MAGNETOHYDRODYNAMIQUE : ECOULEMENT M.H.D. D'UN FLUIDE ELECTRIQUEMENT CHARGE DANS UN CANAL DE SECTION CIRCULAIRE

THE M.H.D. FLOW OF AN ELECTRICALLY CHARGED FLUID IN A DUCT OF CIRCULAR SECTION

Par

RAHAINGOARIVONY G.-H

Maître-assistant,
Département des Mathématiques,
EES Siences, Antananarivo

Abstract :

We study the M.H.D. stationary flow of an inviscid, incompressible, electrically charged fluid un a duct of circular section. The electrical conductibility is too small so that we have to modify Ohm's law by an E.H.D. one $\bar{J} = K\bar{q}\bar{E} + \bar{q}\bar{V}$. When $K = o$, we obtain a linear equation of the velocity stream function.

Résumé :

On étudie l'écoulement stationnaire M.H.D. d'un fluide non visqueux, incompressible, électriquement chargé dans un canal de section circulaire. La conductibilité électrique étant trop faible, on remplace la loi d'Ohm par une loi E.H.D. $\bar{J} = K\bar{q}\bar{E} + \bar{q}\bar{V}$. Pour $K = o$, on obtient une équation linéaire de la fonction de courant de la vitesse.

1. Le système d'équations régissant l'écoulement stationnaire bidimensionnel du fluide non visqueux à étudier est celui proposé dans [1] chapitre 3 :

$$\bar{\rho}_0 (\bar{V} \text{ grad}) \bar{V} = - \text{grad } \bar{p} + \mu \bar{J} \wedge \bar{H} + \bar{q}\bar{E}$$

$$\bar{J} = \text{rot } \bar{H}$$

$$\bar{J} = \bar{q}(K\bar{E} + \bar{V})$$

$$\text{div } \bar{H} = o$$

$$\text{div } \bar{V} = o$$

$$\text{rot } \bar{E} = o$$

$$\varepsilon p \text{ div } \bar{E} = q.$$

où $\overline{V}$: vitesse
$\overline{H}$: champ magnétique
$\overline{E}$: champ électrique
$\overline{J}$: densité du courant électrique
$\overline{\rho}_0$: densité massique du fluide
μ : perméabilité magnétique
εp : coefficient diélectrique
K : mobilité des porteurs de charge électrique par rapport au fluide
$\overline{q}$: densité de charge électrique
$\overline{p}$: pression .

ce qui s'écrit en variables adimensionnelles :

$$(V \text{ grad}) V = - \text{grad } p + R_H^2 \text{ rot } H \wedge H + \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_C^2} qE$$

$$\text{rot } H = \varepsilon q \left[\frac{E}{RE_{ei}} + V \right]$$

$$\text{div } H = o$$

$$\text{div } V = o$$

$$\text{rot } E = o$$

$$\text{div } E = q$$

après avoir posé

$$x = \frac{\overline{x}}{a}, \; y = \frac{\overline{y}}{a}, \; V = \frac{\overline{V}}{V_0}, \; H = \frac{\overline{H}}{H_0}, \; q = \frac{\overline{q}}{Q_0}, \; p = \frac{\overline{p}}{\overline{\rho}_0 V_0^2}, \; E = \frac{\overline{E}}{aQ_0/\varepsilon p}$$

où a, $\overline{V}_0$, $\overline{H}_0$, $\overline{Q}_0$ sont des caractéristiques de l'écoulement (longueur, vitesse, champ magnétique, champ électrique). Apparaîssent dans ces équations les paramètres :

$R_H^2 = \dfrac{\mu \overline{H}_0^2}{\overline{\rho}_0 V_0^2}$: Inverse du carré du nombre d'ALFVEN

$R_C^2 = \dfrac{\overline{V}_0^2}{C^2}$ (C défini par $\varepsilon p \mu C^2 = 1$)

$Re_{ei} = \dfrac{\varepsilon p \overline{V}_0}{Q_0 K a}$: Nombre de REYNOLDS électrique

$\varepsilon = \dfrac{Q_0 V_0 a}{H_0}$: Paramètre indiquant l'importance de la charge électrique

Introduisons les fonctions $\Psi(x, y)$, $X(x, y)$, $\Phi(x, y)$ déterminant le vecteur vitesse, le champ magnétique et le champ électrique

$$V_x = \frac{\delta \Psi}{\delta y}, \qquad V_y = -\frac{\delta \Psi}{\delta x}$$

$$H_x = \frac{\delta X}{\delta y}, \qquad H_y = -\frac{\delta X}{\delta x}$$

$$E_x = \frac{\delta \Phi}{\delta x}, \qquad E_y = \frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

En supposant Re_d infini, les équations vectorielles précédentes se traduisent scalairement par :

$$[1] \qquad \frac{\delta \Psi}{\delta y}\frac{\delta}{\delta x}\Delta\Psi - \frac{\delta \Psi}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y}\Delta\Psi = R^2_H\left[\frac{\delta X}{\delta y}\frac{\delta}{\delta x}\Delta X - \frac{\delta X}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y}\Delta X\right] + \frac{\varepsilon^2 R^2_H}{R^2 c}\left[\frac{\delta \Phi}{\delta x}\frac{\delta}{\delta y}\Delta\Phi - \frac{\delta \Phi}{\delta y}\frac{\delta}{\delta x}\Delta\Phi\right]$$

$$[2] \qquad \frac{\delta \Psi \delta V_z}{\delta y\, \delta x} - \frac{\delta \Psi \delta V_z}{\delta x\, \delta y} = \varepsilon R^2_H \Delta\Phi \left(\frac{\delta X \delta \Psi}{\delta x\, \delta y} - \frac{\delta X \delta \Psi}{\delta y\, \delta x}\right) + \frac{\varepsilon^2 R^2_H}{R^2 C} E_z \Delta\Phi$$

(E_z étant une constante)

$$[3] \qquad -\Delta X = \varepsilon \Delta\Phi V_z$$

$$[4] \qquad \frac{\delta H_z}{\delta y} = \varepsilon \Delta\Phi \frac{\delta \Psi}{\delta y}$$

$$[5] \qquad -\frac{\delta H_z}{\delta x} = -\varepsilon \Delta\Phi \frac{\delta \Psi}{\delta x}$$

Désormais nous prenons $E_z = o$; nous pouvons alors étudier l'écoulement où $X(x, y)$, $V_z(x, y)$ sont nuls.

D'autre part, pour obtenir les équations (4) et (5), il suffit d'avoir $\Psi = \Delta\Phi$, ce qui détermine H_z. Tenant compte de cette dernière relation, on retire de (1) :

$$\Delta\Psi = \frac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_C^2}\,\Phi$$

En définitive, Ψ vérifie l'équation :

[6] $(\Delta + \frac{\varepsilon R_H}{R_C}\,\mathrm{I})\,(\Delta - \frac{\varepsilon R_H}{R_C}\,\mathrm{I})\,\Psi = o$, I désignant la fonction identique.

2. Ecoulement dans une conduite de section circulaire.

Soit Ω ce domaine $(x^2 + y^2 = 1)$ et $\delta\Omega$ sa frontière ; les conditions aux limites sont d'origine purement mécanique ou physique et concernent la vitesse et la charge électrique.

Nous étudierons les cas suivants :

— la paroi est perméable et il y a expulsion radiale du fluide le long de $\delta\Omega$: $\Psi(x, y)\big|_{\delta\Omega} = y - x.$

— la paroi est imperméable et elle est soumise à une vitesse tangentielle de module unité :

$$\frac{\delta\Psi}{\delta x}\bigg|_{\delta\Omega} = -\,y, \quad \frac{\delta\Psi}{\delta y}\bigg|_{\delta\Omega} = x$$

En ce qui concerne la charge électrique, sa densité sur $\delta\Omega$ est une constante non nulle :

$$q(x, y)\big|_{\delta\Omega} = 1.$$

Nous cherchons $\Psi(x, y)$ et $q(x; y)$ comme solutions de l'équation $\Delta f - \frac{\varepsilon R_H}{R_C} f = o$ associée aux conditions aux limites précisées précédemment et en supposant que le champ magnétique soit assez prépondérant pour que nous puissions écrire $\frac{R_C}{\varepsilon R_C} << 1$. L'équation réduite donne $\Psi_0(x, y) \equiv o$. Comme les conditions aux limites ne sont pas vérifiées, il y a perturbation singulière de $\Psi(x, y)$ le long de $\delta\Omega$. Il en est de même pour la charge électrique : le fluide reste électriquement neutre dans le cœur de l'écoulement, les effets de charge électrique se manifestant seulement au voisinage de la frontière.

Appliquons les résultats de W. ECKHAUS [2]. Ψ_{as} approximation formelle régulière de Ψ est identiquement nulle.

Près de la frontière, nous introduisons la variable interne α (α désignant la distance orientée de $\delta\Omega$ vers le centre du cercle) et ν l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, $\sqrt{\frac{R_C}{\varepsilon R_H}}$ est l'épaisseur de la couche limite. La représentation

$$x = \left[1 - \sqrt{\frac{R_C}{\varepsilon R_H}}\,\alpha\right] \cos \nu, \quad y = \left[1 - \sqrt{\frac{R_C}{\varepsilon R_H}}\,\alpha\right] \sin \nu$$

décrit $\delta\Omega$ pour $\alpha = o$.

D'après [2], en utilisant ces nouvelles variables, on peut écrire :

$$\frac{R_C}{\varepsilon R_H} \Delta\Psi - \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\right]^{\frac{n}{2}} L_n \Psi_n(\alpha, \nu)$$

L_n sont des opérateurs en α et ν :

$$L_0 = \frac{\delta^2}{\delta\alpha^2} - 1$$

$$L_1 = - \frac{\delta}{\delta\alpha}$$

$$L_2 = - \alpha \frac{\delta}{\delta\alpha} + \frac{\delta^2}{\delta\nu^2} \text{ etc}$$

Les expressions $\Psi_n(\alpha, \nu)$ déterminent l'approximation locale Ψ^*as de Ψ par :

$$\Psi^*as = \sum_n \left[\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\right]^{\frac{n}{2}} \Psi_n(\alpha, \nu)$$

Les opérateurs L_n vérifient la relation de récurrence :

$$L_0\Psi_0 = o$$

$$L_0\Psi_n = - L_1\Psi_{n-1} - \dots - L_n\Psi_0$$

ce qui donne :

$$\Psi_n(\alpha, \nu) = [B_n(\nu) + P_n(\alpha, \nu)]e^{-\alpha} + [C_n(\nu) + S_n(\alpha, \nu)]e^{\alpha}$$

P_n et S_n étant des polynômes en α. Le raccordement asymptotique exige :

$$C_n(\nu) = S_n(\alpha, \nu) = o.$$

Dans le cas de l'expulsion radiale du fluide des parois, nous trouvons jusqu'à l'ordre 1 :

$$\Psi^*as\ (\alpha\ \nu) = (\cos \nu - \sin \nu)\left[e^{-\alpha} + \frac{R_C}{\varepsilon R_H}\ \alpha\ \frac{e^{-\alpha}}{2}\right] + O\left[\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\right]$$

et lorsque la paroi subit une vitesse tangentielle :

$$\Psi^*as\ (\alpha, \nu) = -\frac{1}{2}e^{-\alpha} + \frac{1}{4}\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\alpha e^{-\alpha} + O\left[\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\right]$$

Quant à l'approximation locale $Q^*as\ (\alpha, \nu)$ de la charge électrique, jusqu'à l'ordre 1, elle est donnée par :

$$Q^*as\ (\alpha, \nu) = e^{-\alpha} - \frac{R_C}{\varepsilon R_H}\alpha e^{-\alpha} + O\left[\frac{R_C}{\varepsilon R_H}\right]$$

Pour terminer, considérons le cas d'une paroi perméable et immobile ; il s'avère nécessaire de revenir à l'équation [6] pour qu'il y ait mouvement du fluide.

On cherche Ψ satisfaisant à $\Delta\Psi - \frac{\varepsilon R_H}{R_C}\psi = f\ (x, y)$ avec .

$$f\ (x, y) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{\varepsilon R_H}{R_C} r\right]^n}{(n!)^2} \quad \text{où } r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$f(x, y)$ est une série alternée entière de rayon de convergence infini, solution de l'équation $\Delta f - \frac{\varepsilon R_H}{R_C} f = o$. Ainsi, $(f(x, y))^2$ est une série entière en r, de rayon de convergence infini. Il s'en suit que $f \in L^2(\Omega) =$ espace des fonctions de carré sommable dans Ω. D'après J.-L LIONS [3], il existe $\Psi(x, y)$ unique tel que :

I. $\Psi \in H^1(\Omega) =$ espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ dont les dérivées distributions dans l'ouvert Ω, $\frac{\delta u}{\delta x}$ et $\frac{\delta u}{\delta y} \in L^2(\Omega)$

II. La dérivée normale $\frac{\delta \Psi}{\delta x}$ sur $\delta\Omega$ est nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.-H. RAHAINGOARIVONY.— Thèse 3^{e} cycle (Mécanique Théorique), Toulouse, 1974.

[2] W. ECKHAUS — *Matched asymptotic expansions and singular perturbations.* North Holland. Mathematic studies 1973.

[3] J.-L. LIONS. — *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Springer-Verlag 1961.