INTRODUCTION A LA THÉORIE DES OBJETS

PAR

A. MARQUETTY

(Laboratoire de Mathématiques)

RÉSUMÉ

1. — Les propriétés divalentes des ensembles ne permettent pas des interprétations satisfaisantes des logiques multivalentes.

2. — Les difficultés proviennent d'une étude insuffisante de la notion d'objet ; un objet est plus qu'un simple élément d'un ensemble.

3. — Les interprétations sur des champs d'objets des prédicats, quantificateurs et connectifs permettent de généraliser les problèmes habituels de la logique.

4. — On peut définir des ensembles à l'aide d'objets et développer ainsi une théorie des ensembles qui ne nécessite pas le secours de la notion d'infini actuel.

5. — La notion d'objet permet de dégager les lois qui régissent l'élaboration des représentations mathématiques d'une réalité concrète.

Le but de cet article est de définir et de présenter quelques propriétés d'un être mathématique plus général qu'un ensemble.

La notion d'ensemble conduit à des antinomies que de nombreux auteurs ont tenté d'éliminer. La théorie des types de B. RUSSELL et, plus récemment, l'emploi du principe de stratification de phrase de Quine, ont conduit à préciser la notion de classe et, à partir de celle-ci, à définir une théorie des ensembles qui constitue la source la plus abondante d'interprétations des systèmes d'axiomes.

La notion d'ensemble présente l'inconvénient d'être fondée sur la divalence. On a soit $e \in E$, soit $e \notin E$. Les situations concrètes sont représentées par des formules qui décrivent un système d'alternatives : chaque élément de la situation est soit réalisé, soit non réalisé, soit possible, soit impossible, etc.

Les règles d'utilisation s'appuient sur l'hypothèse qu'une assertion quelconque est soit vraie, soit fausse. En fait, les développements formels de ces logiques divalentes n'exigent nullement l'hypothèse qu'une assertion est ou bien vraie, ou bien fausse. On peut attacher à une assertion l'une des valeurs d'un ensemble de valeurs ordonnées, ensemble fini qu'on peut identifier aux entiers de 1 à n. On obtient ainsi les logiques multivalentes décrites par ROSSER et TURQUETTE.

Ces logiques ont permis une formalisation plus poussée de la théorie des probabilités : chaque assertion est un ensemble d'assertions élémentaires bivaluées. La valuation de l'assertion est alors le rapport du nombre d'assertions élémentaires vraies au nombre total d'assertions élémentaires, vraies ou fausses.

D'autres recherches ont montré que le caractère dénombrable de l'ensemble des valuations n'était nullement nécessaire au développement formel de la logique (modèles continus de CHANG et KEISLER).

On peut affiner la représentation formelle des phénomènes matériels en remarquant que la non réalisation d'un phénomène n'implique pas nécessairement la réalisation du phénomène « contraire » : cette remarque conduit à la théorie dialectique des probabilités de G. BODIOU qui distingue incohérence et contradiction.

Plus récemment, la logique dialectique de G. VASSAILS s'appuie sur l'observation qu'une assertion présente un certain degré de contradiction interne. Une assertion concernant un phénomène concret, et non sa représentation abstraite par un être mathématique fictif, est toujours en partie vraie, en partie fausse. Cette nouvelle logique est d'une portée considérable : elle remet en question le but même de toutes les recherches des logiciens qui rejettent impitoyablement tous les systèmes d'axiomes contradictoires, en vertu de l'affirmation : « Ex falso sequitur quodlibet » (Du faux, on peut déduire n'importe quoi). En fait, la logique de G. Vassails conduit à des systèmes d'axiomes qui ne sont que partiellement non contradictoires.

Le point de vue de la logique dialectique diffère du point de vue de la logique mathématique moderne notamment en ce sens que le but des logiciens classiques est d'exprimer les principes fondamentaux de la pensée mathématique formalisée, tandis que la logique dialectique rejoint le point de vue de Polya (« Les mathématiques et le raisonnement plausible ») qui a tenté de traduire le fait que la pensée intuitive obéit à des règles qui diffèrent notablement des règles du raisonnement mathématique formalisé.

Dans les paragraphes suivants, nous nous proposons de présenter quelques modifications apportées par la logique dialectique au visage de la logique moderne.

I. LA THÉORIE DES OBJETS

Nous désignerons par *objet* tout ce qui est susceptible de mouvoir notre pensée. Pour formaliser cette notion d'objet, nous admettrons la notion d'ensemble telle qu'elle est définie dans le système de Von Neumann Bernays. Mais nous verrons plus loin (paragraphe III) qu'une théorie plus affaiblie nous suffira pour définir un objet.

a. Définition d'un objet et des éléments d'un objet

Nous définissons provisoirement un objet E comme étant un ensemble de parties Y d'un ensemble A qui contient un ensemble y appelé *ensemble des caractères* de *E*.

Soit $\{e_X\}$ un ensemble d'objets e et X l'ensemble des ensembles x de caractères associés à chaque objet e_X. Nous nous proposons de définir une relation notée $\in_u$ entre les objets de $\{e_X\}$ et l'objet E.

Nous noterons U un ensemble que nous appellerons l'ensemble des *critères d'appartenance de* e_X à E.

Nous pouvons définir une *fonction d'appartenance* de e_X à E ainsi : $\in : \{x \cap U\} \rightarrow \{y \cap Y\}$ et un *degré d'appartenance* de e_X à E qui sera le couple $(y \cap Y, y' \cap Y)$ noté (y, y', Y) avec $y' = \complement_A y$.

Nous appellerons l'ensemble $\{e_X\}$ une *analyse* de l'objet E. Une analyse sera dite complète si la fonction $\in$ est surjective :

$$\in(\{x \cap U\}) = Y$$

Les notions que nous venons de définir permettent de préciser quelques aspects du concept intuitif d'objet. En effet, les caractères d'un objet et les caractères de l'ensemble des composants de cet objet ne sont pas nécessairement les mêmes (voir G. Vassails « Eléments de formalisation d'une logique dialectique », 1re partie). Par ailleurs, la fonction d'appartenance et le degré d'appartenance permettent de représenter, par des choix convenables des ensembles de caractères et de l'ensemble des critères, toutes les nuances intuitives de la phrase : l'objet e_X est un élément analytique de l'objet E.

b. Opérations sur les objets

Soit $\{\{e_X\}, X, U, E, \{y\}, Y\}$ l'ensemble des ensembles constitutifs d'une fonction d'appartenance.

Soit $\{\{e_X\}, X', U', E', \{y'\}, Y'\}$ un autre ensemble analogue au précédent. On peut définir un troisième ensemble analogue au précédent.

$$\{\{e_X\} \cup \{e_X'\}, X'', U'', E'', \{y''\}, y''\}$$
$$\text{avec } X'' = X \cup X' \text{ et } y'' = y \cup y'$$

U″ désignera l'ensemble des critères d'appartenance de e_X ou e_X' à l'objet E″. U″ peut être choisi arbitrairement. Toutefois, nous noterons quelques cas particuliers intéressants :

1° $U'' \subset U \cap U'$. On appellera l'objet E″ une *analogie* entre les objets E′ et E.

2° $U \cup U' \subset U''$. On appellera l'objet E″ un *assemblage* de composants E et E′.

On peut aussi définir une relation entre les objets E et E′ induite par la relation $U \subset U'$, on dira que l'objet E′ est une *partie* de l'objet E.

Si $U = U'$, les objets E et E′ sont dits *semblables* si $Y \neq Y'$ et *identiques* si $Y = Y'$ (1).

(1) On peut convenir d'écrire A = B si ε étant un ensemble donné à l'avance $\complement_A B \subset \varepsilon$, $\complement_A B \subset \varepsilon$ ou $\complement_B A \subset \varepsilon$, $\complement_B A \subset \varepsilon$.

Si un objet E'' a un ensemble de critères d'appartenance $U'' = \complement_{U'} U$ et si E'' est une partie de E', alors E' est un assemblage dont l'ensemble des éléments contient E et E''.

c. La notion d'objet et l'axiomatique de la théorie des ensembles

Pour formaliser la notion d'objet et définir des opérations sur les objets, nous n'avons utilisé que les cinq premiers axiomes de ZERMELO. (Extensionnalité, réunion, séparation, ensemble de sous-ensembles, somme). Nous ne nous sommes servi ni de l'axiome du choix ni de l'axiome de l'infini, ni de l'axiome de restriction, ni enfin de l'axiome de substitution de FRAENCKEL.

Nous n'avons utilisé l'axiome d'extensionnalité que pour définir la *similitude* et l'*identité* de deux objets.

Nous verrons, dans le paragraphe 3, comment aborder, à l'aide de la notion d'objet, les problèmes qui nécessitent le secours des axiomes que nous n'avons pas utilisés.

Auparavant, nous examinerons dans le paragraphe suivant les modifications que la théorie des objets apporte à la logique des prédicats.

II. LA THÉORIE DES OBJETS ET LA LOGIQUE DES PRÉDICATS (1)

a. Les prédicats

Le champ d'un prédicat $P(a^i_x)_{i \in I}$ ne sera plus un ensemble, mais un objet E.

P est une fonction de vérité qui associe à une suite donnée $\left(e^i_x\right)_{i \in I}$ d'éléments d'une analyse $\left\{e_x\right\}$ de E, une valeur de vérité v et v sera défini comme suit :

On attache au prédicat P une suite de *critères de vérité* $(V^i)_{i \in I}$ et, à chaque e^i_x, un *coefficient de vérité* v^i_x, fonction du degré d'appartenance (y, y', Y) de e^i_x à E.

La valeur de vérité v de P pour une suite donnée $(e^i_x)_{i \in I}$ sera la suite $(v^i_x \cap V^i)_{i \in I}$.

Remarque : I est l'ensemble d'indexation des variables a^i_x de P.

b. Les quantificateurs

La notation $(e^a_{y_\alpha}, v_\alpha)$ P $(e^i_x)_{a \in J \subset I}$ signifie que les variables e^a_x sont liées par les quantificateurs $(e^a_{y_\alpha}, v_\alpha)$: si l'élément variable e^i_x est remplacé par un élément donné e^i_{xo} dont le degré d'appartenance (y, y', Y) est tel que $Y_\alpha \cap Y \subset y \cap Y$, la valeur de vérité correspondant est telle que $v^a_\alpha \cap V^a \subset v^a_x \cap V^a$.

Cas particuliers

1° Lorsque la correspondance qui définit v^a_x en fonction de (y, y', Y) est telle que $V^a \subset (\cap v^a_x)_{x \subset X}$, on dira que la variable e^a_x est liée par un *quantificateur universel*. Les composantes $v^a_x \cap V^a$ de la valeur de vérité v de P seront égales à V^a. On notera $(\forall e^a)$ P (e^i_x) ce quantificateur particulier.

2° Si on a $V^a \cap (\cap v^a_x)_{x \subset X} \neq 0$, on notera $(\exists\, e^a)P(e_x)$, les quantificateurs astreints à cette seule condition. Ces quantificateurs seront désignés sous le nom de *quantificateurs d'existence*.

c. Les connectifs (1)

Soit $(P_\ell)_{\ell \in L}$, une suite de prédicats $P_\ell(a^i_x)_{i \in I}$ définie sur un objet E dont l'analyse est $\left\{e_x\right\}$.

(1) Voir NOVIKOF : « Introduction à la logique moderne », chapitre « La logique des prédicats ».

(1) Voir CHANG et KEISLER « Continuows model theory ».

Nous pouvons définir un nouveau prédicat P à partir de $(P_\ell)_{\ell \in L}$ comme suit :

Soient $V^i_{P_\ell}$ les critères de vérité des P_ℓ et $v^i_{x,\,P_\ell}$ les coefficients de vérité des variables e^i_x, relativement aux prédicats P_ℓ. On associe un critère de vérité V^i_P à chaque suite $(V^i_{P_\ell})_{\ell \in L}$ et on définit des fonctions C^i de X^L dans X qui font correspondre un coefficient de vérité $v^i_{x,\,P}$ à la suite $(v^i_{x,P_\ell})_{\ell \in L}$.

On appellera *connectif*, un ensemble $C = \left\{C^i\right\}$ de fonctions C^i.

Remarques

1° En connectant, à l'aide de $C = \left\{C^i\right\}$, les prédicats $(P_\ell)_{\ell \in L}$, on obtient un nouveau prédicat défini sur E, que nous appellerons une *formule*. Un prédicat défini a priori sera une *formule élémentaire*.

2° On voit que la notion de formule est *constructive* : on peut obtenir une nouvelle formule en remplaçant dans une formule, un prédicat par un autre prédicat ou une formule.

3° Soient $U^\ell \subset X$, les ensembles de définition des fonctions C^i d'un connectif C. Si on a : $\left(\bigcup_{x \subset X} v^i_{x,\,P_\ell}\right) \cap U^\ell \neq \phi$, pour au moins un ℓ, on dira que la formule P *n'est pas applicable* à l'objet E.

d. Les axiomes (1)

Soit $\left\{F_k\right\}_{k \in K}$, un ensemble de formules construites à l'aide de $\left\{P_\ell\right\}_{\ell \in L}$, prédicats dépendant de $\left\{u^i\right\}_{i \in I}$ variables. $\left\{F_k\right\}_{k \in K}$ est un *système d'axiomes* si :

(1) Voir : Novikof, loc. cit.

1° Il existe un objet E d'analyse incomplète $\left\{e^{i'}_x\right\}_{i' \in I' \subset I}$ et des prédicats $(P'_{\ell'})_{\ell' \in L' \subset L}$ définis sur E, tels que chaque formule soit applicable à E pour un système de coefficients de vérité donnés $\left\{v^{i'}_{x,\,P'_{\ell'}}\right\}$

2° Chaque formule F_k est applicable à E quels que soient les prédicats $\left[\text{autres que les prédicats } (P'_{\ell'})_{\ell' \in L'}\right]$ se rapportant à E et quels que soient les coefficients de vérité attribués aux éléments de $\left\{e_x\right\}$ substitués aux variables u^i pour $i \in I'$. L'objet E est une *interprétation* du système d'axiomes $(F_k)_{k \in K}$.

e. Interprétabilité, non contradiction et réduction d'un système d'axiomes

1. Contrairement aux systèmes d'axiomes applicables à des ensembles, un système d'axiomes s'appuyant sur la notion d'objet est toujours interprétable, à condition de choisir convenablement les coefficients de vérité $\left\{v^{i'}_{x,\,P'_{\ell'}}\right\}$. Ce n'est que dans le cas où les coefficients de vérité sont imposés a priori, que le système d'axiomes peut ne pas être interprétable.

2. Le problème de la non contradiction de $(F_k)_{k \in K}$ ne se pose que dans le cas où il n'est attribué à chaque prédicat que deux valeurs de vérité possible. Par contre, on pourra se poser le problème du *degré de contradiction* d'un système d'axiomes.

3. Il peut arriver qu'une formule F_k de $(F_k)_{k \in K}$ puisse être construite à partir de formules choisies parmi les K–1 formules restantes. Si on peut établir que cette éventualité est irréalisable, nous dirons que $(F_k)_{k \in K}$ est un système d'axiomes *indépendants*.

III. INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES ENSEMBLES DÉFINIS COMME OBJETS PARTICULIERS

a. Objets à un critère d'appartenance

Etudions le cas particulier d'un objet E dont l'ensemble des critères d'appartenance U se réduit à un seul élément (objet à un critère d'appartenance : $U_o = \left\{u_o\right\}$).

On a soit $x \cap U_o = U_o$ soit $x \cap U_o = \emptyset$. L'ensemble des valeurs de la fonction $\in_u$ se réduit à deux valeurs au plus : $y_o \cap Y$ et $(\complement_A y_o) \cap Y$. Ces valeurs définissent deux degrés d'appartenance au plus :

$[(y_o \cap Y, (\complement_A y_o) \cap Y] = (y_o, y'_o, Y)$ noté $\in$

$[(\complement_A y_o) \cap Y, y_o \cap Y] = (y'_o, y_o, Y)$ noté $\notin$

Nous avons entre l'objet **E** et un ensemble de variable z quelconques soit la relation $z \in$ **E**, soit la relation $z \notin$ **E**. Nous retrouvons ainsi la divalence inhérente à la théorie des ensembles comme cas particulier de la théorie des objets.

On peut toujours supposer $y_o \subset Y$ en notant y_o le caractère de **E** d'être tel que u_o est un caractère de tout objet e_x d'une analyse de **E**, car un critère d'appartenance à **E** n'est autre qu'un des caractères de **E**.

Remarques

1° Nous pouvons définir un ensemble sur un objet en restreignant la fonction d'appartenance aux seuls arguments $x \cap U_o = U_o$ et $x \cap U_o = \emptyset$, U_o étant une partie de U.

2° Nous pouvons définir un objet dont les ensembles X, U, Y sont des objets : à chaque opération sur les ensembles utilisée pour définir des objets, nous avons fait correspondre une opération sur les objets.

b. Objets à n. critères : $U = \{ u_1, \dots u_n \}$

Le nombre de degrés d'appartenance est au plus égal à 2^n. On peut définir un ensemble sur cet objet : par exemple, en associant une valeur $y'_o \cap Y$ notée $\notin$ à $x \cap U$ s'il existe au moins un $u_i \in U$ tel que $x \cap u_i = \emptyset$, puis la valeur $y_o \cap Y$ notée $\in$ si $U \subset x$. (On a posé $y'_o = \complement_A y_o$).

c. Objets dont l'ensemble U des critères est lui-même un objet à critère unique

Cet objet à critère unique d'appartenance est un ensemble et son critère unique est noté $U_o = \{ u_o \}$.

Le nombre « d'éléments » N(U) de U est indéterminé car on peut marquer du critère U_o un objet formé par un assemblage d'autant d'objets qu'on le désire.

On notera conventionnellement que le nombre de degrés d'appartenance est $2^{N(U)}$ au plus.

d. Ensemble des parties d'un objet à critère unique

Soit E un objet à critère unique $U_o = \{ u_o \}$. Soit A un objet dont l'ensemble U des critères est un objet à critère unique $U_1 = \{ u_1 \}$. Soit A_i un objet dont l'ensemble des critères est $U_i = \{ U_o, U'_i \}$ avec $U'_i \subset U$. A_i est une partie de E car $U_o \subset U_i$. Définissons deux degrés d'appartenance à A_i. Soit $\{ a^i_x \}$ une analyse de A_i ; on a $a^i_x \in A_i$ si $a^i_x \cap U_i = U_i$ et $a^i_x \notin A_i$ si $a^i_x \cap U_i \neq U_i$.

Remarques

1° Les objets E, A_i et U ont des critères d'appartenance unique. Les nombres d'éléments de leurs analyses respectives sont alors indéterminés et indépendants les uns des autres. Choisissons-les égaux :

$$N(E) = N(A_i) = N(U) \qquad (1)$$

Définissons maintenant deux degrés d'appartenance à A : soit $\{ a_x \}$, une analyse de A ; on a :

$a^i_x \in A$ si $a^i_x \cap U \neq 0$ et $a^i_x \in A$ si $a^i_x \cap U = \emptyset$.

A chaque $a^i_x \cap U$ correspond une partie U'_i de U. Le nombre d'éléments a^i_x tel que $a^i_x \cap U = U'_i$ est indéterminé. Soit $N(U'_i)$, ce nombre. Soit N(U) le nombre, indéterminé, d'éléments de U. Le nombre de parties de U est $2^{N(U)}$. Le nombre d'éléments de l'analyse de A est $N(U'_i)2^{N(U)}$.

Ce nombre d'éléments de l'analyse de A est indéterminé, puisque $N(U'_i)$ et N(U) sont indéterminés, mais $N(U'_i)2^{N(U)}$ n'est pas indépendant de $N(U'_i)$ et de N(U). Si à chaque partie A_i de E un élément et un seul de $\{ a^i_x \}$ est tel que $a^i_x \cap U = U_i$, cette opération revient à choisir $N(U_i) = 1$. Le nombre N(U) peut être choisi égal à $N(A_i)$ d'après (1).

Le nombre d'éléments analytiques de A est alors $2^{N(A_i)} = 2^{N(E)}$ = nombre de parties de E.

e. L'infini potentiel et la théorie des objets

La théorie des ensembles ne peut être développée que si on accepte le concept d'infinité réelle, c'est-à-dire « une totalité infinie dont la construction soit achevée et dont les éléments se présentent simultanément » (NOVIKOF).

Les exemples que nous venons de présenter dans le paragraphe précédent montrent que les nombres d'éléments des analyses d'objet ont des propriétés analogues aux propriétés des nombres transfinis. Toutefois l'étude de ces propriétés ne fait pas appel à l'infini réel, mais à l'infini potentiel. « Chaque possibilité est séparément réalisable, un nombre fini de ces possibilités est également réalisable, mais elles ne sont pas réalisables toutes ensemble » (Novikof).

IV. CONCLUSION

Cet exposé est une présentation d'idées de recherches dont le but est de réduire les inconvénients des logiques divalentes.

La pensée rationnelle travaille sur des schémas qui ne sont que plus ou moins adéquats à la réalité concrète. Quand un schéma se révèle inadéquat, on en recherche plus ou moins empiriquement un autre en espérant qu'il coïncidera mieux avec la conscience intuitive que nous avons de la réalité. La *recherche* de ces schémas, qui alimentent la pensée rationnelle, ne procède nullement selon des logiques non contradictoires.

La fabrication d'un schéma consiste en effet en une élimination des contradictions inhérentes aux données premières. Pour formaliser ce travail d'élimination, il faut pouvoir dégager les lois qui régissent ces contradictions. Ces lois ne peuvent être étudiées que dans le cadre de logiques admettant la contradiction. Ces logiques ne pourront généralement pas être interprétées par la théorie des ensembles. Il faut une théorie plus générale que nous proposons d'appeler la théorie des objets.

Manuscrit reçu le 1er février 1967.

RÉFÉRENCES

BETH E.W. — *Les fondements logiques des mathématiques.* chez Gauthier Villars, Paris, 1955.

BODIOU G. — *Théorie dialectique des probabilités* — chez Gauthier Villars, Paris, 1964.

CHANG et KEISLER. — *Continuous model theory* — in « The theory of models » North Holland Publishing Company, 1965.

HAO WANG et NAUGHTON. — *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles* — chez Gauthier Villars, Paris, 1965.

NOVIKOF P.S. — *Introduction à la logique mathématique* — chez DUNOD, Paris, 1964.

SIERPINSKI W.

1. *Leçons sur les nombres transfinis*, chez Gauthier Villars, Paris, 1928.

2. *Hypothèse du continu*, 1934.

VASSAILS G.

1. *Eléments de formalisation d'une logique dialectique.* « Annales de l'Université de Madagascar », série Sciences de la nature et Mathématiques, no 4, 1966.

2. *Les logiques métriques divalentes*, ibid, no 5, 1967.