avec une terminologie et une notation encore hésitantes.

LOGIQUE DIALECTIQUE BOOLÉENNE

Elle est la réduction booléenne de la logique métrique dialectique : les modules des véracités complexes n'y peuvent être que 0 ou bien 1, le cercle de vérité s'y réduit à son centre et à sa circonférence.

Contradictoire, contradiction

D'après (2), $v(A) = 0 \Rightarrow v(A^*) = 1$ (α^* indéterminé) et $v(A \wedge A^*) = 0$. Selon (1), $v(A) = 1$

$\Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Comme $|a^*|$ doit être booléen, φ d'après (2) ne peut prendre que trois valeurs :

$$\varphi = 0 \Leftrightarrow v(A^*) = 0 \Rightarrow v(A \wedge A^*) = 0$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow v(A^*) = 1 \Rightarrow v(A \wedge A^*) = 1$$

On a toujours : $\varphi^* = -\varphi \Rightarrow \alpha^* - \alpha = 2\varphi$.

Bien que booléenne, cette logique diffère donc radicalement de la logique classique : elle demeure dialectique, la contradiction peut y être vraie et la négation de la négation n'y ramène pas nécessairement à la proposition primitive.

Quelques propositions binaires normales

La table de vérité de la *conjonction* est identique à celle de la logique classique.

Disjonction. — D'après (7), elle est fautive si $v(A_1) = v(A_2) = 0$, vraie si $v(A_1) = 0$ et $v(A_2) = 1$ ou si $v(A_1) = 1$ et $v(A_2) = 0$. Si $v(A_1) = v(A_2) = 1$, C_1 s'écrit $\cos(\varphi_1^* + \varphi_2^*) \geq \frac{1}{2}$; $\varphi^* = -\varphi$ donc la disjonction n'existe que si $\varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}$;

on a : $v(A_1 \vee A_2) = \left| e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1} - 1 \right|^2$ donc :

$$v(A_1) = v(A_2) = 1 \begin{cases} v(A_1 \vee A_2) = 0 \text{ si } \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}, \\ \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3} \\ v(A_1 \vee A_2) = 1 \text{ si } \varphi_1 + \varphi_2 = \\ \pm \frac{\pi}{3} \text{ ou si } \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

D'où la table de vérité de la disjonction :

		A ₁		
		1	0	
A ₂	1	1	0	A ₁ ∨ A ₂
	0	1	0	

Elle coïncide avec celle de la logique classique lorsque, pour le cas $v(A_1) = v(A_2) = 1$, on choisit φ_1 et φ_2 tels que $\varphi_1 = 0$. La valuation non conforme à la logique classique est signalée par +.

Implication. — D'après (8), elle est vraie si $\forall a_2, v(A_1) = 0$. Si $v(A_1) = v(A_2) = 1$, la condition d'existence est $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \geq \frac{1}{2}$; comme $v(A_1 \rightarrow A_2) =$

$\left| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} - e^{i\varphi_2} + 1 \right|^2$, on a $v(A_1 \rightarrow A_2) = 1$ dans tous les cas permis par la condition d'existence sauf celui où $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3}$ pour lequel $v(A_1 \rightarrow A_2) = 0$.

Si $v(A_1) = 1$ et $v(A_2) = 0$, on a $v(A_1 \rightarrow A_2) = |e^{i\varphi_1} - 1|^2$; $v(A_1 \rightarrow A_2) = 0$ si $\varphi_1 = 0$, $v(A_1 \rightarrow A_2) = 1$ si $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}$

D'où la table de vérité :

		A ₁		
		1	0	
A ₂	1	1	0	A ₁ → A ₂
	0	1	1	

Elle coïncide avec celle de la logique classique si l'on rejette pour le cas $v(A_1) = v(A_2) = 1$ le choix $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3}$ et pour le cas $v(A_1) = 1$ et $v(A_2) = 0$ le choix $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}$. Ces rejets sont nécessaires pour conduire une déduction rigoureuse en logique dialectique booléenne : l'articulation fondamentale de la déduction est en effet l'implication vraie, notée \Rightarrow , qui si A_1 est vraie exige (« entraîne ») A_2 vraie.

Concordance. — D'après (9) elle est vraie si $v(A_1) = v(A_2) = 0$. Si $v(A_1) = 1$ et $v(A_2) = 0$, alors $v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = |e^{i\varphi_1} - 1|^2$ donc $v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = 0$ si $\varphi_1 = 0$ et $v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = 1$ si $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}$; de même si $v(A_1) = 0$ et $v(A_2) = 1$ on a $v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = 0$ si $\varphi_2 = 0$ et $v(A_1 \rightleftharpoons A_2) = 1$ si $\varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3}$. Si $v(A_1) = v(A_2) = 1$, la concordance n'existe pas lorsque $\varphi_1 = \pm \frac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \pm \frac{\pi}{3}$, mais elle est vraie dans tous les autres cas.

La table de vérité est donc la suivante :

	A_1		
	1	0	
1	1	0	$A_1 \Rightarrow A_2$
0	0	1	$A_1 \rightleftharpoons A_2$

Elle coïncide avec celle de l'équivalence de la logique classique si lorsque $v(A_1) = 1$ et $v(A_2) = 0$, on choisit $\varphi_1 = 0$ et lorsque $v(A_1) = 0$ et $v(A_2) = 1$, on choisit $\varphi_2 = 0$. Il importe de noter, pour la conduite d'un raisonnement rigoureux, qu'avec ces choix la concordance devient identique à l'équivalence déductive, notée \Leftrightarrow .

On peut vérifier sur toutes les propositions binaires normales que l'algèbre propositionnelle de la logique dialectique booléenne contient bien celle de la logique classique comme cas particulier (tandis que la logique métrique dialectique ne contient pas la logique métrique quasi-dialectique comme cas particulier).

LOGIQUES MÉTRIQUES DIVALENTES ET THÉORIES DES PROBABILITÉS

Axiomatique probabiliste

Nous prendrons pour base l'axiomatique élaborée par A.N. Kolmogorov pour la théorie classique des probabilités [III] en la généralisant pour qu'elle puisse être étendue à d'autres théories de probabilités. D'autre part, nous énoncerons les axiomes directement en langage probabiliste (et non pas ensembliste).

Soit O un objet général abstrait (le jet d'une pièce de monnaie, avec le mouvement et l'arrêt de celle-ci par exemple); x, y, z, \dots désignent des caractères de O (logiquement : des *attributs* de O), eux aussi généraux et donc nécessaires (exemple, l'arrêt de la pièce reposant sur une face). Lorsque O passe de l'être logique à l'existence, localisée dans l'espace et dans le temps, en d'autres termes lorsque O se réalise, s'actualise, se particularise, en un mot devient un événement, l'attribut général x peut prendre l'une ou l'autre des variantes particulières mutuellement incompatibles x_1, x_2, \dots, x_k ; y l'une des variantes particulières mutuellement incompatibles y_1, y_2, \dots, y_l , etc... Nous appellerons $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$ etc... des *éventualités élémentaires* de O ; en tant qu'attributs de O , elles sont possibles, contingentes (ou aléatoires). En tant qu'attributs de O actualisé, réalisé, elles deviennent des *événements élémentaires*. Nous désignerons par E l'ensemble des éventualités élémentaires (ou des événements élémentaires) et par F un ensemble contenant l'ensemble vide, E et toutes les parties de E (1). Nous nous en tiendrons ici aux ensembles E finis, ils suffisent pour notre étude logique.

Un objet général est par cela même reproductible, répétable. En théorie des probabilités, on prend souvent comme objet d'étude, noté O^N , une répétition à N exemplaires d'un objet O . En numérotant par l'indice α ces exemplaires, le nombre des attributs $x_\alpha, y_\alpha, \dots$ et celui de leurs variantes $x_{\alpha 1}, y_{\alpha 1}, \dots$

etc... est multiplié par N ; mais cela ne change rien aux définitions de E et de F . Tout sous-ensemble A de F définit une *éventualité* de l'objet général, (ou un *événement* de l'objet actualisé).

Précisons que, selon Kolmogorov, pour qu'un ensemble d'éventualités se réalise il suffit que l'un de ses éléments (et non tous) se réalise; ainsi, pour que E se réalise, il suffit que l'une des éventualités élémentaires devienne un événement.

(1) Ou plus généralement des parties de E .

E désigne un ensemble d'éléments φ appelés *fortuités*, ensemble identique à celui des *véracités* d'une logique métrique divalente. V est la fonction qui transforme les *véracités* en degrés de vérité dans cette logique métrique.

Nous posons les axiomes suivants.

A'_1 . — Toute éventualité A est dotée d'une fortuité φ et d'une probabilité $p = V(\varphi)$.

A'_2 . $p(\mathbf{E}) = 1$ (axiome de nécessité).

Remarque : Les attributs généraux x, y, z, \dots étant nécessaires, si l'on définit l'ensemble $x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, l'axiome de nécessité peut aussi s'écrire $p(x) = 1$ et de même $p(y) = p(z) \dots = 1$.

A'_3 . — Si A_i et A_j sont deux éventualités « incompatibles » (1), la probabilité pour que ou bien A_i ou bien A_j indifféremment se réalise, vaut $V(\varphi_i + \varphi_j)$.

(Nous avons réduit les deux premiers axiomes de Kolmogorov à la définition de \mathbf{F}).

Si la logique métrique divalente est la logique quasi-dialectique, ces trois axiomes fondent la théorie classique (ou quasi-dialectique) des probabilités ; si c'est la logique métrique dialectique, ils fondent la théorie quantique (ou dialectique) des probabilités.

Kolmogorov ajoute à ces axiomes la définition de la probabilité conditionnée, que nous exprimerons à l'aide des fortuités :

$$\varphi_i(A_j) = \frac{\varphi(A_i \text{ et } A_j)}{\varphi(A_i)}$$

Soulignons que l'ensemble des éventualités élémentaires est un attribut nécessaire de l'objet général \mathbf{O} . Il en va de même de l'ensemble de leurs probabilités respectives. D'où il résulte que les moyennes statistiques de tous ordres sont également des attributs nécessaires de cet objet général. Si par exemple \mathbf{O} est un système thermodynamique de Gibbs, l'ensemble des valeurs possible ε_i (éventualités élémentaires) d'une énergie propre ε d'un très petit sous-système est déterminé par une loi physique, l'équation de Schrödinger par exemple. Les probabilités $p(\varepsilon_i)$ sont déterminées par une autre loi physique, le théorème de Boltzmann, ($p(\varepsilon_i) =$

$$A e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}} ; A \text{ et } k \text{ constantes, } T \text{ température.}$$

(1) Au sens du langage probabiliste : qui ne peuvent se réaliser ensemble.

Probabilités et degrés de vérité, nouvelle axiomatique

Une algèbre propositionnelle prend uniquement en considération la *valeur* des propositions. Une théorie des probabilités met au premier plan leur *modalité*, à savoir leur nécessité ou leur contingence, leur possibilité ou leur impossibilité et, en relation étroite avec leur modalité, leur généralité et leur particularité qui, comme nous l'avons vu, impliquent les catégories d'être et d'existence (de possible et de réel ou actuel, d'éventualité et d'événement).

En théorie des probabilités, la valeur des propositions est déterminée par la modalité et par les catégories connexes que nous venons de mentionner.

D_{17} . — Une *proposition statistique* est une proposition qui énonce un événement.

Soit A une éventualité. Nous noterons \bar{A} la proposition statistique qui énonce la réalisation de A ; le temps du verbe dans A est par conséquent le présent ou le passé. \bar{A} est un constat expérimental, d'où le qualificatif de statistique.

Dans l'objet actualisé, A ne peut être que ou bien vraie ou bien fausse, il n'y a pas de tierce valeur possible (1). Aux propositions statistiques s'applique exclusivement la logique classique.

Dans l'objet général \mathbf{O} , le degré de vérité de \bar{A} est une variable aléatoire à deux valeurs possibles, $v(\bar{A}) = 0$ et $v(\bar{A}) = 1$. Dire que $p(A)$ est la probabilité « pour que A se réalise » revient à dire « pour que $v(\bar{A}) = 1$ ». D'où :

$$p(A) = p[v(\bar{A}) = 1] \quad (16)$$

Appliquons à deux éventualités A_i et A_j incompatibles. Soit J l'énoncé « l'une ou bien l'autre des deux éventualités A_i et A_j , indifféremment, s'est réalisée » :

$$J \Leftrightarrow \bar{A}_i \vee \bar{A}_j = 1$$

L'axiome A'_3 peut dès lors s'écrire

$$p[v(\bar{A}_i \vee \bar{A}_j) = 1] = V(\varphi_i + \varphi_j) \quad (17).$$

D_{18} . — Une *proposition prévisionnelle* est une proposition qui annonce à l'avance un événement.

Nous noterons \tilde{A} la proposition prévisionnelle qui annonce que l'éventualité A se réalisera ; le temps du verbe dans \tilde{A} étant par conséquent le futur ; \tilde{A} est en somme un pari.

(1) Pour autant que les éventualités puissent être définies par une analyse rigoureuse.

Posons l'axiome suivant :

A' . — La véracité a d'une proposition prévisionnelle \tilde{A} est égale à la fortuité de l'éventualité A , $a(\tilde{A}) = \varphi(A)$.

$$A'_1 \text{ et } A' \Rightarrow v(\tilde{A}) = p(A) = p[v(\tilde{A}) = 1]$$

Il résulte de A' qu'aux propositions prévisionnelles s'applique une logique métrique divalente et non plus la logique classique puisque $v(\tilde{A})$ peut varier continuellement de 0 à 1.

Appliquant cet axiome à la relation (17), nous obtenons, compte tenu de D_4 ,

$$p[v(\tilde{A}_i \vee \tilde{A}_j) = 1] = v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j)$$

Si aux définitions qui précèdent immédiatement l'énoncé des axiomes A'_1 , A'_2 et A'_3 nous ajoutons les définitions D_{17} et D_{18} , nous pouvons déduire d'une logique métrique divalente une théorie des probabilités par les axiomes suivants :

A''_1 . — Une proposition statistique A vraie, $v(\tilde{A}) = 1$, est dotée d'une fortuité φ et d'une probabilité $p[v(A) = 1] = V(\varphi)$;

$$A''_2. \quad p[v(\tilde{E}) = 1] = 1 ;$$

$$A''_3. \quad a(\tilde{A}) = \varphi[v(\tilde{A}) = 1], \text{ } a \text{ véracité de } \tilde{A} ;$$

$$A''_4. \quad \varphi[v(\tilde{A}_i \vee \tilde{A}_j) = 1] = a(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j).$$

A ces axiomes ajoutons la définition de la probabilité conditionnée. Dire que \tilde{A}_i et \tilde{A}_j se réalisent ensemble équivaut à dire que $v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j) = 1$. La définition s'écrit donc :

$$D_{19}. \quad \varphi_i [v(\tilde{A}_j) = 1] = \frac{\varphi[v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j) = 1]}{\varphi[v(\tilde{A}_i) = 1]}, \quad \varphi_i \text{ fortuité conditionnée de } \tilde{A}_j.$$

Notons $\tilde{C}(A_i, A_j)$ la conjonction $\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j$ et $\tilde{C}(A_i, A_j)$ la prévision de la réalisation de $\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j$.

$$A_3 \text{ et } D_{19} \Rightarrow v[\tilde{C}(A_i, A_j)] = p[v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j) = 1] = p(A_i) \cdot p_i(A_j).$$

Le degré de vérité de la prévision d'une conjonction est soumis au conditionnement de la probabilité.

Il n'en va pas de même de la conjonction des prévisions $\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j$; ces deux propositions étant des paris indépendants l'un de l'autre, on a :

$$v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j) = p(A_i) \cdot p(A_j).$$

Le degré de vérité de la conjonction de deux prévisions n'est pas soumis au conditionnement de la probabilité.

La nécessité de distinguer prévision d'une conjonction et conjonction de deux prévisions apparaît bien dans le cas où A_i et A_j sont « incompatibles » : alors $p_i(A_j) = 0$, de sorte que

$$v[\tilde{C}(A_i, A_j)] = 0.$$

La prévision de la réalisation de la conjonction ne saurait être que fautive puisque cette réalisation est impossible.

Au contraire, les paris \tilde{A}_i et \tilde{A}_j ne sont pas incompatibles. Un joueur peut par exemple miser à la roulette sur deux numéros à la fois. Cela ne signifie nullement qu'il en prévoie la réalisation simultanée mais qu'il effectue deux paris à la fois, dont la conjonction logique a un degré de vérité

$$v(\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j) \neq 0.$$

Telles sont les relations entre logiques métriques et théories des probabilités, entre degrés de vérité et probabilités. Ces deux dernières grandeurs ne sauraient être confondues, bien qu'en vertu de A'_3 elles puissent être égales, puisqu'un degré de vérité peut être doté d'une probabilité. La probabilité est un degré de nécessité, non un degré de vérité.

Nous avons par ailleurs établi [I] qu'il n'est pas possible de confondre avec une probabilité le degré de vérité d'une proposition énonçant le résultat d'une mesure physique. Deux domaines d'application des logiques métriques s'offrent donc d'ores et déjà : le raisonnement en physique expérimentale et le raisonnement prévisionnel probabiliste.

Caractère dialectique du concept probabiliste de l'objet

Nous avons déjà signalé [II] que sous le rapport de la modalité, ainsi que de la généralité et de la particularité, le concept analytique et le concept synthétique s'opposent. Le premier est général *abstrait* ce qui signifie qu'il veut ignorer toutes les particularités (les éventualités) de l'objet et qu'il ne retient que le nécessaire. Le second est général *concret* : au général abstrait, il ajoute et intègre toutes les particularités possibles, au nécessaire le contingent, l'aléatoire. D'après l'analyse précédente des concepts de base probabilistes, le concept de l'objet O en théorie des probabilités n'est pas l'analytique mais le synthétique.

La mécanique classique est un exemple de théorie purement analytique ; elle est « déterministe », ce qui signifie qu'elle ne prend en considération que les relations nécessaires dans son objet. Si celui-ci est le jet d'un dé sur une table et qu'elle envisage l'arrêt du dé reposant sur une face, elle ne se préoccupe nullement de laquelle des faces il s'agit.

Au contraire le probabiliste, le statisticien pensent *en outre* aux six éventualités possibles de la position finale du dé.

La caractéristique synthétique du concept probabiliste de l'objet explique qu'une théorie des probabilités dérive non de la logique classique, purement analytique, mais d'une logique dialectique ou tout au moins quasi-dialectique, d'une logique dans laquelle la contradiction n'est pas nécessairement fautive.

Soient en effet deux éventualités A et A' « incompatibles » et telles que les ensembles qui les définissent soient complémentaires par rapport à E . C'est le cas par exemple de pile et face lors du jet d'une seule pièce. Alors ou bien l'une ou bien l'autre doivent se réaliser et il n'y a pas d'autre possibilité, de sorte que $\tilde{A}' \Leftrightarrow \tilde{A}^*$ et $\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A}'^*$ (pile équivaut à non face). L'on a :

$$v[\tilde{C}(A, A^*)] = 0.$$

La prévision de la contradiction est toujours fautive. Il n'en va pas de même pour la contradiction de deux prévisions. On aura en effet

$$v(\tilde{A} \wedge \tilde{A}^*) = v(\tilde{A}) \cdot v(\tilde{A}^*) = p(A) \cdot p(A^*).$$

En théorie classique (ou quasi-dialectique) des probabilités, si $p(A) = q \neq 0$ on aura :

$$v(\tilde{A} \wedge \tilde{A}^*) = q(1-q) \Rightarrow 0 < v(\tilde{A} \vee \tilde{A}^*) \leq 0,25.$$

En théorie quantique (ou dialectique) des probabilités, si $a(\tilde{A}) = z \neq 0$, on aura, u étant un négateur de \tilde{A} ,

$$v(\tilde{A} \wedge \tilde{A}^*) = |z|^2 \cdot |u-z|^2 \Rightarrow 0 < v(\tilde{A} \wedge \tilde{A}^*) \leq 1.$$

La contradiction de deux prévisions peut être approchée ou même vraie.

Le raisonnement prévisionnel probabiliste procède donc essentiellement d'une logique non aristotélicienne.

Manuscrit reçu le 25 juin 1966.

RÉFÉRENCES

- I. Gérard VASSAILS. — *Logique de l'approximation physique* « Annales de l'Université de Madagascar » Série Sciences et techniques, n° 2, 1963.
- II. Gérard VASSAILS. — *Essai de formalisation d'une logique dialectique* — Annales « de l'Université de Madagascar », Série Sciences de la nature et Mathématiques, n° 4, 1965.
- III. A.N. KOLMOGOROV. — *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin, 1933.
- IV. George POLYA. — *Les mathématiques et le raisonnement plausible*. Gauthier, Villars, Paris 1958.