MAGNETOHYDRODYNAMIQUE : PERTURBATION SINGULIERE DE CHARGES ELECTRIQUES DANS LES ECOULEMENTS MAGNETODYNAMIQUES.

SINGULAR PERTURBATION OF THE ELECTRICAL CHARGE DENSITY IN M.H.D. FLOWS

Par

RAHAINGOARIVONY G.-H.

Maître-assistant.

Département des Mathématiques.

EES. Sciences. Antananarivo.

Résumé :

Nous étudions l'effet de la présence d'un gradient de pression proportionnel à x^2 dans l'écoulement de perturbation dû à la présence de charges électriques en M.H.D. classique (le fluide étant non visqueux) et dans le cas d'un écoulement à travers un milieu poreux mais avec un paramètre d'infiltration infini. Nous mettons en évidence la présence d'une couche limite de charge électrique dans les deux exemples qui suivent.

Abstract :

The presence of a pression gradient which is proportional to x^2 in the classical M.H.D. perturbation flow or in the flow through a porous medium (with an infinite infiltration parameter) exhibits electrical charge boundary layers.

Le présent exposé se propose de mettre en évidence une similitude entre l'écoulement de perturbation stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux, éléctriquement chargé et celui à travers un milieu poreux lorsque le paramètre d'infiltration est infini, en présence d'un gradient de pression proportionnel à x^2.

Le premier écoulement est régi par le système :

$$\begin{cases} R_H^2 H_y \Delta X + \dfrac{\varepsilon^2 R_H^2}{R_C^2} E_x \Delta\Phi = kx^2 \\ H_z \Psi + V_z X + \dfrac{\varepsilon}{R_C^2}\Phi = 0 \\ R_m H_y \dfrac{\delta\Psi}{\delta y} + \Delta X + \varepsilon V_z \Delta\Phi = 0. \end{cases}$$

où Ψ, X, Φ représentent respectivement la fonction de courant de la vitesse, celle du champ magnétique et le potentiel du champ électrique. Nous en déduisons les équations vérifiées par la densité de charge électrique q et par la fonction Ψ :

$$\frac{\dfrac{\varepsilon E_x H_z}{H_y V_z} - R_C^2 H_z}{R_m H_y \left[\dfrac{1}{V_y} - \dfrac{\varepsilon E_x}{H_y}\right]} \Delta q - \frac{\delta q}{\delta y} = \frac{-2k}{R_m R_H^2} \frac{H_z}{H_y^2 V_z}$$

$$\frac{\dfrac{\varepsilon H_z}{H_y}\dfrac{H_z}{V_z} - R_C^2 H_z}{\left[\dfrac{1}{V_y} - \dfrac{\varepsilon E_x}{H_y}\right]} \Delta\Psi - \frac{\delta\Psi}{\delta y} = \frac{-k(1 - R_C^2 V_z^2)}{R_m R_H^2 H_y V_z \left[\varepsilon E_x - \dfrac{H_y}{V_z}\right]}$$

où le paramètre $\dfrac{\dfrac{\varepsilon E_x H_z}{H_y V_z} - R_C^2 H_z}{R_m H_y \left[\dfrac{1}{V_y} - \dfrac{\varepsilon E_x}{H_y}\right]}$ est pris positif mais « petit » devant l'unité.

Rappelons que :

R_m = Nombre de Reynolds magnétique.
R_H^2 = Inverse du carré du nombre d'Alfven.
ε = Paramètre exprimant l'importance de la charge électrique.
R_C^2 = Carré d'un quotient de vitesses.

Le système général régissant l'écoulement de perturbation à travers un milieu poreux est le suivant :

$$-\frac{\delta p}{\delta x} - \left[\frac{R_H^2 R_m}{m} H_y^2 + \frac{1}{K}\right] \frac{\delta\Psi}{\delta y} + \varepsilon R_H^2 E_x E_y \Delta\Psi = 0.$$

$$-\frac{\delta p}{\delta y}+\left[\frac{R_H^2 R_m}{m} H_x H_y+\frac{1}{K}\right]\frac{\delta\Psi}{\delta x}+\varepsilon R_H^2 E_y H_z \Delta\Psi=0.$$

où m est la porosité du milieu et K le paramètre d'infiltration.
Nous envisageons le cas où $E_y = H_x = 0$ et K infini de sorte que Ψ vérifie :

$$\frac{\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}\Delta\Psi-\frac{\delta\Psi}{\delta y}=kx^2$$

Tenant compte de la relation $\frac{\varepsilon}{R_c^2}\Phi-\frac{1}{m}H_z\Psi=0$, nous déduisons l'équation de la densité de charge électrique :

$$\frac{\varepsilon m}{R}\frac{E_x}{H_y}\Delta q-\frac{\delta q}{\delta y}=D \text{ avec } 2k=\frac{Dm\varepsilon}{R_c^2 H_z}$$

et où $\frac{\varepsilon m}{R_m}\frac{E_x}{H_y}$ est petit devant l'unité.

Dans les deux écoulements, la fonction de courant du champ de vitesses et la densité de charge électrique obéissent aux équations d'Oseen du type :

(1) $\varepsilon'\Delta q-\frac{\delta q}{\delta y}=A \qquad 0<\varepsilon'<<1$

(2) $\varepsilon'\Delta\Psi-\frac{\delta\Psi}{\delta y}=Bx^2 \qquad$ A et B constantes.

Considérons en quelques applications.

I. Ecoulement dans un quart de plan ($x>0$, $y>0$).

Posons $\alpha(x,y) = q(x,y) + Ay$.

L'équation (1) s'écrit :

$$\varepsilon'\Delta\alpha-\frac{\delta\alpha}{\delta y}=0$$

A cette équation on adjoint les conditions aux frontières :

$$\alpha(x,0) = f(x) = q_0 \qquad (x>0)$$
$$\alpha(0,y) = g(y) = q_0 + A_y \qquad (y>0)$$

où q_0 est une constante ; ces conditions expriment que les parois sont soumises à un dispositif leur assurant une densité de charge électrique constante.
La condition sur la paroi $y = 0$ est vérifiée par l'équation réduite obtenue en remplaçant ε' par 0 ; il n'en est pas de même pour la paroi $x \doteq 0$ d'où l'existence d'une couche limite le long de 0y. Les travaux de ECKHAUS-DE JAGER [1] et de MAUSS [2] nous sont utiles pour trouver l'approximation asymptotique de q.
Effectivement, nous disposons des hypothèses nécessaires suivantes :

a) $f(0) = g(0)$
b) f est de classe C_1 et $|f'''(x)|$ est intégrable.
c) g est de classe C_2 et $|g''(x)|$ est intégrable.

Une couche limite parabolique de charge électrique d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon'}$ se développe le long de $0y$; uniformément dans le quart de plan, on trouve :

$$q(x,y) = -Ay + \alpha_0\left[\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] + 0(\varepsilon')$$

avec $$\alpha_0\left[\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon' y}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left[q_0 + A\left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon' t^2}\right)\right] dt.$$

$$\alpha_0\left[\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, q_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon' y}} + A\frac{\pi}{2} y \operatorname{erfc} \frac{x^2}{2\sqrt{2\varepsilon' y}}$$
$$-\frac{Ax^2}{2\varepsilon'}\left[\frac{2\varepsilon' y}{x} \exp \frac{-x^2}{8\varepsilon' y} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{2\varepsilon' y}}\right] + 0(\varepsilon')$$

Posons $\beta(x,y) = \Psi(x,y) - \dfrac{Bx^4}{12\varepsilon'}$; (2) s'écrit alors :

$\varepsilon'\Delta\beta - \dfrac{\delta\beta}{\delta y} = 0$ avec comme conditions aux frontières :

$\beta(0,y) = 0 \qquad\qquad y > 0$

$\beta(x,0) = -\dfrac{Bx^4}{12\varepsilon'} \qquad\qquad x > 0.$

Ces dernières conditions expriment que l'écoulement se limite à l'intérieur du domaine. Il existe pour $\beta(x,y)$ une couche limite parabolique d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon'}$ le long de $0y$; elle est déterminée par :

$$\beta_0\left[\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon' y}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left[-\frac{B}{12\varepsilon'}\left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon' t^2}\right)^4\right] dt.$$

Uniformément nous avons : $\beta(x,y) = \beta_0\left[\dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] + 0(\varepsilon')$

Le calcul de β_0 donne :

$$-\frac{6\pi}{B}\varepsilon'\beta_0\left[\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon'}}, y\right] =$$

$$
- y^4 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon' y}} + \frac{2y^3x^2}{\varepsilon'} \left[- \frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon' y}} \right]
$$

$$
- \frac{1}{2} \frac{y^2x^4}{\varepsilon'^2} \left[\left(\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right)^3 e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon' y}} - \frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} e^{-\frac{x}{4\varepsilon' y}} \right]
$$

$$
- \frac{1}{10} \frac{yx^6}{\varepsilon'^3} \left\{ \left[\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right]^5 e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right)^3 e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} \right. \right.
$$

$$
\left. \left. + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon' y}} \right] \right\} + \frac{1}{112} \frac{x^8}{\varepsilon'^4} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right)^7 e^{-\frac{x^2}{\varepsilon' y}} - \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right)^5 e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon' y}} \right.
$$

$$
\left. - \frac{1}{15} \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} \right)^3 e^{-\frac{x^2}{\varepsilon' y}} - \frac{1}{15} \frac{\sqrt{2\varepsilon' y}}{x} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon' y}} - \frac{1}{15} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon' y}} \right\}
$$

Ainsi le fait de disposer d'un gradient de pression proportionnel à x^8 modifie le profil de la vitesse par rapport à celui obtenu à partir d'un gradient de pression constant.

II. Ecoulement dans une conduite de section carrée

Nous supposons les parois $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x = 0 \end{pmatrix}$ poreuses et les parois $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x = 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x = 1 \end{pmatrix}$ imperméables.

La densité de charge électrique est toujours constante sur les parois. En ce qui concerne la vitesse, du fluide est injecté de la paroi $\begin{pmatrix} 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x = 1 \end{pmatrix}$ avec une vitesse uniforme (1, 0, 0) et il sera expulsé de la paroi $\begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = 1 \end{pmatrix}$ avec la vitesse (0, — 1, 0).

Ces conditions se traduisent par :

$x,0) = f_1(x) = q_0$
$x,1) = f_2(x) = q_0 + A.$
$0,y) = g_1(y) = q_0 + Ay.$
α $1,y) = g_2(y) = q_0 + Ay.$

La continuité aux coins de ces conditions est réalisée. Nous pouvons alors en déduire l'existence de couches limites paraboliques $\alpha_0^{(1)}$ et $\alpha_0^{(2)}$ d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon'}$ le long de $x = 0$ et de $x = 1$, déterminées par :

$$\alpha_0^{(1)}\left[\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon' y}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} A\left(y - \frac{x^2}{2\varepsilon' t^2}\right) dt$$

$$= A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[y - \frac{x^2}{2\varepsilon'}\right] \operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon' y}} - Ax\sqrt{\frac{y}{2\varepsilon'}}\, e^{-\frac{1}{4\varepsilon'}\frac{x^2}{y}}$$

$$\alpha_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right) = A\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(y + \frac{1}{2\varepsilon'}(1-x)^2\right) \operatorname{erfc}\frac{1-x}{2\sqrt{\varepsilon' y}}$$

$$- A(1-x)\sqrt{\frac{y}{2\varepsilon'}}\, e^{-\frac{1}{4\varepsilon'}\frac{(1-x)^2}{y}}$$

Le long de $y = 1$ existe une couche limite Q_0 d'épaisseur ε' définie **par** :

$$Q_0(x, \frac{1-y}{\varepsilon'}) = \lambda_0(x) \exp\left[-\frac{1-y}{\varepsilon'}\right]$$

où $$\lambda_0(x) = A - \alpha_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, 1\right) - \alpha_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon'}}, 1\right)$$

Uniformément dans le canal, nous avons :

$$q(x,y) = -Ay + q_0 + \alpha_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right) + \alpha_0^{(2)}\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right) + Q_0\left(x, \frac{1-y}{\varepsilon'}\right) + 0(\sqrt{\varepsilon'})$$

Pour la vitesse les conditions aux frontières se traduisent par :

$$\beta(x,0) = F_1(x) = x - \frac{Bx^4}{12\varepsilon'}$$

$$\beta(x,1) = F_2(x) = 1 - \frac{Bx^4}{12\varepsilon'}$$

$$\beta(0,y) = G_1(y) = y.$$

$$\beta(1,y) = G_2(y) = 1 - \frac{B}{12\varepsilon'}$$

Une couche limite $M_0^{(1)}$ parabolique d'épaisseur $\sqrt{\varepsilon'}$ se développe le long de $x = 0$ et est définie par :

$$M_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon' y}}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[y - \frac{x^2}{2\varepsilon' t^2}\right] dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{y - \frac{x^2}{2\varepsilon'}}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{2\varepsilon' y}} e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\varepsilon' y}}\right]$$

tandis que le long de $y = 1$ nous avons la présence d'une couche limite V_0 d'épaisseur ε' :

$$V_0\left(x, \frac{1-y}{\varepsilon'}\right) = \Psi_1(x)\exp\left(-\frac{1-y}{\varepsilon'}\right)$$

avec $\quad \Psi_1(x) = 1 - x - M_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, 1\right)$

Ainsi $\quad V_0(x, \frac{1-y}{\varepsilon'}) =$

$$e^{-\frac{1-y}{\varepsilon'}} \left\{1 - x - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{y - \frac{x^2}{2\varepsilon'}}{\sqrt{2}} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{2\varepsilon' y}} + x\sqrt{\frac{y}{\varepsilon'}}\, e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\varepsilon' y}}\right]\right\}$$

Uniformément dans la section, nous avons :

$$\Psi(x,y) = x + M_0^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon'}}, y\right) + V_0\left(x, \frac{1-y}{\varepsilon'}\right) + 0(\varepsilon').$$

Nous remarquons que l'expression de $\Psi(x,y)$ est la même que celle obtenue pour un gradient de pression constant [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. ECKHAUS and DE JAGER. — *Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential of elliptic type.* Archiv for Rational Mechanics and Analysis Vol. 23, n° 1, 1966.

[2] MAUSS J. — Thèse d'Etat. Faculté des Sciences, Paris (1971), n° A.O.5141 CNRS.

[3] G.-H. RAHAINGOARIVONY. — Thèse 3e cycle, Toulouse (1974).