MAGNETOHYDRODYNAMIQUE : QUELQUES PROPRIETES D'UN ECOULEMENT M.H.D. TRIDIMENSIONNEL D'UN FLUIDE ELECTRIQUEMENT CHARGE NON VISQUEUX

ABOUT A M.H.D. THREE DIMENSIONAL FLOW OF AN INVISCID ELECTRICALLY CHARGED FLUID

Par

RAHAINGOARIVONY G.-H.

Maître-assistant,
Département des Mathématiques,
EES Sciences, Antananarivo

Résumé :

Dans le cas où la densité du courant se réduit au courant de convection et où le potentiel du champ électrique ne dépend que de la densité de charge électrique, l'écoulement se présente comme un mouvement « vissé » (screw motion).

Abstract :

We consider a stationary three dimensional flow where the current density is reduced to the convection current and where the electrical potential function depends only on the electrical charge density ; then the flow presents itself as a « screw motion ».

Nous considérons un écoulement stationnaire, tridimensionnel de fluide électriquement chargé où seul le courant de convection est actif [1] et où le potentiel du champ électrique est seulement fonction de la charge électrique. En variables adimensionnelles, les équations regissant cet écoulement sont les suivantes :

$$\text{grad } p - R_H^2 \text{rot } H \wedge H - \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_c^2} \Delta\Phi \text{ grad } \Phi + \left[\text{grad } \frac{V^2}{2} + \text{rot } V \wedge V\right] = 0 \qquad (1)$$

$$\text{rot } H = \varepsilon \Delta\Phi V \qquad (2)$$

$$\text{div. } H = 0 \qquad (3)$$

$$\text{div } V = 0 \qquad (4)$$

p est la pression, Φ le potentiel du champ électrique, H le champ magnétique, V la vitesse.

Nous avons aussi les paramètres :

R_H^2 : Inverse du carré du nombre d'Alfven

R_C^2 : Carré d'un quotient de vitesses.

ε : Paramètre exprimant l'importance de la charge électrique.

q étant la charge électrique, l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{1}{R_c} \operatorname{rot} V \wedge V - R^2 \operatorname{rot} H \wedge H$$

$$= - \operatorname{grad}\left[+ p + \frac{V^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_c^2}\left[q\Phi(q) - \int_{q_0}^{q} \Phi(q)\, dq\right]\right] \quad (1')$$

D'après cette dernière relation et tenant compte de l'équation (2), nous caractérisons les surfaces de courant par :

$$p + \frac{V^2}{2} = \text{constante}$$

Il nous est possible de trouver un écoulement où $H = \lambda V$, λ étant une constante quelconque, dont les équations s'écrivent :

$$p + \frac{V^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_C^2}\left[q\Phi(q) - \int_{q_0}^{q} \Phi(q)\, dq\right] = \text{constante.}$$

$\operatorname{rot} V = \lambda \varepsilon q V$ (2')

$\operatorname{div.} V = 0$ (3') où $q = \Delta\Phi = \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}$

Nous sommes en présence d'un mouvement « vissé » (screw motion) [2] : $\operatorname{rot} V \wedge V = 0$. La charge électrique $\lambda\varepsilon q$ se présente comme l'anormalité du champ « vissé » V auquel elle est liée [3] par la relation :

$$\lambda\varepsilon q = \frac{\operatorname{rot} V . \operatorname{rot}(\operatorname{rot} V)}{(\operatorname{rot} V)^2} = \frac{-\Delta V . \operatorname{rot} V}{(\operatorname{rot} V)^2} = \frac{-\Delta H . \operatorname{rot} H}{(\operatorname{rot} H)^2}$$

Nous en déduisons les propriétés suivantes :

I. Les surfaces de courant sont les surfaces de densité de charge électrique constante.

II. Posons $t = \frac{V}{|V|}$ et appelons *s* l'abscisse curviligne d'un point d'une ligne de courant. Alors : $|V|q = A_0 \exp[-\int \operatorname{div.} t\, ds]$ où A_0 est une constante.

III. $V . \Delta V < 0$.

IV. L'ecoulement conserve la circulation (premier théorème de Gromeka-Beltrami).

S* est le potentiel du vecteur accélération, alors :

$$S^* + \frac{1}{2} V^2 = \text{constante}$$

VI. Posons $V = \operatorname{grad} X + q \operatorname{grad} \Psi$. D'après les résultats de BJØRGUM rapportés par J.-L. ERICKSEN [3], les potentiels de MONGE X,q,Ψ satisfont aux relations :

$V . \operatorname{grad} \Psi = [\operatorname{grad} X + q \operatorname{grad} \Psi] . \operatorname{grad} \Psi = 0.$

$V.\text{grad } q = [\text{grad } X + q \text{ grad } \Psi].\text{grad } q = 0.$

S'y ajoute la condition d'incompressibilité :

$\text{div } V = \Delta X + [q\Delta\Psi + \text{grad } \Psi.\text{grad } q] = 0.$

Ainsi disposons nous de trois équations déterminant X,q et Ψ. Quant au potentiel $\Phi(q)$ du champ électrique E, elle est donnée par :

div. E = q, ou encore par :

$$\Phi''(q) \left[\left[\frac{\delta q}{\delta x}\right]^2 + \left[\frac{\delta q}{\delta y}\right]^2 + \left[\frac{\delta q}{\delta z}\right]^2\right] + \Phi'(q)\left[\frac{\delta q}{\delta x} + \frac{\delta q}{\delta y} + \frac{\delta q}{\delta z}\right] = q.$$

Remarques

Dans ce qui précède, la charge électrique varie mais nous pouvons trouver un écoulement où elle est partout constante et égale à q_0. Ici encore, H et V sont proportionnels et l'ecoulement obéit aux relations :

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\varepsilon^2 R^2_H}{Rc^2} q_0\Phi + p = \text{constante.}$$

$\text{rot } V = \lambda\varepsilon q_0 V.$

Φ sera déterminé par le problème de Dirichlet $\Delta\Phi = q_0$.

En prenant le rotationnel de la seconde équation, nous obtenons l'équation de GROMEKA : $\Delta V + \lambda\varepsilon q_0 V = 0$.

D'après BJØRGUM et GODAL [4], V peut se représenter sous la forme :

$V = \lambda\varepsilon q_0 \text{ grad } K.\Delta\, e + e.\lambda^2\varepsilon^2 q_0^2 K + (e \text{ grad}) \text{ grad } K.$

où e est un vecteur unitaire fixé et K une fonction vérifiant l'équation de HELMHOTZ: $\Delta K + \lambda^2\varepsilon^2 q_0 K = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.-H. RAHAINGOARIVONY. — Thèse de 3ᵉ cycle (Mécanique Théorique), 1974 (Toulouse).

[2] C. TRUESDELL and R. TOUPIN. — *The classical Field Theories.* Handbuch, der Physik : Band III/1 Springer Verlag.

[3] J.-L. ERICKSEN. — *Tensor Fields :* Handbuch der Physik Band III/1 Springer Verlag.

[4] BJØRGUM and T. GODAL. — *On Beltrami vector fields and flow.* Part. II. Univ. Bergen Arbok 1952, Natur v., rekke n° 13.