SOUS-ESPACES DE MODÈLES ÉTALÉS ET STRUCTURES CYCLIQUEMENT REPRODUITES DANS UN ESPACE DE BANACH

par Bernard BEAUZAMY
Université de Lyon I
Département de Mathématiques
43, boulevard du 11-Novembre-1918
69 622 — Villeurbanne Cedex, France

ABSTRACT

Whe show what structure corresponds, in a BANACH space E, to a subspace of a spreading model of E.

Soit E un espace de BANACH et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E. La notion de modèle étalé de E, construit sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trouve son origine dans la proposition suivante, due à BRUNEL-SUCHESTON, qui permet l'extraction d'une « bonne sous-suite » :

Proposition (BRUNEL-SUCHESTON [2])

Il existe une sous suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *extraite de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pour laquelle, pour tout entier* $k \geqslant 1$, *pour toute suite finie* $a_1, \ldots, a_k$ *de scalaires, la limite*

$$\operatorname{Lim} \| a_1 x'_{n_1} + \ldots + a_k x'_{n_k} \|_E$$

existe lorsque $n_1 < \ldots < n_k$ *tendent vers l'infini.*

Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, on note $|a_1 e_1 + \ldots + a_k e_k|$ la limite précédente. On montre facilement (voir [2]) qu'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ si la suite $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans E ; c'est le cas en particulier si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de sous-suite convergente.

On note F le complété de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme $|\,.\,|$, et on l'appelle modèle étalé de E construit sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (il est en fait construit sur la sous-suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on appelle la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite fondamentale » du modèle.

De nombreuses propriétés de E peuvent être caractérisées au moyen de ses modèles étalés. Cette étude a été commencée par A. BRUNEL et L. SUCHESTON, qui ont, entre autres, montré comment la propriété de

BANACH-SAKS sur E pouvait être caractérisée sur ses modèles étalés [2] ; elle a été poursuivie par l'auteur, qui s'est intéressé [1] à d'autres versions de la propriété de BANACH-SAKS (Alternate Signs Banach-Saks et Banach-Saks-Rosenthal) et montré le lien avec l'existence de modèles étalés isomorphes à ^{1}, un travail analogue, dans le cas de modèles isomorphes à c_0, a été fait par S. GUERRE et J.-T. LAPRESTE [3].

Notre but, dans le présent article, est de montrer comment caractériser, sur l'espace E, la présence, dans un certain modèle étalé de E, d'un sous-espèce d'un type donné.

Définition : *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une bonne suite dans l'espace de Banach* E. *Nous dirons que la suite de blocs :*

(1) $\quad w_0^1\ w_1^1,\ w_1^2,\ w_2^1,\ w_2^2,\ w_2^3,\ w_2^4,\ \ldots,\ w_n^1,\ w_n^2,\ \ldots,\ w_n^{2n},\ \ldots$

est cycliquement reproduite sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *s'il existe une suite de scalaires* $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *et deux suites d'entiers strictement croissantes,* $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *et* $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$, *vérifiant* $m_k \geqslant m_{k-1} + n_{2k}$ $\forall k$, *telles que :*

$$w_0^1 = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_j x_{j+m_0}; \qquad w_1^1 = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_j x_{j+m_1};$$

$$w_1^2 = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \alpha_j x_{j+m_1}; \qquad w_2^1 = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_j x_{j+m_2};$$

$$w_2^2 = \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \alpha_j x_{j+m_2}; \qquad w_2^3 = \sum_{j=n_2+1}^{n_3} \alpha_j x_{j+m_2};$$

$$w_2^4 = \sum_{j=n_3+1}^{n_4} \alpha_j x_{j+m_2};$$

et pour tout $k \geqslant 2$, $1 \leqslant \ell \leqslant 2^k$ *:*

$$w_k^1 = \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \alpha_j x_{j+m_k}, \ldots, \qquad w_k^\ell = \sum_{n_{j-1}+1}^{n_\ell} \alpha_j x_{j+m_k}, \ldots,$$

$$w_k^{2^k} = \sum_{j=n_{2^k-1}+1}^{n_{2^k}} \alpha_j x_{j+m_k}$$

Cette définition signifie que les blocs $w_0^1, w_1^1, \ldots, w_k^1, \ldots$ utilisent tous les mêmes coefficients, de même tous les $w_1^2, w_2^2, \ldots, w_k^2, \ldots$, etc ; tous ces blocs sont consécutifs et disjoints sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans l'ordre (1).

La notion que nous venons d'introduire permet de rendre compte dans E, d'une suite de blocs consécutifs sur la suite fondamentale du modèle étalé F

Proposition 1 : *Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de blocs consécutifs sur la suite fondamentale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du modèle étalé, il existe une suite de blocs $(w_n^i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$, cycliquement reproduite sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que, pour tout* n, *l'espace vectoriel engendré (dans F) par $f_1 \ldots f_{2n}$ soit $(1 + \frac{\varepsilon}{2n})$ isomorphe à l'espace vectoriel engendré (dans E) par $w_n^1, \ldots, w_n^{2n}$.*

Démonstration : Notons $f_k = \displaystyle\sum_{n_k + 1}^{n_{k+1}} \alpha_i e_i^k$ et démontrons la proposition par récurrence. Pour $n = 0$, par définition du modèle étalé, il suffit de choisir m_0 assez grand pour que :

$$(1 - \varepsilon) \left\| \sum_{n_0 + 1}^{n_1} \alpha_j e_j \right\| \leqslant \left\| \sum_{n_0 + 1}^{n_1} \alpha_j x_{j + m_0} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{n_0 + 1}^{n_1} \alpha_j e_j \right\|$$

On posera $w_0^1 = \displaystyle\sum_{n_0 + 1}^{n_1} \alpha_j x_{j + m_0}$. Supposons $w_0^1, w_1^1, w_1^2, \ldots, w_{k-1}^1, \ldots, w_{k-1}^{2k-1}$ construits.

Soit M_k la constante telle que

$$\frac{1}{M_k} \sum_{1}^{n_{2^k}} |c_i| \leqslant \left| \sum_{1}^{n_{2^k}} c_i e_i \right| \leqslant M_k \sum_{1}^{n_{2^k}} |c_i|$$

pour toute suite $(c_i)_{i \leqslant n_{2k}}$ de scalaires, et soit $(c_i^1)_{i \leqslant n_{2k}} \ldots (c_i^L)_{i \leqslant n_{2k}}$ un $\frac{\varepsilon}{2^{k+3} M_k}$ -réseau dans la sphère unité de n_{2k}. toute suite $(c_i)_{i \leqslant n_{2k}}$ avec $\displaystyle\sum_{1}^{n_{2^k}} |c_i| = 1$ se trouve à distance au plus égale à $\frac{\varepsilon}{2^{k+3} M_k}$ de l'un des $(c_i^\ell)_{i \leqslant n_{2k}}, \ell = 1, \ldots, L$.

On peut trouver un entier $m_k \geqslant m_{k-1} + n_{2k}$ tel que $\forall \ell = 1, \dots, L$:

$$(1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}) \left\| \sum_{i=1}^{n_{2^k}} c_i^{(\ell)} x_{i+m_k} \right\| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n_{2^k}} c_i^{(\ell)} e_i \right| \leqslant (1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}) \left\| \sum_{i=1}^{n_{2^k}} c_i^{(\ell)} x_{i+m_k} \right\|$$

Il en résulte que, si $(c_i)_i \geqslant n_{2k}$ est une suite de scalaires avec

$\sum_1^{n_{2^k}} |c_i| = 1$ on peut écrire, pour un certain $\leqslant$ L:

$$\left| \sum_1^{n_{2^k}} c_i e_i \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k^2} M_k + (1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}) \left\| \sum_{i=1}^{n_{2^k}} c_i^{(\ell)} x_{i+m_k} \right\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k} + (1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}) \left(\left\| \sum_1^{n_{2^k}} c_i x_{i+m_k} \right\| + \frac{M_k}{1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k} \right)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+2}M_k} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}M_k}\right) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}\right) \left\| \sum_1^{n_{2^k}} c_i x_{i+m_k} \right\|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{1^{k+2}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}M_k}\right) \left| \sum_1^{n_{2^k}} c_i e_i \right| + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}\right) \left\| \sum_1^{n_{2^k}} c_i x_{i+m_k} \right\|$$

et donc:

$$\left| \sum_1^{n_{2^k}} c_i e_i \right| \leqslant \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+3}M_k}}{1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}} \left\| \sum_1^{n_{2^k}} c_i x_{i+m_k} \right\| \leqslant (1 + \frac{\varepsilon}{2^k}) \left\| \sum_1^{n_{2^k}} c_i x_{i+m_k} \right\|$$

$$\text{et de même} \left\| \sum_{1}^{n_{2^k}} c_i\, e_i \right\| \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \left\| \sum_{1}^{n_{2^k}} c_i\, x_{i+m_k} \right\|$$

et cette conclusion s'étend aux suites $c_1, \ldots, c_{n2k}$ quelconques.

Il en résulte évidemment que si l'on pose

$$w_k^1 = \sum_{n_0+1}^{n_1} \alpha_j x_j + m_k ; \quad w_k^2 = \sum_{n_0+1}^{n_2} \alpha_j x_j + m_k'$$

on a, pour toute suite de scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{2k}$:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \left\| \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j\, w_k^j \right\| \leqslant \left\| \sum_{1}^{2^k} \beta_j f_j \right\| \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \left\| \sum_{j=1}^{2^k} \beta_j w_k^j \right\|,$$

ce qui prouve la proposition.

Remarque: Le fait que les $(f_k)_{k}$EIN soient des blocs disjoints sur les $(e_n)_n$EIN ne sert qu'à obtenir, pour chaque k, des blocs $w_k^1, \ldots, w_k^{lk}$ consécutifs disjoints. Si on ne le suppose plus, on obtiendra une proposition analogue, mais où, pour chaque k, les $w_k^1, \ldots, w_k^{2k}$ ne seront plus disjoints.

A titre d'illustration de la proposition précédente, nous allons décrire, sur l'espace E, le fait qu'un modèle étalé contienne ^{1} ou c_0.

Proposition 2: *L'espace E a un modèle étalé contenant* ^{1} *(resp.* c_0*) si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver une suite* $(w_n^k)_{k \leqslant 2n}$ *de blocs, cycliquement reproduite sur une bonne suite bornée* $(x_n)_n$*EIN avec les propriétés suivantes :*

a. $\| w_k^k \| = 1 \quad \forall n, k$

b. *pour tout* n, $w_n^1, \ldots, w_n^{2k}$ *est* $(1+\varepsilon)$ *équivalent à la base canonique de* $^1_{2n}$ *(resp.* $^\infty_{2n}$*).*

Démonstration :

1. Soit $(x_n)_n$EIN une bonne suite bornée. Supposons qu'il existe une suite de blocs cycliquement reproduite sur $(x_n)_n$EIN avec les propriétés **a** et **b.** Posons

$$f_k = \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j e_j \quad \text{si} \quad w_k^k = \sum_{n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j x_j + m_k ;$$

On a alors, pour toute suite finie de scalaires (c_i) :

$$\left\|\sum \alpha_k f_k\right\| = \lim_{\ell \to +\infty} \left\|\sum_k c_k \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \alpha_j x_{j+m_\ell}\right\| = \lim_{\ell \to +\infty} \left\|\sum_k c_k w_\ell^k\right\|$$

et donc $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est $(1+\varepsilon)$ équivalent à la base canonique de ℓ^1 (resp. c_0).

2. Inversement, supposons que le modèle étalé construit sur $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contienne ℓ^1. Il existe alors une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de F, de norme 1, équivalente à la base de ℓ^1, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{M} \sum c_k \leqslant \sum c_k g_k \leqslant M \sum c_k ,$$

pour toute suite finie de scalaires (c_k).

On peut supposer que chaque g_k s'écrit sous la forme d'une suite finie : $g_k = \sum_\ell \gamma_\ell^k e_\ell$.

Lemme : *Si* $\left|\sum \gamma_j e_j\right| \geqslant M$, *on a,* $\forall j$, $|\gamma| \geqslant \dfrac{2M}{e_1 - e_2}$

Démonstration du lemme :

$$\left|\sum_\ell \gamma_\ell e_\ell\right| = |\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{j-1} e_{j-1} + \gamma_j e_j + \gamma_{j+1} e_{j+2} + \ldots + \gamma_L e_{L+1}|$$

$$= |\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_{j-1} e_{j-1} + \gamma_j e_{j+1} + \gamma_{j+1} E_{j+2} + \ldots + \gamma_L e_{L+1}|$$

et donc $|\gamma_j e_j - \gamma_j e_{j+1}| \leqslant 2M$, d'où le lemme.

Les « coordonnées » γ_ℓ^k des g_k sont donc bornées. Quitte à extraire une sous-suite des (g_k), on peut supposer que $\forall \ell$, $\lim \gamma_\ell^k$ existe, considérant les différences consécutives $g_{2k} - g_{2k+1}$, on fabrique une suite de blocs (f_k), disjoints et consécutifs, encore équivalente à la base de ℓ^1 ; par un procédé dû à R.-C. JAMES, on fabrique une nouvelle suite de blocs disjoints et consécutifs, $(1+\varepsilon)$ équivalente à la base de ℓ^1, et on applique la proposition 1. De même pour c_0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. BEAUZAMY. — Banach-Saks properties and Spreading Models. *Math. Scand. Vol.* **44** (1979), 357-384.

[2] A. BRUNEL, SUCHESTON (L.) — On B. convex Banach Spaces. *Math. System Theory* **7** (1974). 294-299.

[3] GUERRE (S.), LAPRESTE (J.-T.). — Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach. A paraître aux annales IHP.