MAGNETOHYDRODYNAMIQUE : ECOULEMENT M.H.D. D'UN FLUIDE NON VISQUEUX ELECTRIQUEMENT CHARGE, DEPENDANT DE LA DISTANCE

DISTANCE DEPENDING M.H.D. FLOWS OF AN INVISCID ELECTRICALLY CHARGED FLUID

Par

RAHAINGOARIVONY G.-H.

Maître-assistant

Département des Mathématiques

EES Sciences, Antananarivo.

Résumé :

On étudie la stabilité de la solution d'un écoulement M.H.D. stationnaire d'un fluide non visqueux électriquement chargé, par rapport à la distance r dont dépendent toutes les quantités concernées. On suppose, de plus, que le potentiel du champ électrique est fonction de la seule charge électrique q.

L'écoulement entre deux sphères concentriques est ensuite examiné et l'existence d'une couche limite mise en évidence.

Abstract :

The M.H.D. steady state flow studied here is such that the electrical potential function depends only on the electrical density and that all the quantities we are concerned with are functions of the distance r. The stability with respect to the variable r is investigated.

Secondly, we carry out the determination of a uniformly valid expansion for the velocity in a flow between two spheres ; the method of matched asymptotic expansion is used.

I. ETUDE DE LA STABILITE PAR RAPPORT A LA DISTANCE r

Soient V, H, Φ, q, p, le vecteur vitesse, le vecteur champ magnétique, le potentiel du champ électrique, la densité de charge électrique et la pression survenant dans un écoulement M.H.D., stationnaire, tridimensionnel d'un fluide non visqueux.

Proposons-nous d'étudier le cas où Φ est seulement fonction de q. Nous écrivons ainsi en variables adimensionnelles :

$$(1)\quad \text{rot } V \wedge V - R_H^2 \text{ rot } H \wedge H$$

$$= \text{grad}[-p - \frac{V^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_c^2}(q\Phi(q) - \int_{q_0}^{q} \Phi(q)\, dq)]$$

$$(2)\quad \text{rot } H = R_m \left[\frac{\varepsilon}{R_c^2}\text{grad } \Phi + V \wedge H\right] + \varepsilon q V$$

$$(3)\quad \text{div } V = \text{div } H = o$$

$$(4)\quad \Delta\Phi = \Phi''(q)\left[\left[\frac{\delta q}{\delta x_1}\right]^2 + \left[\frac{\delta q}{\delta x_2}\right]^2 + \left[\frac{\delta q}{\delta x_3}\right]^2\right] + \Phi'(q)\left[\frac{\delta q}{\delta x_1} + \frac{\delta q}{\delta x_2} + \frac{\delta q}{\delta x_3}\right] = q$$

Supposons de plus les champs V et H alignés et toutes les quantités dépendant seulement de la distance $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ de sorte que l'on puisse écrire :

$$(1')\quad V = R_H H$$

$$p + \frac{V^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 R_H}{R_c^2}[q\,\Phi(q) - \int_{q_0}^{q} \Phi(q)\, dq] = \text{Constante}$$

$$(2')\quad \frac{1}{R_H}\text{rot } V = \frac{R_m \varepsilon}{c\,R^2}\text{grad } \Phi + \varepsilon q V$$

$$(3')\quad \text{div}.V = o$$

$$(4')\quad \Delta\Phi = q$$

Rappelons que :

$\frac{1}{R_H}$ = nombre d'ALFVEN

R_m = nombre de REYNOLDS magnétique

R_c^2 = carré d'un quotient de vitesses

ε = paramètre exprimant l'importance de la charge électrique.

Dans le repère sphérique orthonormal (e_r, e_Θ, e_Φ) lié au point M(r) nous déduisons immédiatement de (3') :

$Vr = \frac{C}{r}$ *où C est une constante prise désormais positive.*

En prenant la divergence de (2') : $V_r \frac{dq}{dr} + \frac{R_m}{R_c^2} q = o$

$$q = q_0 \exp\left\{ -\frac{R_m}{C R_c^2} r^3 \right\}$$

(4') se traduit par :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 \; \Phi'(q) \frac{dq}{dr} \right] = q_0 \exp\left\{ -\frac{R_m}{C R_c^2} r^3 \right\}$$

ce qui s'intègre et donne :

$$\Phi(q) = \frac{1}{27 \left(\frac{R_m}{C R_c^2} \right)^2} \; Log \frac{q}{q_0} = \frac{1}{27} \frac{C R_c^2}{R_m} r^3$$

Afin de simplifier les écritures, posons :

$$rV_\Theta = \alpha \; , \; rV_\Phi = \beta \; , \; \varepsilon R_H q_0 = \lambda , \; \frac{R_m}{C R_c^2} = k \; .$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, (2') s'écrit matriciellement :

$$\text{(I.1)} \qquad Z' = \lambda B Z \text{ avec } Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \; B(r) = \exp(-kr^3) \begin{bmatrix} o & 1 \\ 1 & o \end{bmatrix}$$

En adjoignant à (I.1) la condition aux limites (I.2) $Z(r_0) = Z_0$ ($r_0 > o$ et Z_0 donné), nous obtenons la solution exacte :

$$rV_\Theta = r_0 \sqrt{V_{\Theta_0}^2 + V_{\Phi_0}^2} \; \sin \left[\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr - \delta \right]$$

$$rV_\Phi = r_0 \sqrt{V_{\Theta_0}^2 + V_{\Phi_0}^2} \; \cos \left[\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr - \delta \right]$$

où δ est déterminé par :

$$\sin \delta = \frac{V_{\Theta_0}}{\sqrt{V_{\Theta_0}^2 + V_{\Phi_0}^2}} \quad , \quad \cos \delta = \frac{V_{\Phi_0}}{\sqrt{V_{\Theta_0}^2 + V_{\Phi_0}^2}}$$

Propriétés de l'équation (I.1)

1. Les solutions de (I.1) sont bornées et stables (au sens de LYAPUNOV) par rapport à r.

Il suffit de démontrer l'une de ces propriétés ; elles sont en effet équivalentes. Nous avons à montrer les points suivants ([1] p. 38 et p. 39) :
— les éléments de λ B(r) sont absolument continues dans $[r_0, +\infty]$;
— leur limite est nulle pour $r \to +\infty$, ce qui est évident ;

— les valeurs propres de B(r) sont à partie réelle négative ou nulle (elles sont ici égales à $\pm i\lambda \exp(-kr^3)$).
— $\int^{+\infty} \|\lambda B'(r)\| dr = 6\lambda k \int^{+\infty} r^2 e^{-kr^3} dr < +\infty$

La première hypothèse est réalisable car e^{-kr} qui converge vérifie la condition de LIPSCHITZ :

$$|\exp(-kr_2^3) - \exp(-kr_1^3)| \leqslant 2 \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right] |r_2 - r_1|$$

En effet

$$r^2 \exp(-kr^3) \leqslant \frac{2}{3k} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

d'où

$$|[\exp(-kr^3)]'| \leqslant 2 \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Il s'ensuit que les solutions sont bornées.
Notons que l'on peut obtenir ce résultat en remarquant que la matrice

$$M(r) = \begin{bmatrix} \cos(\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr) & \sin(\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr) \\ -\sin(\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr) & \cos(\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr) \end{bmatrix}$$

est un système fondamental de solutions de (I.1) est que la norme $\|M\|$ de la matrice M égale à la somme des valeurs absolues de ses éléments est bornée.

2. (I.1) est uniformément stable pour $r \geqslant r_0$
Soit r' tel que $o \leqslant r' \leqslant r$.

$$\|M(r)M^{-1}(r')\| = \left\| \begin{bmatrix} \cos(\lambda \int_{r'}^{r} e^{-kr^3} dr) & \sin(\lambda \int_{r'}^{r} e^{-kr^3} dr) \\ -\sin(\lambda \int_{r'}^{r} e^{-kr^3} dr) & \cos(\lambda \int_{r'}^{r} e^{-kr^3} dr) \end{bmatrix} \right\|$$

est bornée, d'où le résultat.

3. (I.1) est restrictivement stable pour $r \geqslant r_0$.
Le système (I.1') : $Z' = (-{}^t\lambda B)Z$ admet évidemment des solutions et une

démonstration analogue à la stabilité des solutions de (I.1) se fait pour celle des solutions de (I.1'). Il en résulte que le système est réductible.

4. $\int_0^{+\infty} \| B(r) \| \, dr = \int_0^{+\infty} e^{-kr^3} dr$ est convergente ; (I.1) admet un équilibre linéaire asymptotique : quel que soit le vecteur c donné, il existe une solution de (I.1) tendant vers c pour $r \to +\infty$ et toute solution du système tend vers un vecteur constant c dans la même condition.

5. Comme les coefficients de B(r) sont continues dans $[r_0, +\infty]$, α et β admettent des nombres de LYAPUNOV finis.

6. $\frac{1}{2}\frac{d}{dr}(\|Z\|_e^2) = {}^tZBZ = o$ ($\|Z\|_e$ = norme euclidienne de Z), d'où

$$r^2(V_\theta^2 + V_\Phi^2) = \text{Constante} = C_1^2.$$

$$\| V \|_e^2 = \frac{C_1^2}{r^2} + \frac{C^2}{r^4} \quad \text{Ainsi} \lim_{r \to +\infty} \| V \|_e = o.$$

On conclue que l'écoulement autour d'une sphère poreuse, soumise à une vitesse donnée de rotation et d'où est injecté radialement du fluide, tend vers le repos pour $r \to +\infty$. De plus, d'après une propriété démontrée par V. LAKSMIKANTHAM et S. LEELA [2] (Lemme 2.14.1 p. 116), on peut écrire :

$$\| Z(r) \| \leqslant \| Z_0 \| \, e^{2\lambda \int_{r_0}^{r} e^{-kr^3} dr}$$

II. ECOULEMENT ENTRE DEUX SPHERES CONCENTRIQUES A PAROIS POREUSES

On considère un écoulement entre deux sphères concentriques de rayon respectif r_0 et r_1 $(r_0 < r_1)$. D'après (I.1), α et β satisfont à une relation de la forme :

$$\varepsilon' \frac{d^2\alpha}{dr^2} + \lambda^2 r^2 \frac{d\alpha}{dr} = - \varepsilon' \lambda^2 e^{-2kr^3} \alpha$$

où $\varepsilon' = \frac{\lambda^2}{3k}$ et on suppose $\varepsilon' << 1$.

En posant $r = \bar{r}(r_1 - r_0) + r_0$, l'équation précédente se ramène à :

$$\text{(II.1)} \quad \varepsilon' \frac{d^2\alpha}{d\bar{r}^2} + \frac{\lambda^2}{r_1 - r_0}(A_0^2\bar{r}^2 + B_0\bar{r} + C_0^2)\frac{d\alpha}{d\bar{r}} =$$

$$= - \frac{\varepsilon' \lambda^2 \alpha}{(r_1 - r_0)^2} \exp\left\{- 2k(A_0^3\bar{r}^3 + 3A_0^2 r_0 \bar{r}^2 + \tfrac{3}{2}B_0 r_0 \bar{r} + C_0^2 r_0)\right\}$$

avec $A_0^2 = (r_1 - r_0)^2$
$B_0 = 2r_0(r_1 - r_0)$
$C_0^2 = r_0^2$

A l'équation (II.1), on adjoint les conditions aux limites (II.2) traduisant les données des vitesses du fluide au contact des deux sphères :

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{aligned} \alpha(\bar{r} = o) &= E \\ \alpha(\bar{r} = 1) &= F \end{aligned}$$

L'équation réduite $\frac{d\alpha}{d\bar{r}} = o$ montre que la solution extérieure α_0 est une constante sauf au voisinage de l'une des frontières où se présente une couche limite. Plus précisément, le coefficient de $\frac{d\alpha}{d\bar{r}}$ dans (II.1) étant positif, cette couche limite existe au voisinage de $\bar{r} = o$ et elle est d'épaisseur ε' [3] d'où $\alpha_0(\bar{r}) = F$. Cherchons un développement extérieur de α sous la forme :

$$\alpha^0(\bar{r}\,;\,\varepsilon') = \sum_{k=o}^{N-1} \varepsilon'^k \alpha_k(\bar{r}) + O(\varepsilon'^N) \qquad \text{(II.3)}$$

En reportant l'expression (II.3) dans l'équation (II.1) et en égalisant les termes de même ordre, nous obtenons :

$\frac{d\alpha_0}{d\bar{r}} = o$, $\alpha_0(\bar{r} = 1) = F$, ce qui donne de nouveau $\alpha_0(\bar{r}) = F$

$$\frac{\lambda^2}{r_1 - r_0}(A_0^2\bar{r}^2 + B_0\bar{r} + C_0^2)\frac{d\alpha_1}{d\bar{r}} =$$

$$\frac{-\lambda^2\alpha_0}{(r_1 - r_0)^2} \quad \exp\left\{-2k(A_0^3\bar{r}^3 + 3A_0^2r_0\bar{r}^2 + B_0r_0\bar{r} + C_0^2r_0)\right\}$$

$\alpha_1(\bar{r} = 1) = o$

$$\frac{\lambda^2}{r_1 - r_0}(A_0^2\bar{r}^2 + B_0\bar{r} + C_0^2)\frac{d\alpha_k}{d\bar{r}}$$

$$= -\frac{d^2\alpha_{k-1}}{d\bar{r}^2} - \frac{\lambda^2\alpha_{k-1}}{(r_1 - r_0)^2}\exp\left\{-2k(A_0^3\bar{r}^3 + 3A_0^2r_0\bar{r}^2 + \frac{3}{2}B_0r_0\bar{r} + C_0^2r_0)\right\}$$

$\alpha_k(\bar{r} = 1) = o$, $k = 2, \ldots, N-1$.

La résolution des deux premières équations permet d'écrire :

$$\alpha^0(\bar{r}\,;\varepsilon') = F - \frac{\varepsilon' F}{r_1 - r_0}\int_1^{\bar{r}} G(\bar{r})\, d\bar{r} + O(\varepsilon'^2) \qquad \text{(II.4)}$$

$$\text{avec } G(\bar{r}) = \frac{\exp\left\{-2k(A_0^3\bar{r}^3 + 3A_0^2r_0\bar{r}^2 + \frac{3}{2}B_0r_0\bar{r} + C_0^2r_0)\right\}}{A_0^2\bar{r}^2 + B_0\bar{r} + C_0^2}$$

Au voisinage de $\bar{r} = o$, posons $\zeta = \frac{\bar{r}}{\varepsilon'}$ et cherchons un développement intérieur de la forme :

$$\alpha^i(\zeta\,;\varepsilon') = \sum_{k=o}^{N-1} \varepsilon'^k \gamma_k(\zeta) + O(\varepsilon'^N) \quad \text{(II.5)}$$

Ainsi (II.2) s'écrit :

$$\varepsilon'^{-1}\frac{d^2\alpha^i}{d\zeta^2} + \frac{\lambda^2}{r_1 - r_0}(A_0^2\zeta^2\varepsilon'^2 + B_0\zeta\varepsilon' + C_0^2)\varepsilon'^{-1}\frac{d\alpha^i}{d\zeta} =$$

$$= -\frac{\varepsilon'\lambda^2}{(r_1 - r_0)^2}\alpha^i \exp\left\{-2k(A_0^3\zeta^3\varepsilon'^3 + 3A_0^2r_0\zeta^2\varepsilon'^2 + \frac{3}{2}B_0r_0\zeta\varepsilon' + C_0^2r_0)\right\}$$

$$= -\frac{\varepsilon'\lambda^2}{(r_1 - r_0)^2}\alpha^i \exp[-2kC_0^2r_0]\left\{1 - 2k(A_0^3\zeta^3\varepsilon'^3 + 3A_0^2r_0\zeta^2\varepsilon'^2 + \frac{3}{2}B_0r_0\zeta\varepsilon') + \dots\right\}$$

impliquant :

$$\frac{d^2\gamma_0}{d\zeta^2} + \omega^2\frac{d\gamma_0}{d\zeta} = o$$

$$\gamma_0(\zeta = o) = E$$

$$\frac{d^2\gamma_1}{d\zeta^2} + \omega^2\frac{d\gamma_1}{d\zeta} = \omega^4\delta\zeta e^{-\omega^2\zeta}$$

$$\gamma_1(\zeta = o) = o \quad \text{etc.... où } \omega^2 = \frac{C_0^2\lambda^2}{r_1 - r_0} \text{ et } \delta = \frac{B_0(E - F)}{C_0^2}$$

Il s'ensuit que $\gamma_0(\zeta) = (E - L) + Le^{-\omega^2\zeta}$ où L est donné par le raccordement asymptotique :

$$\lim_{r\to o}\alpha^0 = \lim_{\zeta\to+\infty}\alpha^i$$

Ainsi $\gamma_0(\zeta) = F + (E - F)e^{-\omega^2\zeta}$.

L'expression de γ_1 est de la forme :

$$\gamma_1 = \left[-\frac{\omega^2\delta}{2}\zeta^2 - \delta\zeta - \frac{D}{\omega^2}\right]e^{-\omega^2\zeta} + \frac{D}{\omega^2}.$$

D devant être déterminé par le raccord asymptotique sous la forme proposée par VAN DYKE. Deux termes du développement extérieur :

$$F - \frac{\varepsilon'F}{r_1 - r_0}\left\{\int_1^0 G(\bar r)d\bar r + \exp(-2kC_0^2r_0)\right.$$
$$\left.\int_0^{\bar r}\frac{\exp[-2k(-B_0r_0\bar r + A_0^2r_0\bar r^2 + A_0\bar r^3)]\,d\bar r}{C_0^2 + B_0\bar r + A_0^2\bar r^2}\right\}$$

ce qui s'écrit au voisinage de $\bar r = 0$

$$F - \frac{\varepsilon'F}{r_1 - r_0}\left\{\int_1^0 G(\bar r)d\bar r + \exp(-2kC_0^2r_0)\left[\frac{\bar r}{C_0^2} - \frac{3kB_0r_0 + \frac{B_0}{C_0^2}}{C_0^2}\frac{\bar r^2}{2} + \dots\right]\right\}$$

réécrit en variable interne :

$$F - \frac{\varepsilon' F}{r_1 - r_0}\left\{\int_1^0 G(\bar r)d\bar r + \exp(-2k C_0^2 r_0)\left[\frac{\zeta\varepsilon'}{C_0^2} - \frac{3k B_0 r_0 + \frac{B_0}{C_0^2}}{C_0}\frac{\zeta^2\varepsilon'^2}{2} + \cdots\right]\right\}$$

Deux premiers termes du développement intérieur :

$$F - \frac{\varepsilon' F}{r_1 - r_0}\int_1^0 G(\bar r)\, d\bar r$$

Deux termes du développement intérieur :

$$F + (E - F)e^{-\omega^2\zeta} + \varepsilon'\left\{\left[-\frac{\omega^2}{2}\delta\zeta^2 - \delta\zeta - \frac{D}{\omega^2}\right]e^{-\omega^2\zeta} + \frac{D}{\omega^2}\right\}$$

réécrits en variable externe :

$$F + (E - F)e^{-\omega^2\frac{\bar r}{\varepsilon'}} + \varepsilon'\left\{\left[-\frac{\omega^2}{2}\frac{\delta\bar r^2}{\varepsilon'^2} - \frac{\delta\bar r}{\varepsilon'} - \frac{D}{\omega^2}\right]e^{-\omega^2\frac{\bar r}{\varepsilon'}} + \frac{D}{\omega^2}\right\}$$

Deux premiers termes du développement extérieur :

$$F + \varepsilon'\frac{D}{\omega^2}$$

Le raccordement asymptotique implique :

$$\frac{D}{\omega^2} = -\frac{F}{r_1 - r_0}\int_1^0 G(\bar r)\, d\bar r$$

Ainsi le développement asymptotique valable aussi bien dans la couche limite que dans la zone extérieure est le développement composite $\alpha^C = \alpha^0 + \alpha^i - (\alpha^i)^0$ où $(\alpha^i)^0$ est la limite extérieure du développement intérieur α^i, égale à $F + \varepsilon\frac{R}{\omega^2}$ d'où :

$$\alpha(\bar r;\varepsilon) = F - \frac{\varepsilon' F}{r_1 - r_0}\int_1^{\bar r} G(\bar r)\, d\bar r + (E - F)e^{-\omega^2\frac{\bar r}{\varepsilon'}}$$

$$+ \varepsilon'\left[-\frac{\omega^2}{2}\frac{\delta\bar r^2}{\varepsilon'^2} - \frac{\delta\bar r}{\varepsilon'} + \frac{F}{r_1 - r_0}\int_1^0 G(\bar r)d\bar r\right]e^{-\omega^2\frac{\bar r}{\varepsilon'}} + O(\varepsilon^2)$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. CESARI. — *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differentiel equations*. Ekrgebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 16, Springer Verlag (1971).

(2) V. LAKSMIKANTHAM and S. LEELA. — *Differential and Integral Inequalities*. Vol. 1. Academic Press (1969).

(3) A.-H. NAYFEH. — *Perturbation method*. A. Wiley Interscience Publication (1972).