LA FORCE D'INTÉRACTION ET LA QUANTITÉ D'ACCÉLÉRATION EN RELATIVITÉ RESTREINTE

par

GÉRARD VASSAILS

Maître de Conférence à la Faculté des Sciences de Madagascar.

La schématisation par points matériels conserve encore une grande importance en dynamique, notamment dans le domaine de la Physique corpusculaire. Le but essentiel de ce travail est, dans les limites de cette schématisation et l'approximation des faibles accélérations, l'approfondissement. la précision du vieux concept de force.

I. — Cinétique

1. *Transformation des quantités d'accélération*

Par définition, la quantité d'accélération d'un point matériel est la grandeur

$$\vec{q} = \frac{d}{dt}\vec{p} \quad \text{où} \quad \vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

Le mouvement d'un point matériel par rapport à un référentiel d'inertie K (en abrégé : dans K) est doué de la quantité d'accélération $\vec{q}$; dans K', référentiel d'inertie animé par rapport à K de la vitesse $\vec{u}$, le mouvement du même point a la quantité d'accélération $\vec{q'}$, qui se déduit de $\vec{q}$, conformément à la transformation de Lorenz, par la relation

$$(1) \qquad \vec{q'} = \frac{1}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\vec{u}.\vec{v'}}{c^2}\right)\vec{q} - \frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{v'}.\vec{q}) + \frac{\vec{u}}{u^2}(\vec{u}.\vec{q})\,(\alpha - 1)\right]$$

où $\vec{v'}$ est la vitesse du point matériel dans K' ; $\alpha = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$.

En posant $\vec{q} = q\,\vec{j}$, $\vec{j}$ vecteur unitaire (1), s'écrit :

$$(2) \qquad \vec{q'} = \frac{q}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\vec{u}.\vec{v'}}{c^2}\right)\vec{j} - \frac{\vec{u}}{c^2}(\vec{v'}.\vec{j}) + \frac{\vec{u}}{u^2}(\vec{u}.\vec{j})\,(\alpha - 1)\right]$$

Soit $\vec{j'}$ le transformé lorenzien, dans K', de $\vec{j}$; $\vec{j'}$ n'est plus unitaire ; son module vaut

$$|j'| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \cos^2\theta}}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

où $\beta = \frac{u}{c}$, $\cos\theta = \cos(\vec{j}, \vec{u'})$ et $\vec{u'} = -\vec{u}$; ou encore

$$|j'| = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \cos^2\theta'}} = \frac{\alpha}{\gamma'}$$

avec $\cos\theta' = \cos(\vec{j'}, \vec{u})$.

En portant dans (2) la valeur de $\vec{j}$ en fonction de $\vec{j'}$, soit

$$\vec{j} = \vec{j'} + \frac{\vec{u}}{u^2}(\vec{u}.\vec{j'})\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

il vient, toutes réductions faites,

$$\vec{q'} = \frac{q}{\alpha}\left[\vec{j'} + \frac{\vec{u}.\vec{v'}}{c^2}\vec{j'} - \frac{\vec{u'}}{c^2}(\vec{v'}.\vec{j'})\right]$$

relation équivalente à

$$(4) \qquad \vec{q'} = \frac{q}{\alpha}\left[\vec{j'} + \frac{\vec{v'}}{c^2} \wedge (\vec{j'} \wedge \vec{u})\right]$$

soit encore, en portant la vitesse $\vec{u'} = -\vec{u}$ de K par rapport à K',

$$\vec{q'} = \frac{q}{\alpha}\left[\vec{j'} + \frac{\vec{v'}}{c^2} \wedge (\vec{u'} \wedge \vec{j'})\right]$$

Les relations (4) montrent que le changement de référentiel produit une quantité d'accélération $\vec{\Theta'}$ non colinéaire à $\vec{j'}$

$$\vec{\Theta}' = \frac{q}{\alpha c^2} \vec{v}' \wedge (\vec{u}' \wedge \vec{j}')$$

qui est normale à la trajectoire du point matériel. Nous l'appellerons quantité d'accélération *tourbillonnaire, ou magnétique.*

En relativité galiléenne, il n'apparaît de qu. d'acc. tourbillonnaires que lors du passage d'un référentiel d'inertie K à un référentiel K' tournant. Si la vitesse angulaire de la rotation de K' par rapport à K est $\vec{\omega}$, les qu. d'acc. tourbillonnaires sont déterminées par la relation de Coriolis.

$$\vec{q} = \vec{q}' + 2\, m_0 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$\theta' = 2\, m_0 \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

En relativité de Lorenz-Einstein, elles se manifestent dès le passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Dans les deux cinématiques, les $\vec{\Theta}'$ sont des *grandeurs de mouvement apparent* c'est-à-dire, par définition, des grandeurs qu'un changement de référentiel suffit à annuler ou à changer de sens.

2. *Application au mouvement mutuel de deux points matériels*

a) Deux points matériels A et B sont animés, dans K, de vitesses respectives $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$. Le mouvement de A par rapport à B est celui par rapport à un référentiel K_B animé, par rapport à K, de la vitesse $\vec{v}_B$. Dans K_B, B est au repos.

Soit $\vec{q}_A^{\,B}$ la quantité d'accélération du mouvement de A par rapport à B. Dans K, elle vaudra (4 *bis*).

$$\vec{q}_A = \frac{q_A^B}{\alpha} \left[\vec{j}_A + \frac{\vec{v}_A}{c^2} \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{j}_A) \right] \tag{5}$$

où $\alpha_B = \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}$ et $\vec{j}_A$ est le transformé lorenzien de $\vec{j}_A^{\,B}$ tel que $\vec{q}_A^{\,B} = q_A^B \vec{j}_A^{\,B}$.

Or, le mouvement mutuel est une relation purement cinématique entre A et B. Il n'implique nullement une intéraction de A avec B. La qu. d'acc. $\vec{q}_A^B$ peut être due uniquement à des intéractions de A avec des points C, D, ...autres que B. S'il en est ainsi, la composante tourbillonnaire

$$\vec{\Theta}_A = \frac{q_A^B}{\alpha_B c^2} \left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{j}_A) \right] \tag{6}$$

n'en est pas moins déterminée par $\vec{v}_B$ et non par $\vec{v}_C$, $\vec{v}_D$ ...Un changement de référentiel qui annule ou change de signe $\vec{v}_B$ annule ou inverse $\vec{\Theta}_A$, alors que B n'est pas en intéraction avec A. Concrétisons. A est un électron, B un neutron, la distance AB est très grande par rapport aux dimensions nucléaires : aucune intéraction de A avec B n'existe. Par contre C, D ... sont des corpuscules électrisés et c'est par son intéraction avec eux que A prend la qu. d'acc. $\vec{q}_A^B$. Le passage du référentiel K_B propre au neutron à un autre, K, produit une qu. d'acc. magnétique entièrement commandée par la vitesse du neutron avec lequel cependant l'électron n'est pas en intéraction. En annulant ou en changeant de sens $\vec{v}_B$ par un choix convenable de K, on fait subir le même traitement à $\vec{\Theta}_A$. Les qu. d'acc. magnétiques ne sont pas liées nécessairement à des intéractions : ce sont bien des grandeurs de mouvement apparent.

b) Le caractère tourbillonnaire de $\vec{\Theta}_A$ apparaît de la manière suivante. Remplaçons $\vec{j}_A$ dans (6) par le vecteur unitaire $\vec{i}_A$ tel que (3 *bis*)

$$\vec{j}_A = \frac{\alpha_B}{\gamma_B} \vec{i}_A$$

Alors

$$\vec{\Theta}_A = \frac{q_A^B}{\gamma_B c^2} \left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A) \right]$$

Si, dans K, $|AB| = r$ et si $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de la rotation de B autour de A,

$$\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A = r\,\vec{\omega}$$

de sorte que

$$\vec{\Theta}_A = -\frac{q_A^B r}{\gamma_B c^2} (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A)$$

expression analogue à celle des qu. d'acc. de Coriolis.

3. *Energie cinétique*

Par définition de l'énergie cinétique E_c, $dE_c = \vec{q} . \vec{ds}$ ($\vec{ds}$, déplacement infinitésimal du point matériel). Dans K', d'après (4 *bis*)

$$dE'_c = \vec{q}'.\vec{ds}' = \frac{q}{\alpha} \vec{j}'.\vec{ds}' + \vec{\Theta}'.\vec{ds}'$$

La circulation de $\vec{\Theta}'$, vecteur toujours normal à $\vec{ds}'$ est identiquement nulle de sorte que

$$dE'_c = \frac{q}{\alpha} \vec{j}'.\vec{ds}'$$

Seule la composante non tourbillonnaire de $\vec{q}'$ détermine l'accroissement de l'énergie cinétique.

II. — Dynamique

1. *Force d'une intéraction*

a) Considérons deux points matériels A et B en intéraction mutuelle mais sans intéraction avec aucun autre (intéraction libre, ou isolée). Dans K_B, où B est au repos, l'intéraction mutuelle imprime à A la qu. d'acc. $\vec{q}_A^B$. Celle-ci est déterminée par la *loi spécifique* de l'intéraction (loi de Newton, loi de Coulomb, etc.).

L'intéraction étant réciproque, sa loi doit faire jouer à A et à B des rôles symétriques. La vitesse de B étant seule nulle dans K_B, il en résulte que le seul facteur cinématique qui pourra conditionner $\vec{q}_A^B$ sera la position mutuelle des deux points.

Posons $\vec{BA} = r_B \vec{j}_A^B$ où r_B est la distance $|AB|$ dans K et $\vec{j}_A^B$ le vecteur unitaire lié à A, colinéaire à AB et orienté vers l'extérieur du segment AB. Les lois spécifiques d'intéraction revêtent la forme générale

$$\vec{q}_A^{\,B} = \varphi_0 \, f(r_B) \, \vec{j}_A^{\,B} \tag{6}$$

où $f(r_B)$ est une fonction positive décroissante de la distance et φ_0 une grandeur non mécanique. Cependant, les lois de cette forme ne tiennent pas compte du rayonnement que produit l'intéraction. Elles ne sont valables, par approximation, que dans *le cas ou les quantités d'accélération sont suffisamment faibles* (mouvements lentement accélérés). Dans tout ce qui suit, nous supposerons cette condition remplie.

D'aprés (6) l'intéraction est répulsive si $\varphi_0 > 0$, attractive dans le cas contraire ; le signe de φ_0 fixe le *sens agrégatif* de l'intéraction.

b) Une intéraction est une réalité physique qu'aucun changement de référentiel ne peut annihiler, ni créer, ni inverser quant à son sens agrégatif. En effet, une intéraction libre va se manifester, dans K, par un rapprochement ou un éloignement mutuel de A et de B. Pour le démontrer, multiplions scalairement les deux membres de (6) par le déplacement élémentaire $\vec{ds}_A^{\,B}$ de A

$$\vec{q}_A^{\,B} \cdot \vec{ds}_A^{\,B} = \varphi_0 \, f(r_B) \, dr_B$$

Sauf dans le cas fortuit où $\vec{ds}_A^{\,B}$ est perpendiculaire à $\vec{BA}$, dr_B varie donc au cours d'une intéraction. Or, si dans K quelconque $\vec{BA}$ varie de $d\vec{BA}$, dans K' animé, par rapport à K, de la vitesse $\vec{u} = u\,\vec{k}$, $\vec{k}$ vecteur unitaire, la variation correspondante sera, conformément à la transformation de Lorenz,

$$d\vec{B'A'} = d\vec{BA} + \vec{k}\left[\vec{k} \cdot d\vec{BA}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right]$$

La composante $(d\vec{BA})_1$ perpendiculaire à $\vec{u}$ est donc invariante, tandis que la composante $(d\vec{BA})_2$ parallèle à $\vec{u}$ se transforme selon

$$(d\vec{B'A'})_2 = \frac{(d\vec{BA})_2}{\alpha}$$

(contraction de Lorenz). On voit qu'un changement de référentiel ne peut annuler ni changer de sens ni $(d\vec{BA})_1$ ni $(d\vec{BA})_2$ ni par

conséquent ($d\overrightarrow{BA}$). Ainsi, l'éloignement ou le rapprochement mutuel, manifestation cinématique de l'intéraction libre de deux points, de leur répulsion ou de leur attraction récriproque, ne peut, par changement de référentiel, ni s'annuler, ni se transformer en son inverse. Par là, ainsi que par les invariants contenus dans φ_o, et en particulier le signe, apparaît cette réalité indépendante du référentiel qui est inhérente à l'intéraction mécanique.

Par opposition aux grandeurs de mouvement apparent, nous appellerons *grandeurs essentielles*, en relativité, celles qu'un changement de référentiel ne peut ni annuler ni changer de signe. Telles une position mutuelle $\overrightarrow{BA}$, une inertie $\frac{m_o}{\alpha}$. Parmi les grandeurs essentielles, certaines sont invariantes comme l'intervalle d'univers ou la charge électrique. Pour une grandeur G dont la variance est du type

$$G' = G\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

l'annulation peut être formellement obtenue à la limite si $u \to c$. Mais physiquement ce passage à la limite est une impossibilité.

c) Le mouvement de A dans K quelconque sera, de par l'intéraction avec B, doué d'une qu. d'acc. qui vaut (5) :

$$\overrightarrow{q_A} = \frac{\varphi_o}{\alpha_B} f(r_B) \left[\overrightarrow{j_A} + \frac{\overrightarrow{v_A}}{c^2} \wedge (\overrightarrow{v_B} \wedge \overrightarrow{j_A})\right] \tag{7}$$

$\overrightarrow{q_A}$ additionne deux composantes :

1° *La composante agrégative*

$$\overrightarrow{\mathfrak{a}_A} = \frac{\varphi_o}{\alpha_B} f(r_B) \overrightarrow{j_A}$$

Elle est colinéaire à AB et de sens $\overrightarrow{BA}$ dans K, de sorte que, si elle existait seule, l'intéraction se manifesterait uniquement dans K par un éloignement ($\varphi_o > o$) ou un rapprochement ($\varphi_o < o$) mutuels de A et de B, ce qui justifie sa dénomination. C'est une grandeur essentielle.

2° *La composante tourbillonnaire, ou magnétique*

$$\overrightarrow{\Theta_A} = \frac{\varphi_o}{\alpha_B c^2} f(r_B) \left[\overrightarrow{v_A} \wedge (\overrightarrow{v_B} \wedge \overrightarrow{j_A})\right] \tag{8}$$

Celle-ci est, au contraire, une grandeur de mouvement apparent.

Nous avons démontré qu'elle peut exister même si A n'est pas en intéraction avec B (1,2)

$\vec{\Theta}_A$ est négligeable par rapport à $\vec{\mathcal{A}}_A$ tant que $\frac{v_A\ v_B}{c^2}$ reste petit devant l'unité. Si v_A et v_B sont de l'ordre de 3.000 km/s, $\vec{\Theta}_A \simeq 10^{-4}\,\vec{\mathcal{A}}$; Θ ne devient comparable à $\mathcal{A}$ que pour des vitesses de l'ordre de 100.000 km/s.

d) La composante magnétique n'étant pas nécessairement la manifestation d'une intéraction entre A et B, nous ne pouvons pas la prendre en considération pour définir la *force d'une intéraction.* Le concept de force doit rendre compte de ce que l'intéraction a d'indépendant par rapport au référentiel. Nous posons donc, par définition, que la force d'une intéraction est une grandeur.

1° déterminée par la loi spécifique de l'intéraction,

2° essentielle,

3° homogène à une quantité d'accélération.

Conformément à cette définition et au choix usuel de l'unité de force, la force appliquée à A vaut, dans K_B,

$$\vec{F}_A^B = \varphi_0\, f(r_B)\, \vec{j}_A^B$$

et dans K quelconque,

$$\vec{F}_A = \frac{\varphi_0\, f(r_B)}{\alpha_B}\, \vec{j}^A = \vec{\mathcal{A}}_A \tag{9}$$

La force de l'intéraction est égale à la seule quantité d'accélération agrégative. Pas plus qu'à une accélération de Coriolis en mécanique galiléenne, aucune force ne correspond à la quantité d'acc. tourbillonnaire ou magnétique. Comme nous l'avons démontré (I, 3) le travail de la force ainsi définie est égal à la variation d'énergie cinétique.

e) Les $\vec{q}$, $\vec{\mathcal{A}}$, $\vec{F}$ et $\vec{\Theta}$ dans K peuvent être exprimées uniquement à l'aide de grandeur relatives à ce référentiel. D'après (3 *bis*)

$$r_B = \frac{\gamma_B}{\alpha_B}\, r\ ;\quad \gamma_B = \sqrt{\alpha_B^2 + \beta_B \cos^2\theta}$$

$$\beta_B = \frac{v_B}{c}\quad ;\quad \theta = (\vec{v}_B, \vec{BA}) \text{ dans K.}$$

On a aussi

$$|j_A| = \frac{\alpha_B}{\gamma_B}\ ;\ \vec{j}_A = \frac{\alpha_B}{\gamma_B}\, \vec{i}_A,\ \vec{i}_A \text{ vecteur unitaire dans K.}$$

D'après (9)

$$\vec{F}_A = \frac{\varphi_0}{\gamma_B} f\left(\frac{\gamma_B}{\alpha_B} r\right)\vec{i}_A = F\,\vec{i}_A \tag{10}$$

On voit que le caractère attractif ou répulsif de $\vec{F}_A$, déterminé par le signe de φ_0, est invariant. Pour la quantité d'acc. magnétique, nous aurons

$$\vec{\Theta}_A = \frac{F}{c^2}\left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A)\right]$$

2. *Loi d'action et de réaction. Energie potentielle d'intéraction*

En mécanique newtonienne, les intéractions, quelle que soit leur diversité qualitative, se conforment à la loi cinétique générale suivante, dite d'action et de réaction : les quantités d'acc. que se communiquent mutuellement deux points A et B en intéraction sont colinéaires à AB, égales et de sens contraires. Il en est ainsi dans tout référentiel d'inertie K et même dans tout référentiel en translation accélérée par rapport à K ; les forces, dans ces conditions se conforment aussi à la loi.

La mécanique relativiste doit coïncider avec la newtonienne quand les vitesses deviennent faibles. Dans K_B, où B est au repos, on doit avoir si $\vec{v}_A \to 0$

$$\vec{q}^{\,B}_A = -\vec{q}^{\,B}_B$$

Or, ces qu. d'acc. sont indépendantes de $\vec{v}_A$, donc cette relation d'opposition est valable quelle que soit $\vec{v}_A$. Dans K, selon (5)

$$\vec{q}_B = \frac{q^B_B}{\alpha_B}\left[\vec{j}_B + \frac{\vec{v}_B}{c^2} \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{j}_B)\right]$$

Donc

$$\vec{F}_B = \vec{\mathcal{A}}_B = \frac{\varphi_0}{\alpha_B} f(r_B)\,\vec{j}_B$$

De $\vec{j}^{\,B}_B = -\vec{j}^{\,B}_A$ découle $\vec{j}_B = -\vec{j}_A$. Donc $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$.

Par contre (8)

$$\vec{\Theta}_B = \frac{\varphi_0}{\alpha_B c^2} f(r_B)\left[\vec{v}_B \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{j}_B)\right] \neq -\vec{\Theta}_A$$

Ainsi, avec la définition adoptée pour la force, les qu. d'acc. agrégatives et la force obéissent à la loi d'action et de réaction dans tout référentiel d'inertie. Mais les qu. d'acc. magnétiques et par conséquent les qu. d'acc. globales ne se conforment pas à cette loi, sauf dans les référentiels propres K_A ou K_B et, dans un référentiel quelconque, si fortuitement $\vec{v}_A = \vec{v}_B$.

Nous pouvons compléter (10).

$$\vec{F}_A = F\,\vec{i}_A \;;\; \vec{F}_B = F\vec{i}_B$$

$$F = \frac{\varphi_o}{\gamma_B} f\left(\frac{\gamma_B}{\alpha_B} r\right)$$

F est la *force scalaire* d'intéraction. Le travail élémentaire, dans K des forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ vaut

$$\vec{F}_A.\,\vec{dA} + \vec{F}_B.\,\vec{dB} = F\,dr = dE_c$$

Ec est l'énergie cinétique d'intéraction, somme des énergies cinétiques des deux points matériels. Par conséquent, $dE_p = -F\,dr$. E_p est l'énergie potentielle d'intéraction.

III. — Exemples

1. *Interaction électrique*

La loi spécifique est la loi de Coulomb. En unités M K S A rationalisées par exemple, nous aurons dans K_B :

$$\varphi_o = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o} Q_A\,Q_B \qquad\qquad f(r_B) = \frac{1}{r_B^2}$$

ε_o invariante ; Q_A et Q_B charges électriques posées comme invariantes. D'après (10) et (10 *bis*), on a dans K :

$$\vec{F}_A = \frac{\varphi_B}{r^2}\,\vec{i}_A \quad ; \quad \varphi_B = \frac{Q_A\,Q_B}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{\alpha_B^2}{\gamma_B^3}$$

La force de l'intéraction se réduit à la force coulombienne. La qu. d'acc. tourbillonnaire (10 *bis*)

$$\vec{\Theta}_A = \frac{\varphi_B}{r^2\,c^2}\left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A)\right]$$

est appelée d'habitude — improprement selon notre définition de la force — force électromagnétique ou force de Laplace. C'est une grandeur purement cinétique et non dynamique, ainsi que nous l'avons notamment illustré (1, 2) à propos du mouvement mutuel d'un électron et d'un neutron.

Dans un conducteur métallique parcouru par un courant électrique, les vitesse $\vec{v}_B$ des électrons, qui déterminent l'effet magnétique, sont très petites : de l'ordre de quelques mm/s. Mais le nombre de ces électrons est prodigieux et leurs effets tourbillonnaires $\vec{\Theta}_A$ sur un corpuscule électrisé A en mouvement au voisinage du conducteur s'ajoutent. Au contraire, leurs effets agrégatifs sont presque complétement neutralisés par ceux des ions positifs du métal, tandis que l'effet magnétique de ces derniers, immobiles en moyenne, est nul. C'est grâce à ces conditions exceptionnellement favorables que la composante tourbillonnaire $\vec{\Theta}_A$ est si aisément accessible à l'expérience et à la mesure lorsqu'on a affaire aux courants électriques de conduction usuels. Les expériences classiques d'Oersted ou d'Ampère constituaient donc, sans qu'on en sût rien avant la découverte de la relativité, d'excellentes vérifications de la mécanique d'Einstein, plus particulièrement de la relation (4 *bis*).

2. *Gravitation*

La loi spécifique est la loi de Newton. Dans K_B

$$\varphi_o = - G M_A^B M_B^B \qquad\qquad f(r_B) = \frac{1}{r_B^2}$$

G constante de gravitation invariante, M_A^B et M_B^B masses gravitationnelles. Les succès expérimentaux de la théorie einsteinienne de la gravitation fondent la proportionnalité de la masse gravitationnelle à l'inertie, même aux grandes vitesses. Les masses gravitationnelles ne peuvent donc pas être posées comme invariantes. Compte tenu du choix usuel des unités d'inertie et de masse pesante et en désignant par m_A^o et m_B^o les inerties au repos de A et de B nous aurons dans K_B

$$M_A^B = \frac{m_A^o}{\alpha_A^B} \; ; \; M_B^B = m_B^o \; ; \; \alpha_A^B = \sqrt{1 - \frac{v_A^{B2}}{c^2}}$$

v_A^B est le module de la vitesse de A dans K_B ou vitesse mutuelle de A par rapport à B. Si $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ sont les vitesses des deux points dans K quelconque,

$$\vec{v}_A^B = \frac{\alpha_B \vec{v}_A - \vec{v}_B + \vec{v}_B \left[\frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{v_B^2} \left(\frac{1}{\alpha_B} - 1 \right) \right]}{1 - \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{c^2}}$$

Nous aurons finalement dans K

$$\vec{F}_A = \frac{\varphi_B}{r^2} \vec{i}_A \qquad \vec{\Theta}_A = \frac{\varphi_B}{r^2 c^2} \left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A) \right]$$

$$\varphi_B = \frac{G m_A^o m_B^o \alpha_B^2}{\alpha_A^B \gamma_B^3}$$

Les conditions particulièrement favorables qui permettent en électricité, d'observer et de mesurer des qu. d'acc. tourbillonnaires intenses ne sont pas reproductibles en gravitation, car l'intéraction est exclusivement attractive. L'*effet gravitomagnétique* ne sera important par rapport à l'effet attractif qu'aux très grandes vitesses. Avec les vitesses astronomiques, 30 km/s par exemple, Θ est de l'ordre de $10^{-8}\mathfrak{a}$, c'est-à-dire à la limite de la précision cependant prodigieuse atteinte par le variomètre d'Eötvös.

3. *Interaction élastique. Solide élémentaire*

C'est une intéraction composée d'une attraction et d'une répulsion. Sous sa forme la plus simple, la loi spécifique s'écrit dans K_B :

$$\vec{F}_A^B = - C_o \left(r_B - r_B^o \right) \vec{j}_A^B$$

r_B^o est la distance à laquelle l'attraction et la répulsion se compensent. La première l'emporte si $r_B > r_B^o$, la seconde si $r_B < r_B^o$; C_o est la valeur de constante d'élasticité dans K_B. Dans K quelconque nous aurons :

$$(11)\qquad \begin{aligned} \vec{F}_A &= -C_B\,(r - r_o)\,\vec{i}_A\,;\quad C_B = \frac{C_o}{\alpha_B} \\ \vec{\Theta}_A &= -\frac{C_B}{c^2}\,(r - r_o)\left[\vec{v}_A \wedge (\vec{v}_B \wedge \vec{i}_A)\right] \end{aligned}$$

L'intérêt de la liaison élastique de deux points matériels c'est qu'elle constitue le solide le plus simple qui soit, la solide élémentaire — dit indéformable lorsque C_o est très élevée. Supposons le solide au repos dans K_B alors que deux intéractions extérieures lui sont appliquées, respectivement en A et en B, de forces $\Phi_B\,\vec{j}^{A}_{B}$ et $\Phi_B\,\vec{j}^{B}_{B}$ colinéaires à AB. La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre est :

$$(12)\qquad \Phi_B = C_o\left(r_B - r^{o}_{B}\right)$$

En mécanique relativiste comme en mécanique classique en effet, la condition de l'équilibre, ainsi que celle du mouvement uniforme, est que la qu. d'acc. résultante soit nulle pour chaque point matéreil de l'ensemble de points considérés. Dans K_B, les quantités d'acc. sont égales aux forces, d'où la condition (12).

Dans K, le solide est en mouvement uniforme ; soit $\vec{v}$ la vitesse de ce mouvement. Tout d'abord, comme dans K_B, deux forces extérieures $\Phi\,\vec{i}_A$ et $\Phi\,\vec{i}_B$ seront requises pour compenser les qu. d'acc. agrégatives d'élasticité (égales aux forces élastiques). D'où la condition

$$\Phi = C_B\,(r - r_o)$$

Mais doivent être aussi compensées les qu. d'acc. magnétiques d'élasticité. Or celles-ci, d'après (11) forment un couple $\vec{\Gamma}$:

$$\vec{\Theta}_A = -\frac{C_B}{c^2}\,(r - r_o)\left[\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{i}_A)\right]$$

$$\vec{\Theta}_B = -\frac{C_B}{c^2}\,(r - r^o)\left[\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{i}_B)\right]$$

$$\text{donc } \vec{\Theta}_B = -\vec{\Theta}_A$$

A ce sujet on lit parfois dans les ouvrages qu'aux forces extérieures $\Phi\,\vec{i}_A$ et $\Phi\,\vec{i}_B$ il faudrait adjoindre un couple extérieur

$-\vec{\Gamma}$ pour maintenir uniforme le mouvement. Cette formulation, dans la mesure où elle peut laisser croire à la nécessité d'une nouvelle intéraction (sous forme de couple) dans K qui n'existerait pas dans K_B crée une équivoque. En fait, la transformation (5) appliquée aux qu. d'acc. extérieures dans K_B donne, d'elle-même, dans K, deux qu. d'acc. tourbillonnaires formant un couple extérieur $-\vec{\Gamma}$: cela résulte immédiatement des relations (11), (12) et suivantes. Si donc un solide est en équilibre dans K_B sous l'influence de certaines intéractions extérieures, il sera *ipso facto*, tout comme en mécanique classique, en mouvement uniforme dans K, sans qu'aucune intéraction extérieure nouvelle doive intervenir.

IV. — Conclusion

Toute intéraction peut se manifester par une quantité d'accélération tourbillonnaire, par un effet magnétique. Nous l'avons établi dans le cadre de la relativité restreinte et le cas particulier des faibles accélérations. La qu. d'acc. magnétique n'est pas une force d'intéraction au sens strict que nous avons attribué à ce concept, mais une grandeur de mouvement apparent.

BIBLIOGRAPHIE

H. Arzelies. — *Dynamique relativiste*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.